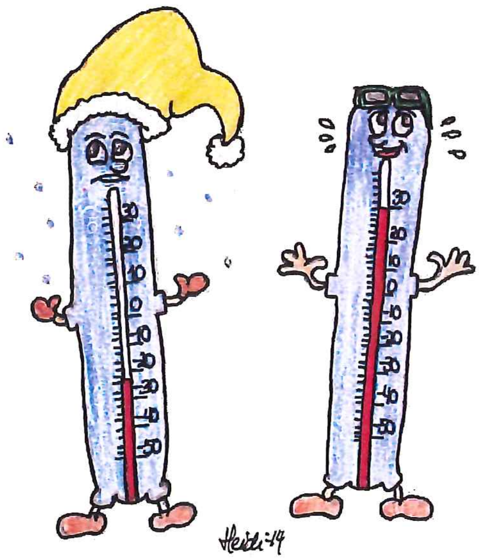
Masteroppgave

Master i matematikkdidaktikk

Heidi Sørmeland

"Det e dumt når folk e negativ så da må vi prøv å få dem positiv"

En casestudie om elevers arbeid med tekstoppgaver om negative tall på 7. trinn.



Trondheim, mai 2014

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Heidi Sørmeland

"Det e dumt når folk e negativ så da må vi prøv å få dem positiv"

En casestudie om elevers arbeid med tekstoppgaver om negative tall på 7. trinn.

"It's silly when people are negative so we must try to make them positive"

A case study on 7th graders working with word problems and negative numbers.

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2014

Veileder:	Anita Valenta

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på fem år ved lærerskolen i Trondheim, og med dette er det på tide å si farvel til studenttilværelsen. Å skrive master har vært en lærerik prosess der jeg først og fremst har opparbeidet meg en faglig kompetanse omkring mitt valgte tema, men jeg sitter også igjen med kunnskap om hvordan et forskningsarbeid kan utføres. Dette er verdifull kompetanse som jeg ønsker å ta med meg videre når jeg skal ut i skolen og møte yrkeslivet og lærerrollen. Dette har riktig nok vært en individuell oppgave, men det betyr slettes ikke at jeg har vært 100 % alene i arbeidet. Derimot er det flere som har bidratt og jeg vil benytte anledningen til å si takk til disse.

Den første takken går til elevene og skolen som deltok og gjorde det mulig for meg å utføre denne studien. Videre vil jeg gjerne få takke min veileder Anita Valenta som har stilt opp for meg og bidratt med mange gode råd underveis. Jeg er svært takknemlig for at du har satt av tid til å hjelpe meg og gitt meg tilbakemeldinger gjennom hele prosessen fra vi startet i august og frem til innlevering. Jeg vil også rette en takk til deg for det du utrettet før du ble min veileder. Du og dine matematikkollegaer Ole Enge og Geir Botten underviste matematikk på en slik måte at jeg virkelig fikk opp øynene for dette faget og ble inspirert til å begynne på masterstudiet. Dette valget er ikke noe jeg angrer på.

En annen takk går til familie og venner som har støttet meg og hjulpet meg med å holde motet oppe i prosessen frem mot det ferdige produktet. Det har vært mye frustrasjon og fortvilelse, men nå er jeg endelig i mål. Helt til slutt vil jeg rette en spesiell takk til min tanteunge og familiens lille solstråle, Stine. Med smil, latter og bekymringsløshet har du lyst opp hverdagen og hjulpet familien i en tung stund. Din tilstedeværelse har vært uvurderlig. Takk!

Heidi Sørmeland
Trondheim, mai 2014

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn

Tidligere forskning viser at negative tall er et tema som byr på store utfordringer for mange elever (Gallardo 2002; Vlassis 2004, 2008). I flere studier av negative tall har forskere som blant annet Gallardo (2002) og Manchester (2011) sett på dagens utfordringer med negative tall relatert til utfordringer man har møtt tidligere i historien. I et historisk tilbakeblikk viser det seg at negative tall har skapt stridigheter og utfordringer gjennom hele historien, og dette skyldes i stor grad tallenes abstrakte natur og at de ikke kan konkretiseres og observeres på samme måte som de naturlige tallene. I dagens skole er negative tall et av de første matematiske objektene elevene møter som ikke kan bli representert fysisk. Siden de negative tallene ikke kan konkretiseres, måles og observeres, er man nødt til å fatte tallene i tanken og ikke med sansene (Freudenthal, 1983).

Negative tall møtte sterk motstand i flere århundrer, hovedsakelig på grunn av deres abstrakte natur. I tillegg mente man at de negative tallene ikke var nødvendig ettersom man greide seg lenge med de tallene som allerede eksisterte for å løse vanlige problemer i hverdagen. Mange problemer man møter i skolen eller i hverdagen i dag, kan ofte løses uten å bruke negative tall (Prather & Alibali, 2008; Kilhamn, 201; Whitacre, Bishop, Lamb, Philipp, Schappelle & Lewis, 2011), og det vil i mange tilfeller være enklere å bruke positive tall. Et eksempel på dette er en tekstoppgave hentet fra ei svensk lærebok (Kilhamn, 2011):

> *Keiser Augustus ble født i år 63 før Kristus. Det kan skrives som år -63. Han døde i år 14 etter Kristus. Hvor gammel var han da han døde?* (Min oversettelse).

Tekstoppgaven har en kontekst som legger opp til at man skal bruke negative tall, men denne oppgaven kan enkelt løses ved å relatere til null og addere 63 år før og 14 år etter null. Dette gir regnestykket 63 + 14 = 77. Hvis man derimot benytter – 63 som betegnelsen på 63 år før Kristus, får man regnestykket 14 – (–63) = 77. Dette vil komplisere utregningen og vil for mange gjøre oppgaven vanskeligere enn hva den i utgangspunktet er. Whitacre et al. (2011) skriver at de fleste tekstoppgavene man møter i lærebøker og i hverdagen lar seg løse uten bruk av negative tall, og dette skyldes at det er vanskelig å finne en kontekst der de negative tallene virkelig er en nødvendighet. I dagens lærebøker er det vanlig å ta i bruk kontekster som en tilnærming til negative tall, og noen av de mest brukte kontekstene er penger, høyde og temperatur. Whitacre et al. (2011) påpeker at disse kontekstene er tilgjengelige uten bruk av negative tall, og at de derfor har en tendens til å bli brukt i en konstruert måte. Dette kan igjen medføre at nytteverdien av negative tall i matematikk svekkes, siden det blir lagt opp til at man skal bruke negative tall selv om det strengt tatt egentlig ikke er nødvendig.

Tekstoppgaver hjelper til med å konkretisere matematikken, og er derfor en viktig komponent i matematikkopplæringen. Tekstoppgaver kan brukes for å illustrere sammenhengen mellom matematikk og den virkelige verden, og de blir innført allerede i de tidligste stadiene av matematikkundervisningen. En av årsakene til dette er at reelle problemer som krever matematikk for å løses ikke dukker opp som ferdige likninger klar til å løses, men heller som verbale eller billedlige representasjoner som må tolkes symbolsk, manipuleres, og til slutt løses. I norske lærebøker finner vi mange tekstoppgaver som omhandler negative tall, og disse presenteres ofte med lignende kontekster som de nevnt ovenfor. Ofte innebærer disse tekstoppgavene at man skal komme frem til et regnestykke som kan brukes til å løse problemene (Prather & Alibali, 2008).

I arbeidet med å komme frem til et regnestykke som passer til konteksten i en tekstoppgave inngår en rekke matematiske prosesser. I disse prosessene tar elevene i bruk et matematisk språk for å få tilgang til objektene, og dette språket består av både muntlig og skriftlig språk, matematiske tegn, symboler og figurer. Duval (2006) omtaler de tegnene vi bruker for å få tilgang til matematiske objekter som *semiotiske representasjoner*, og semiotiske representasjoner kan være alt fra tabeller, grafer, likninger, figurer og naturlig språk (både skriftlig og muntlig). For å kunne gjøre matematikk og utføre matematiske prosesser er man avhengig av å bruke semiotiske representasjoner siden alle matematiske prosesser krever at man erstatter en representasjon med en annen (Duval, 2006). I matematikken spiller semiotiske representasjoner en viktig rolle, og disse brukes som verktøy for å få tilgang til de matematiske objektene og for å kunne operere med og på disse. Siden et matematisk objekt kan ha flere ulike semiotiske representasjoner oppstår muligheten til å kunne *transformere* mellom dem, og evnen til å kunne transformere mellom ulike representasjoner er helt avgjørende for læringen i faget (Duval, 2006). Ut i fra egenskapene til representasjonene kan vi plassere dem innenfor ulike semiotiske system. Ett system vil kunne være geometriske figurer, der man kan plassere figurer som tabeller og tallinjer. Et annet system kan være symbolspråk og der vil representasjoner som likninger og regnestykker befinne seg, mens representasjoner som tekstoppgaver kan plasseres innenfor systemet naturlig språk. Transformasjoner oppstår når vi gjør endringer innenfor det samme systemet (omtales som behandlinger) eller hvis vi skifter system (omtales som omdannelser). Omdannelser innebærer at vi endrer det semiotiske systemet, og et eksempel på dette vil være å gå fra en tekstoppgave til å representere det samme objektet for eksempel på en tallinje eller som et regnestykke.

1.2 Forskningsspørsmål

Å lære seg og utføre operasjoner med negative tall er viktig for videre læring i matematikk, spesielt innenfor temaet algebra. Vlassis (2002) har gjennom sitt forskningsarbeid funnet ut at mange feil som oppstår når elever løser likninger er forårsaket av at likningen inneholder negative tall. I stedet for at det er variablene og strukturen på likningen som gjør det vanskelig, er det heller den store graden av abstraksjon som de negative tallene medfører, som skaper vanskeligheter for elevene. Dette betyr at elevenes forståelse for negative tall er et viktig grunnlag for at de skal kunne lykkes med algebra, og negative tall kan sies å være elevenes første møte med algebra fordi dette, på lik linje med algebra, krever en abstraksjon av tall. Når elever møter negative tall i skolematematikken, vil noen av egenskapene relatert til naturlige tall bli motstridende og, som nevnt tidligere, vil en innføring av negative tall by på utfordringer. Flere forskere, blant annet Altiparmak & Özdoan (2010), har beskrevet utfordringene som er knyttet til negative tall i tre kategorier; disse omhandler utfordringer tilknyttet tallenes mengde og retning, aritmetiske operasjoner og minustegnet.

Negative tall er et tema som er viktig å lykkes med siden dette er en byggestein for videre læring i matematikk, spesielt innenfor temaet algebra. Med bakgrunn i tidligere forskning om negative tall og transformasjoner av representasjoner i matematikk, har jeg kommet frem til følgende forskningsspørsmål for min studie:

> *Hva er det som kjennetegner elevers arbeid med tekstoppgaver knyttet til negative tall og temperatur, og hvilke utfordringer kan oppstå i omdannelsen fra en hverdagslig kontekst til en symbolsk representasjon?*

De semiotiske representasjonene som omtales i mitt forskningsspørsmål er tekstoppgave og symbolsk representasjon. Disse to tilhører ulike semiotiske system og derfor vil transformasjonen mellom dem kunne beskrives som en omdannelse (Duval, 2006).

1.3 Metode og læringssyn

Som en tilnærming til forskningsspørsmålet mitt har jeg utført et kvalitativt forskningsarbeid i en 7. klasse. Dette forskningsarbeidet kan beskrives som en casestudie, der tre elevgrupper med to personer i hver gruppe fikk jobbe med fire tekstoppgaver om negative tall. Samtlige oppgaver hadde temperatur som kontekst, og oppgavene var formulert på ulike måter slik at forskjellige "temperaturbegreper" som *under, over, varmere, kaldere* og *forskjell* ble tatt i bruk. Dermed måtte elevene tolke disse begrepene for å finne ut hvilken operasjon de tilsvarte når de ble bedt om å finne et regnestykke som kunne representere tekstoppgaven. Hver gruppe var inne i omtrent 45 minutter hver, og elevene i hver gruppe skulle samarbeide om alle oppgaver og løse dem i fellesskap. Det ble gjort videoopptak av elevenes arbeid og dette utgjør mitt datamateriale, i tillegg til elevenes skriftlige notater og mine egne notater. I analysen vil jeg studere elevenes diskusjoner, fremgangsmåter og forklaringer i dette datamaterialet. Ettersom elevene skal diskutere og samarbeide om å løse oppgavene, vil de i stor grad bruke det muntlige språket og være i interaksjon med hverandre. Dette er i samsvar med det sosiokulturelle synet på læring, hvor kunnskap og læring oppstår i sosiale omgivelser, og hvor samarbeid og interaksjon med andre er helt grunnleggende prinsipper for læring (Dysthe, 2001). Språket er også helt avgjørende for læring i dette læringsperspektivet, siden språket muliggjør et samspill med andre mennesker ved å gi oss evnen til å kunne kommunisere erfaringer til hverandre. Det sosiokulturelle læringsperspektivet sier at læring er mediert, og siden språket er det viktigste medierende redskapet vil bruken av dette være sentralt. I tillegg er elevene, for å få tilgang til de matematiske objektene i oppgavene, nødt til å bruke et matematisk språk, og derfor vil semiotiske representasjoner også bli brukt som et medierende verktøy i arbeidet med oppgavene.

1.4 Oppbygning av oppgaven

Denne masteroppgaven består av fem kapitler: teori, metode, analyse av oppgavene, analyse og drøfting av elevarbeidet og avslutning. I teoridelen presenteres det teoretiske rammeverket som utgjør grunnlaget for den videre analysen i studien. Innholdet her vil blant annet være en presentasjon av det sosiokulturelle læringssynet og teori om semiotiske representasjoner og transformasjoner mellom semiotiske system. Videre kommer et innblikk i historien til utviklingen av negative tall og hvordan ulike kontekster og tekstoppgaver brukes i undervisningen av negative tall. Til slutt presenteres utfordringer som tidligere forskere har knyttet til negative tall.

I metodekapitlet vil jeg begrunne mine valg omkring innholdet i oppgaven min, og jeg vil gjøre rede for hvordan datainnsamlingen ble utført. Hvilke metoder jeg har brukt for å samle inn data og hvordan materialet analyseres vil også bli gjort rede for, og til slutt kommer et delkapittel om etiske retningslinjer og metodekritikk.

I kapitlet med analyse av oppgavene presenteres de fire oppgavene elevene ble tildelt og en kort analyse av disse. I det neste kapitlet, analyse og drøfting av elevarbeidet, vil resultater fra elevenes arbeid med de fire oppgavene drøftes opp mot det teoretiske rammeverket i studien. Her belyses kjennetegn og utfordringer i elevenes arbeid og disse forklares i sammenheng med utdrag fra elevbesvarelsene. Til slutt kommer avslutningskapitlet der funn fra studien blir presentert, samt erfaringer jeg har gjort meg i løpet av denne prosessen.

2. Teori

I teorikapitlet presenteres teori som utgjør bakgrunnen for analysen i studien. Det blir gjort rede for det sosiokulturelle læringsperspektivet siden dette er sentralt i studien, og deretter presenteres deler av Duval (2006) sin teori om semiotiske representasjoner i matematikk. Videre presenteres negative tall i et historisk perspektiv, og deretter hvordan tekstoppgaver og ulike kontekster brukes i undervisningen av negative tall. Til slutt redegjøres det for utfordringer knyttet til læring av negative tall.

2.1 Et sosiokulturelt læringsperspektiv

> What the child is able to do in collaboration today
> he will be able to do independently tomorrow
> *Vygotsky, 1987*

Det er flere syn på hva kunnskap er og hvordan læring skjer, og i de siste årene er det spesielt to ulike læringsperspektiver som har vært dominerende. Dette er konstruktivismen og det sosiokulturelle perspektivet. Det sistnevnte bygger på elementer fra kognitiv og konstruktivistisk læringsteori og er læringsperspektivet som min studie bygger på.

I et sosiokulturelt læringsperspektiv er samspillet mellom individet og de sosiale og kulturelle omgivelsene i fokus. En grunnleggende tanke i dette perspektivet er at kunnskap og læring oppstår i dette samspillet, og i motsetning til et kognitivt læringsperspektiv der hovedsakelig individuelle prosesser er avgjørende for læring, blir samarbeid og interaksjon sett på som helt grunnleggende for læring innenfor det sosiokulturelle perspektivet (Dysthe, 2001). Säljö (2001, s.13) skriver at ”i en mer grunnleggende betydning handler læring om hva individer og kollektiver tar med seg fra sosiale situasjoner og bruker i framtiden” og at ”læring er et aspekt av all menneskelig virksomhet”. Dette betyr at vi tar med oss erfaringer vi har gjort i samspill med andre og benytter disse ved senere anledninger. Videre skriver Säljö (2001) at mennesker er født inn i og utvikler oss innenfor rammen for samspill med andre, og helt fra starten gjør mennesket erfaringer sammen med andre.

Læring i et sosiokulturelt syn innebærer som nevnt et samspill med andre og deltakelse i et fellesskap. ”Læring er deltaking i praksisfellesskap” er et av seks sentrale aspekt som Dysthe (2001) presenterer i sin framstilling av det sosiokulturelle perspektivet. De fem andre aspektene er: ”læring er situert”, ”læring er grunnleggende sosial”, ”læring er distribuert”, ”læring er mediert” og ”språket er sentralt i læringsprosesser” (Dysthe, 2001). Det er spesielt to av disse aspektene som kan knyttes til min studie. Språket vil ha en viktig rolle i denne studien siden elevene skal jobbe i grupper, diskutere og samarbeide for å løse oppgavene de blir tildelt. Derfor vil ”språket er sentralt i læringsprosessar” være et sentralt aspekt. Som nevnt er samarbeid og interaksjon med andre helt avgjørende for læring i det sosiokulturelle læringssynet, og det er språket som gir oss evnen til å kunne kommunisere og samspille med hverandre. I denne studien vil språket og dets representasjoner som elever bruker som medierende redskaper være sentralt, og derfor er også aspektet ”læring er mediert” sentralt i studien. Videre i dette kapitlet redegjøres det for disse to aspektene.

2.1.1 Mediering og artefakter

I det sosiokulturelle læringsperspektivet står begrepet mediering sentralt, og det er dette aspektet som skiller læringsperspektivet mest fra de andre ledende læringsteoriene (Säljö, 2001). Begrepet kommer fra det tyske ordet *vermittlung* som betyr å formidle, og mediering blir benyttet om alle typer støtte eller hjelp man får i læringsprosessen, enten den kommer fra personer eller redskaper (Dysthe, 2001). Säljö bruker begrepet *artefakter* i stedet for redskaper og dette er et begrep som har sterk tilknytning til mediering (Säljö, 2001). Begrepet defineres som gjenstander eller produkter fremstilt av mennesker, og artefakter utarbeides for å fungere som redskaper for menneskene når de blant annet skal løse problemer eller bearbeide informasjon (Säljö, 2001).

Mediering innebærer at omverdenen blir tolket og håndtert ved hjelp av forskjellige fysiske og intellektuelle artefakter, og dermed står ikke mennesker i direkte og umiddelbark kontakt med omverdenen (Säljö, 2001). Hvis vi tar en titt omkring oss, på kontoret, hjemme eller hvor som helst, ser vi hvor avhengige vi er av ulike artefakter som hjelper oss med å løse problemer og til å gjøre hverdagen enklere. Noen eksempler på dette kan være datamaskinen, sykkelen, hårbørsten eller stolen. I matematikk kan fysiske artefakter være en linjal, en passer eller ei gradskive, mens intellektuelle artefakter kan være begreper, formler eller symboler. I min studie vil spesielt artefakter som symboler og tegn være viktige siden negative tall er matematiske objekter med en abstrakt og uobserverbar natur som avhenger av tegn for å kunne representeres og håndteres.

En grunntanke i det sosiokulturelle perspektivet er at ressursene blir skapt gjennom kommunikasjon, men at de også blir ført videre gjennom kommunikasjon. Kunnskap og ferdigheter kommer fra innsikt og erfaringer mennesker har gjort seg gjennom historien, og vi får tilgang til disse gjennom interaksjoner med andre mennesker (Säljö, 2001). Artefaktene består derfor av erfaringer og innsikter som tidligere generasjoner har gjort seg, og når vi bruker disse betyr det at vi utnytter erfaringer som er blitt samlet gjennom flere generasjoner. For å kunne kommunisere disse erfaringene til hverandre er det spesielt et medierende redskap vi mennesker tar i bruk. Dette er språket vårt og i følge Säljö (2001) er ressursene som finnes i språket vårt det aller viktigste intellektuelle redskapet mennesket har. Videre vil jeg gå nærmere inn på språkets rolle i det sosiokulturelle læringssynet.

2.1.2 Språkets rolle i det sosiokulturelle læringsperspektivet

> Men det ingen annen art har, er den spesielle, fleksible og utviklingsbare mekanismen for å skape mening som det menneskelige språket utgjør.
> *Säljö (2001, s. 35)*

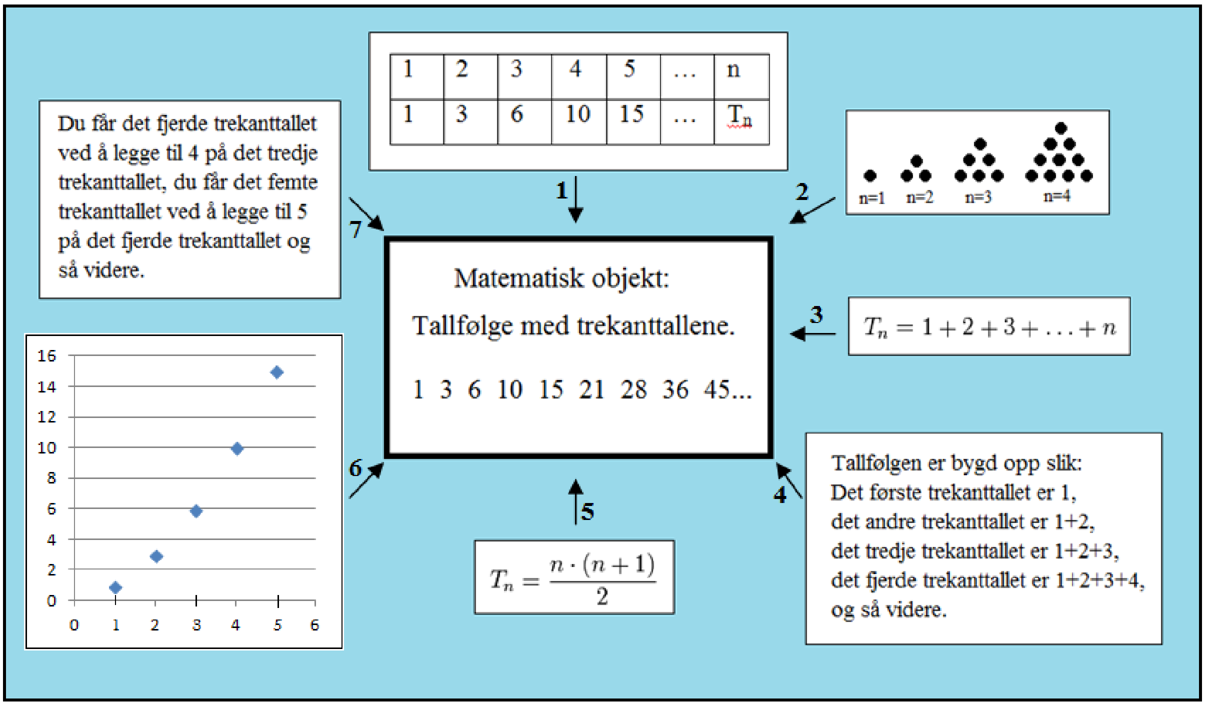
Kommunikasjon og språkbruk står helt sentralt i et sosiokulturelt perspektiv. Språket er den mest unike komponenten i menneskelig kunnskapsbygging fordi det muliggjør et samspill med andre mennesker og gir oss evnen til å kunne samle erfaringer og kommunisere disse til hverandre (Säljö, 2001). Gjennom å lytte, samtale, etterligne og samhandle med andre får barna ta del i kunnskap og ferdigheter fra de er helt små, og derfor er kommunikative prosesser helt sentrale i menneskelig læring og utvikling (Dysthe, 2001). Språk og kommunikasjon er ikke bare et middel for læring, men det er selve grunnvilkåret for at læring og tenking foregår. Vi bruker språket både for å forstå og tenke for oss selv, men samtidig også for å uttrykke det vi forstår til andre (Dysthe, 2001).

I et sosiokulturelt perspektiv er det vesentlig at språklige uttrykk ikke bare blir oppfattet som nøytrale betegnelser på en endimensjonal omverden, men at de inneholder holdninger, verdier og standpunkter (Säljö, 2001). Säljö (2001, s. 89) skriver at "språket er *samtidig* et kollektivt, et interaktivt og et individuelt sosiokulturelt redskap. Det er derfor det kan fungere som et bindeledd mellom kultur, interaksjon og individets tenking". Dette medfører at man indirekte kan ta del i hverandres erfaringer gjennom språket, og at man dermed ikke er avhengig kun av sine egne erfaringer. Vi kan fortelle om våre opplevelser slik at andre kan ta del i dem (selv om vi aldri kan dele dem i fullstendig forstand), og vi former oss selv og andre, vår etikk og moral, i og gjennom kommunikasjon (Säljö, 2001). Å lære seg og kommunisere er å bli et sosiokulturelt vesen, og helt fra starten søker barnet sosial kontakt og utvikler ulike typer interaksjon med personer i omgivelsene. Säljö (2001) påpeker at mennesket er født med en orientering mot kommunikasjon med andre og at språket utvikles som et middel til å kunne opprettholde og utvikle bestrebelsen etter å kommunisere. I min studie vil jeg observere elever som samarbeider i grupper og da vil språket de bruker til å kommunisere være helt sentralt. Språket gir meg tilgang til deres diskusjoner og kunnskap, og de kan bruke språket til å uttrykke sin forståelse og sine erfaringer.

I denne studien vil språket ha ulike former og inneholde både muntlig og skriftlig språk som er vanlig i stort sett alle fag, men også ulike tegn, symboler og figurer som er spesielt for det matematiske språket. Dette vil videre omtales som semiotiske representasjoner og de semiotiske representasjonene, inkludert alle typer språk, er et viktig medierende verktøy for å kunne kommunisere kunnskap, men også for å kunne utvikle ny kunnskap (Duval, 2006).

2.2 Representasjoner i matematikk

Matematiske objekter kan beskrives som abstrakte, uobserverbare og ikke-fysiske, og objektenes natur gjør oss avhengige av representasjoner for at vi skal kunne få tilgang til dem og kunne lære om dem. Objekter i matematikk vil i motsetning til objekter i andre fag som fysikk, kjemi og biologi aldri være tilgjengelige via opplevelser, observasjoner eller ved hjelp av instrumenter som for eksempel mikroskop, teleskop og måleapparater. For å få tilgang til matematiske objekter er vi nødt til å benytte oss av det Duval (2006) omtaler som semiotiske representasjoner. Vi benytter oss av en rekke ulike representasjoner for å uttrykke og kommunisere matematiske ideer, og semiotiske representasjoner i matematikken hjelper oss med å utvikle, dele og bevare matematiske tanker og ideer. Noen av representasjonene som for eksempel representasjoner i form av naturlig språk er vanlige i all slags tenking, mens andre typer, som algebraisk notasjon, er mer spesifikk for matematikk. Semiotiske representasjoner kan altså være naturlig språk (både skriftlig og muntlig), men også ulike tegn, symboler, tabeller og figurer som vi bruker spesielt i matematikk. Vi er avhengige av å bruke ulike representasjoner for å gjøre matematiske objekter tilgjengelige og håndterbare, og for ett og samme objekt finnes det flere forskjellige representasjoner som bidrar til dette. For å illustrere dette vil jeg bruke følgende figur der det matematiske objektet gjøres tilgjengelig og mer forståelig ved å bruke flere ulike semiotiske representasjoner:



Figur 1: Semiotiske representasjoner for tallfølgen med trekanttall.

De semiotiske representasjonene som brukes i figur 1 er blant annet graf, forklaring med ord, tabell, figur og algebraisk notasjon. Vi kan si at de ulike semiotiske representasjonene "står for" det matematiske objektet siden samtlige representerer objektet. I dette tilfellet er det matematiske objektet tallfølgen bestående av trekanttallene, og ut i fra figuren ser vi at et matematisk objekt kan ha nokså forskjellige typer semiotiske representasjoner. De forskjellige representasjonene bidrar på hver sin måte til å gjøre det matematiske objektet tilgjengelig, og representasjonene innehar ulikt potensial. I matematikk finnes det et stort mangfold av semiotiske representasjoner av forskjellig karakter, og de innehar også ulike egenskaper. Siden de ulike representasjonene innehar forskjellige egenskaper vil det være nyttig å bruke ulike representasjoner til ulike formål og problemstillinger. Hvilken representasjon man velger å bruke kan derfor gjøre et arbeid enklere, men den kan også gjøre arbeidet vanskeligere hvis man velger en upassende representasjon. På bakgrunn av representasjoners egenskaper og karakter har Duval (2006) laget en oversikt med fire forskjellige *semiotiske systemer*, og her kan de ulike semiotiske representasjoner plasseres etter hvilken type de er.

De fire semiotiske systemene Duval (2006) presenterer er; naturlig språk, notasjonssystemer, geometriske figurer og kartesiske grafer. For å forklare de ulike systemene ytterligere vil jeg presentere en figur som viser denne oversikten, og for å gi eksempler på de ulike systemene henviser jeg til de semiotiske representasjonene jeg presenterte i figur 1:

Naturlig språk	Notasjonssystemer	Geometriske figurer	Kartesiske grafer
Skriftlig: bevis, teorem, tekstoppgaver. Muntlig: forklaringer og assosiasjoner.	Numeriske Algebraiske Symbolske	Ikoniske: tegning, skisse, mønstre. Ikke-ikoniske: konstruksjon med passer og linjal.	Diagrammer og grafer.
Se representasjon 4 og 7 i figur 1.	Se representasjon 3 og 5 i figur 1.	Se representasjon 2 i figur 1.	Se representasjon 1 og 6 i figur 1.

Figur 2: Semiotiske systemer. Tilpasset etter Duval (2006, s. 110).

Ingen representasjon kan alene dekke alle aspekter ved et begrep i matematikken, og derfor er det nyttig med flere representasjoner av det samme matematiske objektet. Det at et objekt kan ha flere semiotiske representasjoner kan gjøre det vanskelig for elever å gjenkjenne det samme objektet i de forskjellige representasjonene, og et eksempel på dette er at objektet 2x + 3 kan være vanskelig å gjenkjenne som for eksempel en regnefortelling eller graf siden disse representasjonstypene er svært ulike. Det å kunne *transformere* mellom slike ulike representasjoner er i følge Duval (2006) kjernen i all matematikk siden alle matematiske prosesser involverer at man benytter seg av semiotiske representasjoner og erstatter en semiotisk representasjon med en annen. Dette gjør at transformasjoner mellom semiotiske representasjoner ligger i hjertet av all matematisk aktivitet, og semiotiske representasjoner er helt avgjørende og en nødvendighet for at vi skal kunne utføre matematiske prosesser:

> No kind of mathematical processing can be performed without using a semiotic system of representation, because mathematical processing always involves *substituting some semiotic representation for another*. (Duval, 2006, s. 107)

Duval (2006) poengterer at evnen til å bytte fra én representasjon til en annen ofte er den kritiske delen for læring og for å løse problemer i matematikk. Derfor vil det være viktig å arbeide med transformasjoner mellom representasjoner for å støtte elevenes læring (Duval 2004). Det å kunne transformere mellom representasjoner er viktig for læring i faget, og Duval (2006) skiller mellom to ulike typer transformasjoner.

2.2.1 Transformasjoner mellom semiotiske representasjoner

Duval (2006) skriver at det å gjøre matematikk alltid innebærer at man skal erstatte semiotiske representasjoner med andre, og i denne prosessen er det ikke selve representasjonene som er viktige, men transformasjonen mellom dem. I følge Duval (2004) finnes det to typer transformasjoner kalt *behandlinger* og *omdannelser.* Behandlinger kjennetegnes ved at vi bevarer det samme semiotiske systemet gjennom hele transformeringsprosessen. Et eksempel på dette kan være når vi manipulerer og forenkler et uttrykk eller regnestykke:

$x - (-5) = 7$

$\downarrow$

$x = 7 + (-5)$

$\downarrow$

$x = 2$

I eksemplet ovenfor jobber man i det semiotiske systemet notasjonssystem, og man holder seg i notasjonssystemet gjennom hele prosessen. Omdannelser kjennetegnes ved at vi endrer det semiotiske systemet, men samtidig beholder vi det matematiske objektet. Et eksempel på dette kan være følgende:

På Dovre er det -33 ˚C.
I Oslo er det 16 ˚C varmere.
Hva er temperaturen i Oslo?

$\downarrow$

$-33 + 16 = -17$

I eksemplet ser vi at det benyttes to ulike semiotiske systemer. Tekstoppgaven er innenfor systemet *naturlig språk* og det symbolske uttrykket kan plasseres innenfor et *notasjonssystem*. Selv om det er to ulike semiotiske systemer er det det samme objektet som representeres i begge systemene, og det betyr at det samme objektet er bevart gjennom hele transformasjonen.

Omdannelser korresponderer til en transformasjon *mellom* ulike semiotiske system, mens behandlinger tilsvarer en sekvens av en eller flere transformasjoner *innenfor* det samme semiotiske systemet. Å utvikle evnen til å kunne omdanne mellom representasjoner er den virkelige utfordringen i matematikkopplæringen (Duval, 2006). Omdannelser er, i følge Duval (2006), en transformasjon som er mer kompleks enn behandlinger, og dette skyldes at et skifte av system krever gjenkjennelse av det samme objektet i to ulike representasjoner. Ofte er innholdet i representasjonene veldig forskjellig som i eksemplet med tekstoppgaven og det symbolsk uttrykket ovenfor. Der har vi et skifte mellom en tekstoppgave og et regnestykke, og i dette tilfellet vil det for eksempel være viktig å tolke begrepet ”varmere” og hvilken operasjon dette indikerer. Problemstillinger som om det skal være addisjon eller subtraksjon dukker opp, og en slik oversettelse fra en tekstoppgave til et symbolsk uttrykk er utfordrende for elever. Duval (2006, s. 19) skriver følgende:

> Thus, the obstacles raised by the simple “translation” of the terms of a word problem into symbolic expressions are also well known. It is a gap that many students cannot succeed getting over, whatever the mathematical content (…)

Mange elever har problemer med omdannelsen fra en tekstoppgave til et symbolsk uttrykk, og dette gapet er det flere studenter som ikke kommer seg over. Duval (2004) skriver at man må koordinere de ulike semiotiske systemene som brukes for et objekt for å utvikle en matematisk forståelse for objektet. Uten en slik samordning kan ikke elevene mobilisere ulike representasjoner i et samspill og utføre omdannelser. Det som blir viktigst i undervisningen er ikke nødvendigvis å velge det beste representasjonssystemet, men å gjøre studentene i stand til å koble forskjellige måter å representere det matematiske innholdet på (Duval, 2004).

Av de to transformasjonstypene behandlinger og omdannelser vektlegges den sistnevnte i denne studien. Elevene skal arbeide med tekstoppgaver om negative tall og temperatur, og de skal finne symbolske uttrykk som er passende til tekstoppgavene. Tekstoppgavene vil som nevnt tilhøre det semiotiske systemet *naturlig språk,* mens det symbolske uttrykket vil tilhøre systemet *notasjonssystem.* I denne studien vil det symbolske uttrykket være et regnestykke bestående av tall, fortegn og operasjonssymboler som ”+” og ”–”. Det vil altså hovedsakelig være de to systemene naturlig språk og notasjonssystem som blir benyttet i denne studien, men bruk av de to andre semiotiske systemene kan også forekomme. Tekstoppgavene i studien vil være gitt i en temperaturkontekst og derfor kan man forvente at representasjoner som tallinje og gradestokk fra systemet *geometriske figurer* også blir brukt.

2.3 Negative tall – Et innblikk i historien.

> I know some who cannot understand
> that to take four from nothing leaves nothing.
> *Blaise Pascal, 1600-tallet.*

Negative tall har vært et omdiskutert begrep gjennom historien, og i en studie av negative tall kan man nesten ikke være foruten en kort presentasjon av tallenes utvikling i et historisk perspektiv. En annen grunn til at betydningen av en historisk innflytelse bør vektlegges i denne studien er at det sosiokulturelle perspektivet ser på matematikk som en sosial og kulturell virksomhet der vi bruker kunnskap fra tidligere generasjoners erfaringer og innsikt.

Begrepet negative tall har ført til mange stridigheter opp gjennom årene, og i studier om negative tall har forskere som Gallardo (2002) og Manchester (2011) tatt for seg et historisk perspektiv i sine studier. De har funnet tendenser til at elevers vanskeligheter med negative tall kan ha historiske røtter:

> Throughout the history of mathematics, mathematicians perceived the concept of negative numbers as a point of contention. Current students continue to struggle with some of the same conceptual understandings of negative numbers. (Manchester, 2011, s. 46)

Dagens elever møter de samme utfordringene som tidligere matematikere strevde med. For å gjøre rede for stridighetene som har oppstått omkring negative tall og hvorfor disse tallene er så utfordrende vil jeg videre presentere et innblikk i historien til negative tall.

Det første skriftlige beviset for bruk av negative tall stammer fra en kinesisk tekst skrevet omtrent 250 år før Kristus. I denne teksten blir negative tall betraktet som gjeld og motsatte størrelser, og tallene blir brukt til å løse likninger der oppgavene handler om kjøp og salg (Gallardo, 2002). Som hjelpemiddel til å regne brukte kineserne staver med farge for å illustrere tallene. Røde staver var positive tall og svarte staver var negative tall.

I matematikk fra Østen (Babylon og oldtidens India) var man opptatt av telling og summering, og tall representerte hovedsaklig diskrete mengder, men også rekkefølger. For matematikere i dette området måtte tallene gi mening i relasjon til hverandre (Kilhamn, 2011). Her aksepterte man abstrakte matematiske objekter i større grad enn andre steder, og matematikere fra Østen var de første som betraktet negative tall som reelle tall. De var opptatt av at tallene skulle "oppføre seg pent" i et system, og tallet null og negative tall ga derfor mening fordi de kunne opprettholde følgende system:

2 - 1 = 1
2 - 2 = 0
2 - 3 =-1
2 - 4 =-2

Vi ser at dette systemet "oppfører seg pent" ved at det er en logikk i utviklingen, og et slikt system gjorde det mulig for matematikerne å akseptere de negative tallene som matematiske objekter selv om de var abstrakte. På samme måte utviklet de også et lignende system for multiplikasjon og divisjon med negative tall.

I matematikk fra Vesten (hovedsakelig Egypt) var man heller opptatt av at tall skulle være geometriske størrelser. Tallene skulle være målbare og måtte gi mening i form av en geometrisk størrelse (Kilhamn, 2011). Negative tall ble derfor sett på som unødvendige siden en negativ distanse eller et negativt areal ikke ga noen mening. Negative tall dukket opp i mellomregninger, men man var ikke like villig som de i Østen til å ta i bruk abstrakte objekter i matematikk. Derfor tok det lang tid før de negative tallene ble akseptert og brukt til noe mer enn bare i mellomregninger.

Europeerne mente at negative tall var ”mindre enn ingenting” og siden dette var en absurd tanke møtte tallene sterk motstand også her. Det var først etter renessansen at europeerne ble mer avhengige av de negative tallene. Med store økonomiske endringer som resultat av blant annet økt handel, utviklet det seg et større behov for profesjonelle matematikere som kunne lære bort praktisk matematikk til kjøpmennene (Manchester, 2011). Stadig flere matematikere innså at man måtte godta de negative tallene for å kunne løse mer avanserte problemer til tross for at man ikke var helt komfortable med dem. For matematikere ble det mer vanlig å benytte seg av de negative tallene i utregninger og ideen om en negativ kvantitet ble dermed godtatt, men man aksepterte fortsatt ikke negative tall som løsninger fordi dette var fortsatt for abstrakt og meningsløst. Dette gjaldt også kjente matematikere som Fibonacci (1170-1250) og Pascal (1623-1662). Hvis et problem førte til en negativ løsning var spørsmålet stilt feil. Man skulle stille spørsmålet slik at det ville produsere et positivt svar, og et eksempel på dette er at man fjerner negativiteten fra tallet (Kilhamn, 2011). Negative tall kan bli tolket som gjeld, og da kan man si ”hvor mye har du i gjeld?” i stedet for å spørre ”hvor mye har du?”. Svaret blir da 4 kroner i gjeld i stedet for å si at man har -4 kroner.

Den virkelige utviklingen av negative tall som matematiske objekter fant ikke sted før det 16. århundret. Da ble de negative tallene utviklet i sammenheng med introduksjonen av algebra (Kilhamn, 2011). Selv om algebra egentlig oppstod i India rundt år 600 blomstret den ikke før det kom en økende symbolisering av matematikk. Dette skjedde fra det tolvte og frem til det sekstende århundre i forbindelse med at matematikere som Fibonacci, Chuquet og Widman innførte symbolsk notasjon for likninger. Gapet mellom hverdagsmatematikk og abstrakt matematikk ble mer tydelig etter hvert som algebraen ble mer avansert. I tråd med at algebraen vokste ble de negative tallene mer og mer aksepterte og stadig flere oppfattet negative tall som reelle tall. På slutten av 1800-tallet ble de negative tallene til slutt anerkjent for fullt, og etter en lang kamp ble de altså definert som matematiske objekter. Negative tall ble først og fremst brukt av matematikere og i begynnelsen av det 19. århundre eksisterte ikke negative tall i det daglige liv. Det var ikke før omtrent 100 år senere at folk begynte å snakke om temperaturer under null.

Matematikere slet med å finne mening i de negative tallene fordi de forsøkte å knytte dem til konkreter og mengder (Whitacre et al., 2011). Dette var et stort hinder som førte til at det tok lang tid før man aksepterte de negative tallene (Vlassis, 2008). Den viktigste endringen som åpnet opp for aksept av negative tall var overgangen fra et konkret synspunkt til et formelt syn på tallene. Først når man betraktet tallene som abstrakte objekter kunne man akseptere dem for fullt. Whitacre et al. (2011) skriver at historien til negative tall er en historie om fremgang i møte med motstand. Spørsmål som ”hvordan er det mulig å ta noe av ingenting?” og ”hvordan kan -7 være mindre enn 3?” har plaget matematikere og hindret framgang i utviklingen av de negative tallene. Den store motstanden til negative tall stammet fra ønsket om en tilknytning til konkrete eller kvantitative tolkninger av tallet, og i følge Whitacre et al. (2011) var det framveksten av abstrakt algebra som ledet det matematiske samfunnet til å akseptere de negative tallene som fullverdige tall. Negative tall ble rett og slett legitimert fordi de løste unike matematiske problemer og ikke fordi de var nødvendige for å løse hverdagslige problemer. Hverdagslige problemer kunne fint løses på andre måter enn å bruke negative tall (Whitacre et al., 2011).

Det historiske tilbakeblikket viser at negative tall har skapt stridigheter og utfordringer for de mest kjente matematikere opp gjennom tidene. Derfor er det kanskje ingen overraskelse at dette temaet fortsatt skaper vanskeligheter både for elever og lærere. Videre vil jeg gå dypere inn i de negative tallenes natur for å se på hvorfor de er så utfordrende, men først vil jeg gjøre rede for undervisning av negative tall i skolen og hvordan tekstoppgaver og ulike kontekster brukes i undervisningen av negative tall.

2.4. Negative tall og tekstoppgaver

I matematikkundervisningen møter elevene oppgaver som grovt sett kan deles inn i to grupper. Dette er oppstilte oppgaver der regnemåten er gitt og tekstoppgaver der elevene selv må finne frem til hvordan oppgaven kan løses ved å ta utgangspunkt i teksten (Nortvedt, 2013). Tekstoppgaver kan brukes til ulike formål, og dette kan blant annet være at elevene skal øve på innøvde regneteknikker, problemløsning og modellering eller for å utforske matematiske sammenhenger når nytt stoff skal innlæres (Nordtvedt, 2013). I matematikkundervisningen vil tekstoppgaver være viktige komponenter allerede i de første skoleårene siden tekstoppgavene kan brukes for å konkretisere matematikken for elevene. Tekstoppgavene kan omhandle kontekster fra hverdagssituasjoner og fra den virkelige verden, og tekstoppgavene kan brukes for å illustrere sammenhengen mellom matematikken og den virkelige verden.

I dagens lærebøker er det vanlig å ta i bruk kontekster og modeller som en tilnærming til negative tall, og Whitacre et al. (2011) presenterer en oversikt over hvilke kontekster som er mest utbredt basert på 18 lærebøker for 5. og 6. klasse fra staten California. De mest typiske kontekstene for å presentere negative tall eller addisjon og subtraksjon med negative tall er følgende (Whitacre et al., 2011):

- Penger (benyttet i 94% av lærebøkene som ble undersøkt)
- Høyde (89%),
- Temperatur (89%)
- Bevegelse forover og bakover (61%).

I følge Kilhamn (2011) er temperatur en av de mest brukte kontekstene i Sverige for å presentere negative tall, og dette er en kontekst som også blir brukt mye i norske lærebøker. I denne studien vil oppgavene som elevene arbeider med alle være gitt i temperaturkonteksten. Det som er bemerkelsesverdig med både denne konteksten og de andre som er vanlig å bruke i undervisningen av negative tall er at de ser ut til å være tilgjengelige uten bruk av negative tall (Whitacre et al., 2011). Matematiske problemer om negative tall som er gitt i en kontekst fra den virkelige verden kan løses med positive tall, og ofte vil dette også enn å bruke negative tall. Ved bruk av slike hverdagslige kontekster vil dermed ikke negative tall fremstå som verktøy som er *nødvendige* for å løse problemer, men heller som verktøy som *kan* brukes. Et eksempel på dette er følgende tekstoppgave som Whitacre et al. (2011, s. 4) presenterer:

> The Debate Club's income from a car wash was $300, including tips. Supply expenses were $25. Use integer addition to find the club's total profit or loss.

Oppgaven er hentet fra ei sjetteklassebok, og forfatterne poengterer at denne løses med negative tall kun fordi det er instrukser om det i oppgaveteksten. Denne oppgaven ble brukt som et eksempel i ei lærebok og derfor fulgte det også med et løsningsforslag og dette var følgende:

300 + (-25)	*Use negative for the expenses.*
300 – 25	*Find the difference of the absolute values.*
275	*The answer is positive.*

The club earned $275.

I denne tekstoppgaven er bruken av negative tall fullstendig unødvendig, og den eneste grunnen til å representere fremgangsmåten som addisjon med negative tall er fordi boken instruerer leseren om å gjøre det. Den samme tekstoppgaven uten instruksene ville blitt identifisert som en subtraksjonsoppgave hvis den hadde stått skrevet i en tredjeklassebok (Whitacre et al., 2011). I tillegg ser vi i eksemplet at addisjon av et negativt tall faktisk utføres som helt vanlig subtraksjon til slutt. Vi kan trekke linjer tilbake til den historiske utviklingen der man i Europa klarte seg lenge uten negative tall. De fleste hverdagsproblemene ble løst helt fint uten å bruke negative tall, og det kommer derfor ikke som noen overraskelse at hensiktsmessige kontekster der negative tall virkelig er nødvendige er fåtallige (Whitacre et al., 2011).

Eksponeringer for operasjoner på negative tall er knappe, og dette henger sammen med at mange problemer man møter i skolen eller i hverdagen ofte kan løses uten å bruke negative tall (Kilhamn, 2011). Vi mennesker unngår å bruke negative tall hvis vi kan, og et kjent eksempel på dette er at Celsius fastsatte den originale skalaen på termometeret slik at vi kunne unngå å bruke negative tall i de fleste situasjoner i hverdagen. Dette gjorde han ved å sette kokepunktet til 0 ˚C og smeltepunktet til 100 ˚C. Dette ble senere endret til dagens termometerskala, men på Fahrenheitskalaen er normale temperaturer fortsatt stort sett alltid positive (Kilhamn, 2011). Det er ikke noen stor overraskelse at elever unngår å bruke negative tall i oppgaveregning siden mennesker ser ut til å unngå negative tall i deres daglige liv hvis de kan (Kilhamn, 2011). I denne sammenhengen innfører Kilhamn (2011, s. 51) begrepet ”Making a simple problem complicated”, og med dette mener hun at en oppgave kan bli mer komplisert hvis man løser den med negative tall enn om man bare bruker positive tall. Hun eksemplifiserer dette med en tekstoppgave fra en svensk lærebok (min oversettelse):

> Keiser Augustus ble født i år 63 før Kristus. Dette kan skrives som år -63. Han døde i år 14 etter Kristus. Hvor gammel var han da han døde?

Hvis man skal løse denne oppgaven ved å bruke negative tall ville regnestykket blitt 14 – (–63) = 77. En noe enklere fremgangsmåte vil være å relatere til null og addere 63 år før og 14 år etter null. Da får man regnestykket 63 + 14 = 77. Vi ser at det å benytte negative tall gjør en enkel oppgave mer komplisert og denne egenskapen kan gjøre det vanskelig å motivere elevene til å bruke negative tall (Kilhamn, 2011). Siden elevene kan finne løsningen enklere med positive tall må motivasjonen for å bruke negative tall komme fra et annet sted enn et ønske om å gjøre det enklest mulig. Det blir derfor viktig å tenke over hva målet med oppgaven er. Er målet å løse problemet enklest og fortest mulig, eller skal man utvikle resonnering rundt negative tall? Hvis elever jobber med slike oppgaver alene er sannsynligheten stor for at fokuset ligger på å finne løsningen på problemet enklest mulig. Dette kan innebære at elevene ikke involverer negative tall i det hele tatt (Kilhamn 2011). I det historiske tilbakeblikket kom det frem at matematikere unngikk å bruke de negative tallene så lenge det var mulig, og det viser seg at dette fremkommer blant elevene også i dagens skole.

I følge Gallardo (2003) blir det meningsløst å bruke regnestykker med positive tall for å løse en tekstoppgave som omhandler negative tall som i eksemplet ovenfor. Et slikt regnestykke vil ikke svare til opplysningene i tekstoppgaven og derfor mener Gallardo at denne fremgangsmåten ikke gir mening. Kilhamn (2011) mener derimot ikke at denne fremgangsmåten er meningsløs, men skriver at det å forvente at elevene velger en mer komplisert fremgangsmåte når oppgaven enkelt kan løses med naturlige tall er det samme som å undervurdere deres evner til å resonnere matematisk.

Etter en gjennomgang av hvordan lærebøker behandler negative tall ser det ut til at konteksten har en tendens til å bli brukt i en konstruert måte som kan svekke nytteverdien av negative tall i matematikk (Whitacre et al., 2011). I lys av historien til negative tall kan det være verdt å revurdere hvordan man bruker kontekster i undervisningen av negative tall. Til slutt godtok man negative tall ut i fra rent matematiske termer og ikke på grunn av et forhold til reelle mengder eller at de ga mening i en kontekst. Motstanden for negative tall ble mindre når man betraktet de negative tallene som abstrakte og formelle tall og når man innså at negative tall var nyttige for å løse matematiske problemer. Disse matematiske problemene, hvor negative tall var nyttige verktøy i løsningsprosessen, var dog ikke matematiske problemer med hverdagslige kontekster slik som de vi møter i dagens lærebøker (Whitacre et al., 2011). Nødvendigheten av de negative tallene er derfor vanskelig å se ut i fra slike kontekster som brukes i dagens lærebøker, og Thomaidis (i Kilhamn, 2011, s. 14) skriver i samsvar med Whitacre et al. (2011) at:

> "…the various concrete models employed … are not convincing enough for the necessity of these numbers. Students know quite well that they can work out the difference between two temperatures or determine the position of a moving point on an axis without having to resort to the operations between negative numbers".

I følge sitatet ovenfor kommer det frem at Thomaidis mener det er vanskelig å se nødvendigheten av de negative tallene, og elever vet godt at en temperaturkontekst kan løses kun ved bruk av positive tall. Arabernes inngang til de negative tallene var som tidligere nevnt et ”pent” system som opprettholdes etter logikk, og dette kan anses som en mer meningsfull måte å innføre de negative tallene på i stedet for å bruke hverdagslige kontekster der de negative tallene egentlig er meningsløse.

2.5 Utfordringer ved læring av negative tall

Tidligere forskning viser at negative tall er et tema som byr på store utfordringer for mange elever og dette gjelder både konseptualisering av begrepet og utføring av operasjoner med de negative tallene (Gallardo 2002; Vlassis 2004, 2008). I skolen er negative tall et av de første matematiske objektene elevene møter som ikke kan bli representert fysisk, og siden tallene ikke kan konkretiseres og observeres er man nødt til å fatte tallene i tanken og ikke med sansene (Freudenthal, 1983). Dette krever en abstrahering av begrepet tall, og vanskeligheter knyttet til negative tall har en lang historie nettopp på grunn av deres abstrakte natur. De fortsetter å være utfordrende slik de alltid har vært gjennom historien, og en av årsakene til at man tidligere ikke ville akseptere de negative tallene var fordi de var så abstrakte og uobserverbare og dette er fortsatt utfordrende i dagens skole. Det er viktig å avdekke ulike typer utfordringer som oppstår i undervisningen av et emne, og for å beskrive utfordringer knyttet til læring av negative tall bruker flere forskere tre kategorier av utfordringer (Altiparmak & Özdoan, 2010). Den første kategorien handler om utfordringer knyttet til retningen og mengden til tall. Den andre handler om vanskeligheter med hensyn til betydningen av aritmetiske operasjoner, mens den tredje er knyttet til utfordringer med betydningen av minustegnet. Jeg vil videre ta for meg disse tre kategoriene i hvert sitt delkapittel.

2.5.1 Tallenes retning og mengde

> Simultaneously understanding that -5 is, in one sense, more than -1 and, in another sense, less than -1 is at the heart of understanding negative numbers.
>
> *Ball 1993*

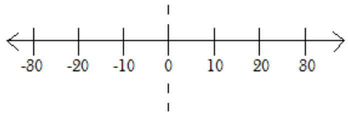
Begrepet *mengde* vil være sammenfallende med begrepet absoluttverdi og utgjør den numeriske verdien til tallet uten hensyn til fortegnet (Kilhamn, 2011). Dette betyr at mengden og absoluttverdien til for eksempel både 2 og -2 vil være lik 2. Mengde og absoluttverdi kan også defineres som avstanden til origo på ei tallinje. Tallenes *retning* omhandler ordning og rekkefølge av tall og innebærer at tall som er plassert lengre til høyre på linjen er større enn tall som er plassert til venstre på linjen. I følge Altiparmak & Özdoan (2010) er det å kunne tolke tallenes mengde og retning helt avgjørende og det viktigste steget for læring av negative tall. Ball (1993) påpeker også viktigheten av tallenes mengde og retning ved å si følgende: "Evnen til å kunne forstå at -5 i en forstand er mer enn -1, og at det i en annen forstand er mindre enn -1, ligger i hjertet av å kunne forstå negative tall" (min oversettelse). Det er vanskelig for elever å skille mellom mengde og retning, og dette har også vært utfordrende for tidligere matematikere:

> Mathematicians of old struggled with the distinction between magnitude and order that arises with negatives: There is a sense in which -7 is more than 3; however, it comes before 3 on the number line, and we use the term *less than* to refer to this relationship. Children encounter these same issues when introduced to negative numbers. (Whitacre et al., 2011)

Her står det at tallet -7 har en større mengde enn tallet 3, men -7 kommer før 3 på tallinjen siden tallet er plassert lengre til venstre på tallinjen og er derfor mindre enn 3. For å referere til relasjoner med retning og orden sier vi at -7 er mindre enn 3. Skulle vi derimot ha referert til relasjoner med mengden ville -7 blitt større enn 3. Dette fører til utfordringer som vi ikke har møtt i arbeid med naturlige tall, og årsaken til det er følgende:

> When negative numbers enter the scene the natural numbers become positive, and both types of numbers have magnitude and direction. For positive numbers these size properties coincide, but for negative numbers they diverge. Kilhamn (2011, s. 40)

Både positive og negative tall innehar retning og mengde, og i sitatet ovenfor står det at mengde og retning vil ha sammenfallende egenskaper for positive tall, men for negative tall vil de være avvikende. For å utdype hva som menes med dette vil jeg bruke en illustrasjon av ei tallinje:



Figur 3: Tallinje

På ei tallinje vil bevegelse mot høyre alltid indikere at tallet blir større, mens bevegelse til venstre vil indikere at tallet blir mindre. Altså, jo lengre til høyre på tallinjen du er, jo større er tallet. Når vi holder oss på den positive siden av tallinjen vil mengde og retning oppføre seg i samsvar med hverandre. Hvis vi beveger oss i retning høyre vil tallet bli større, og mengden vil øke (for eksempel fra 10 til 30). Beveger vi oss i retning venstre vil mengden minke (fra

30 til 20), og tallet blir mindre. Gjør vi det samme på den negative siden av tallinjen vil vi derimot se at disse egenskapene blir mer kompliserte, og at mengden og retningen oppfører seg omvendt i forhold til hverandre. Hvis vi nå beveger oss til høyre vil fortsatt tallet bli større, men mengden minker (for eksempel fra -30 til -10). Hvis vi beveger oss til venstre vil mengden øke, men tallet blir mindre (fra -10 til -20). Når vi er på den negative siden av tallinjen vil bevegelse i retning høyre fortsatt tilsvare at et tall blir større, men det som blir utfordrende er at dette ikke lengre tilsvarer at mengden også øker. Hvis vi beveger oss fra -20 til -10 vil tallet bli større samtidig som mengden blir mindre. Hvis vi beveger oss i retning venstre vil tallene bli mindre, men dette innebærer nå at mengden øker. For eksempel så vil -30 være et mindre tall enn -10, samtidig som mengden 30 er større enn mengden 10. Det som kan være forvirrende er at et negativt tall med stor mengde blir betraktet som mindre enn et negativt tall med liten mengde. Et eksempel på dette er tallene 1 og 45, der 45 betraktes som større enn 1. Hvis vi derimot bruker de samme mengdene som negative tall, vil -1 bli betraktet som større enn -45.

I en studie gjort av Bofferding (2010) viste det seg at ved et regnestykke som -8 + 4 var flere av elevene usikre på om de skulle fokusere på å flytte til høyre på tallinjen eller om de skulle ende opp med en større absoluttverdi. Når man opererer med naturlige tall resulterer addisjon i et tall som er større enn begge addendene, og dette kan illustreres ved at man beveger seg lengre til høyre på tallinjen (Bofferding 2010). Hvis det derimot er negative tall vi jobber med og adderer et mindre positivt tall til et større negativt tall (for eksempel -7 + 3) vil dette resultere i et større tall lengre til høyre på tallinjen, men resultatet vil ha en mindre absoluttverdi (4 er mindre enn 7). Hvis vi adderer to negative tall (for eksempel -2 + -5) vil dette resultere i et tall med større absoluttverdi, men som er lengre til venstre på tallinjen. Dette betyr at også addisjon og subtraksjon med negative tall blir utfordrende på grunn av egenskapene til tallenes retning og mengde.

To andre begrep som er tett knyttet til begrepene mengde og retning er kardinalitet og ordinalitet. Dette er begreper som opprinnelig brukes i forbindelse med positive tall, men Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre & Schappelle (2013) utvider i sin studie definisjonene av disse begrepene til å gjelde også for negative tall. Kardinalitet og ordinalitet kan beskrives som to forskjellige måter å forstå tall på, og begge er viktige for at elever skal kunne resonnere dekkende om negative tall (Bishop et al., 2013). Ideen om ordinalitet er et grunnleggende prinsipp for tallinja og ordning av tall. En ordinal forståelse av tall kan forbindes med begreper som *foran* og *etter* samt *mindre* og *større*, og at man blant annet kan sortere etter størrelse eller rekkefølge på tallinjen. For eksempel vil man forstå at -3 er tallet som er større enn -4, men mindre enn -2 (Bishop et al., 2013). En kardinal forståelse av tall innebærer å oppfatte for eksempel en mengde, størrelse eller mengdeantall. Denne måten å forstå et tall på er knyttet til nummerering, telling og ideen av en mengde (Bishop et al., 2013). Ut i fra disse definisjonene kan vi si at kardinalitet sammenfaller med begrepet mengde, mens ordinalitet sammenfaller med begreper som retning og størrelse på grunn av at man tar hensyn til at tallene er i en ordnet rekkefølge.

Bishop et al. (2013) påpeker at den kardinale og ordinale måten å forstå tall på er like viktige og at man ikke kan si at den ene måten er bedre enn den andre. Forfatterne mener at begge er nødvendige for at elevene skal kunne resonnere tilstrekkelig om negative tall, og ulike syn på tall kan påvirke elever til å resonnere omkring negative tall i enda større grad. Bishop et al. (2013) poengterer dette med å presentere to forskjellige oppgaver der den ene enkelt kan løses med en kardinal forståelse, mens den andre kan løses med en ordinal forståelse. Oppgavene var følgende: $-7 - \square = -5$ og $-9 + 5 = \square$. Den første oppgaven ble av en elev løst på følgende måte:

> Well this one I need little cubes. (Child counts out a stack of 5 cubes. Then child takes 2 more cubes.)…[It] would be like real numbers, but just add the minus sign…You just do 7 plus, well actually, 7 minus 2 equals 5. That's the answer for real numbers. So I just added a negative to all of them, and there is my answer. (Bishop et al., 2013, s. 4)

Forfatterne beskriver at eleven i denne episoden bruker en kardinal forståelse siden han behandler -5 og de andre negative tallene som tellbare objekter og mengder, og han bruker terninger for å illustrere mengdene. I den andre oppgaven ville det derimot blitt vanskeligere å benytte den samme strategien siden den inneholder både et negativt og et positivt tall, og forfatterne skriver at flere elever brukte i stedet en ordinal forståelse for å løse oppgaven. Dette gjorde de ved å bruke en tellestrategi hvor de tok i bruk en numerisk rekkefølge som de telte opp eller ned på for å løse problemet (Bishop et al., 2013). I denne oppgaven tilsvarer det at elevene i stedet for å se på -9 som en gruppe objekter heller så på -9 som posisjonen mellom -10 og -8. De så på tallet som et nummer i en sekvens, og deretter telte de oppover til de hadde addert 5:

> Negative 9 plus 1 [child raises one finger] would be negative 8. Plus 2 is negative 7 [child raises a 2nd finger], plus 3 is negative …, negative 6 [child raises a 3rd finger], plus 4 is negative 5 [child raises a 4th finger], and plus 5 is negative 4 [child raises a 5th finger]. (Bishop et al, 2013, s. 4)

Disse to oppgaveeksemplene viser at ulike typer forståelse for tall kan støtte ulike måter å resonnere på. Bishop et al (2013) skriver at oppgaver om negative tall kan bli vanskeligere eller lettere å løse alt etter om man bruker en kardinal eller ordinal forståelse av tall. Dette betyr at det blir viktig for elever å lære å resonnere med utgangspunkt i både tallenes kardinalitet og ordinalitet.

2.5.2 Aritmetiske operasjoner med negative tall

> Students learn early in school that "you can't take away a larger number from a smaller number," and later they must tear down and reconstruct their cognitions.
> *Goldin & Shteingold (2001)*

I dette delkapitlet vil jeg ta for meg noen aspekter omkring de aritmetiske operasjonene addisjon og subtraksjon med negative tall. Multiplikasjon og divisjon vil ikke bli omtalt i denne studien siden mitt datamateriale omhandler kun de aritmetiske operasjonene addisjon og subtraksjon.

I følge læreplanen i matematikk skal elevene etter fjerde årstrinn kunne bruke positive og negative heltall, og etter sjuende årstrinn skal de kunne regne med disse tallene (Utdanningsdirektoratet, 2014). Flere forskere har kritisert rekkefølgen elever møter ulike matematiske temaer på og mener de negative tallene blir introdusert for sent. Dette kan føre til at elevene danner seg misoppfatninger, og et eksempel på dette er at elevene tidlig lærer at det ikke går an å subtrahere et større tall fra et mindre tall. Når de da omsider blir introdusert for negative tall blir de nødt til å rive ned og rekonstruere sin kunnskap (Goldin og Shteingold 2001). Et annet eksempel på samme aspekt finner vi i en studie gjort av Selter, Prediger, Nührenbörger & Huβmann (2011). Der blir ei jente presentert for regnestykket 70 – (-50) = 120, og hun reagerer ved å si: " This can't be true. If you take away something, the solution can't be bigger". Når negative tall blir innført vil egenskapene til de negative tallene kunne komme i strid med det elevene allerede kan om naturlige tall, og elevene kan forsøke å tilpasse de negative tallene til sine forestillinger om naturlige tall (Vlassis, 2004). I episoden ovenfor ser vi at jenta har en forutsetning om at subtraksjon alltid fører til et mindre tall, og hun forsøker å overføre sin kunnskap om kalkulasjoner med positive tall til utregning med negative tall. Det hun allerede kan om subtraksjon med positive tall vil komme i strid med subtraksjon av negative tall. Prather & Alibali (2008) stiller i sin studie spørsmål om hvordan mennesker tilegner seg kunnskap om aritmetiske prinsipper med negative tall, og en måte å gjøre dette på viser seg å være at man overfører prinsipper fra operasjoner med positive tall til regning med negative tall, og dette er i samsvar med eksemplet med jenta ovenfor. Addisjon vil ikke lengre føre til at et tall nødvendigvis blir større, og på samme måte vil ikke lengre subtraksjon føre til at et tall nødvendigvis blir mindre etter at de negative tallene er innført.

”Pluss og pluss blir pluss, pluss og minus blir minus, minus og pluss blir minus og minus og minus blir pluss”. Dette kan for de fleste være kjente regneregler for addisjon og subtraksjon med positive og negative tall. Noen lærebøker formulerer dette som at ”like tegn blir pluss” og ”ulike tegn blir minus”, og noen ganger blir regnereglene også presentert med symboler slik som dette:

1. + (+) = +
2. + (-) = –
3. - (+) = –
4. - (-) = +

Addisjon og subtraksjon med negative tall kan innføres på ulike måter. I lærebøkene jeg har hentet oppgaver fra til min studie brukes lignende regneregler som de ovenfor, samt regnefortellinger med penger og temperatur som kontekst. I denne studien legger jeg som nevnt vekt på tekstoppgaver med temperatur som kontekst, og derfor vil jeg videre gjøre rede for addisjon og subtraksjon i denne konteksten.

Med temperatur som kontekst vil det være naturlig for elevene å forestille seg et termometer, og dette kan sies å være ei vertikal tallinje. Addisjon av et negativt tall kan ut i fra reglene ovenfor tolkes til å være det samme som å subtrahere et positivt tall på denne måten: 3 + (-2) = 3- 2, men dette kan ikke representeres på et termometer og i en temperaturkontekst siden temperaturen ikke kan stige med et negativt antall grader (Kilhamn, 2009). Termometeret som representasjon dekker derfor ikke addisjon av negative tall av typen a + (-b) = a – b, da dette blir en meningsløs operasjon i en temperaturkontekst. En annen utfordring som kan oppstå med bruk av denne konteksten er ved subtraksjonen (*a* – *b*). Denne subtraksjonen kan forstås som forskjellen mellom *a* og *b* eller som bevegelsen som trengs for å komme fra *a* til *b*. Når vi snakker om forskjellen mellom to temperaturer eller to punkter på ei linje tenker vi alltid på den forskjellen som en absoluttverdi. Et eksempel på dette er at forskjellen mellom de to tallene -4 og +6 alltid sies å være 10 og ikke negativ 10 (Kilhamn, 2009). Hvis vi skal forstå at 6 – (-4) og (-4) – 6 gir to forskjellige svar er vi nødt til å inkludere retning i våre betraktninger. Da vil det bli slik at 6 – (-4) = 10 fordi temperaturen *øker* fra -4 til 6, mens (-4) – 6 = -10 fordi temperaturen *minker* fra 6 til -4 (Kilhamn, 2009). Her er retningen fra *b* til *a* og dette tilsvarer retningen fra høyre til venstre i utrykket. Kilhamn (2009) beskriver dette som en ”unaturlig” retning siden vi ofte bruker den motsatte tolkningen der for eksempel (-4) – 6 vanligvis blir lest som ”fra minus 4 til seks”. Dette er en av årsakene til at retning har blitt identifisert som en av de kritiske egenskapene for å lære subtraksjon med negative tall (Kullberg i Kilhamn, 2009).

Jeg vil nevne to aspekter for å oppsummere hvilke utfordringer elevene kan møte ved addisjon og subtraksjon med negative tall. Det ene handler om at elevenes forestillinger som er knyttet til operasjoner med positive tall ikke nødvendigvis stemmer overens med regning med negative tall. Hvis man viderefører prinsipper for regning med positive tall til arbeid med negative tall uten å ta forbehold kan skape problemer. Det andre aspektet handler om at det er vanskelig å illustrere og konkretisere regnereglene for addisjon og subtraksjon med negative tall ved å bruke hverdagslige kontekster som for eksempel temperatur og gradestokk. Regning med negative tall kan dermed bli en rekke regler som elevene må pugge siden aritmetiske operasjoner med negative tall er så abstrakte at de blir vanskelig å illustrere og konkretisere.

2.5.3 Minustegnet

Jeg vil begynne dette delkapitlet med å presentere tre regnestykker hentet fra en artikkel av Lamb, Bishop, Philipp, Schappelle, Whitacre & Lewis (2012). Oppgavene ser slik ut:

1. $5 - 8 = \square$
2. $\square + 5 = -2$
3. Hvilken er størst, - - 4 eller -4?

Fellestrekket for disse tre oppgavene er at de alle inneholder symbolet ”–”, men det som kan være oppsiktsvekkende er at minustegnet i hver oppgave har ulike funksjoner og betydninger. Flere forskere antyder at dette fenomenet, minustegnets ulike funksjoner, kan være årsaken til at elever har vanskeligheter med negative tall (Gallardo & Rojano, 1994; Vlassis, 2004). Minustegnet har en trippel natur, og i en studie av Gallardo og Rojano (1994) blir det presentert en klassifisering av funksjonene et minustegn kan inneha. Inndelingen består av de tre gruppene *binære, unære* og *symmetriske* funksjoner.

Vlassis (2004,2008) har med utgangspunkt i denne inndelingen videreutviklet en mer omfattende modell for å demonstrere minustegnets multidimensjonalitet. Han har laget et kart over de forskjellige bruksområdene til minustegnet i elementær algebra og disse er:

Binær funksjon	Unær funksjon	Symmetrisk funksjon
Minustegnet indikerer operasjonen subtraksjon. Representerer handlinger knyttet til subtraksjon som å ta bort, finne forskjellen og forflytte seg på tallinjen.	Minustegnet er knyttet til et tall og indikerer at tallet er negativt.	Minustegnet indikerer en operasjon, men relaterer til handlingen "å ta det motsatte av et tall", også kjent som å finne den inverse.
Oppgave 1: 5 – 8 = □	**Oppgave 2**: □ + 5 = -2	**Oppgave 3:** Hvilken er størst, - - 4 eller -4?

Figur 4: Minustegnets triple natur. Tilpasset fra Vlassis (2008), Kilhamn (2011) og Lamb et al. (2012).

De tre oppgavene jeg presenterte i begynnelsen av dette delkapitlet representerer hver sin funksjon. I oppgave 1 har minustegnet en binær funksjon og indikerer operasjonen subtraksjon. Dette er den første bruken av symbolet som barn og elever møter (Lamb et al., 2012). I oppgave 2 har derimot tegnet en unær funksjon, og tegnet er knyttet til et tall og former dette til et negativt tall. Den siste oppgaven er et eksempel på tegnets symmetriske funksjon og innebærer "å ta det motsatte av et tall" (Vlassis, 2004,2008). Innenfor gruppeteori vil denne symmetriske funksjonen kunne relateres til å finne den inverse til et tall. I en gruppe G vil det alltid finnes et identitetselement e som er slik at for alle g i G vil det bli slik: $g * e= g =e * g$, der * er en binær operasjon. Samtidig vil det til enhver g i gruppen finnes et inverst element h slik at $g * h= e =h * g$. Hvis operasjonen er addisjon vil e være 0, slik at $g + 0= g =0 + g$, og den inverse vil være $-g$, og da blir det slik: $g + -g = e\ (0) = -g + g$. For eksempel er -3 den inverse verdien til 3 med hensyn på operasjonen addisjon.

Utfordringer som kan oppstå på grunn av at minustegnet innehar denne triple naturen er at elevene for eksempel kan forveksle hvilken betydning minustegnet har. I denne studien vil den binære og unære naturen til minustegnet være mest relevant der tegnet indikerer enten operasjonen subtraksjon eller at et tall er negativt. I noen regnestykker kan det oppstå at elevene er nødt til å bruke to minustegn i ett og samme regnestykke. Tegnene vil da ha ulike betydninger, og i et slikt tilfelle kan det være utfordrende å holde kontroll på hvilken funksjon hvert tegn indikerer.

3. Metode

En metode er en fremgangsmåte, et middel til å løse problemer og komme frem til ny kunnskap. Et hvilket som helst middel som tjener formålet, hører med i arsenalet av metoder.
Vilhelm Aubert 1985, s. 196

Hensikten med denne oppgaven er å belyse hva som kjennetegner elevers arbeid med oppgaver knyttet til negative tall og hvilke utfordringer elevene møter i omdannelsen mellom representasjoner av negative tall. For å undersøke dette har jeg vært ute i skolen og observert elever i arbeid med negative tall. Før jeg utførte denne datainnsamlingen var jeg nødt til å ta en del avgjørelser, og det var mange spørsmål omkring fremgangsmåten for å innhente data som måtte tenkes gjennom. Disse måtte betraktes i forhold til hva som skulle undersøkes og hvordan jeg kunne få et innholdsrikt datamateriale. I dette metodekapitlet vil jeg begrunne valg som jeg har tatt underveis og presentere hvordan jeg samlet inn datamaterialet.

3.1 Kvalitativ forskning og casestudie

Som kvalitative forskere kan vi finne noen svar, men ikke svaret.
Vivi Nilssen 2012. s. 33

I denne studien er det tre elevgrupper som har vært i fokus under datainnsamlingen, og jeg har valgt å utføre en casestudie. Forskningen i min oppgave kan sies å være innenfor en kvalitativ forskningsmetode, og Vivi Nilssen (2012) nevner en velbrukt definisjon som sier at kvalitativ forskning innebærer å utforske menneskelige prosesser i en virkelig situasjon. Årsaken til at jeg velger en kvalitativ tilnærming og casestudie, er fordi jeg vil gå i dybden på et matematisk fenomen og kunne analysere dette grundig. Sentrale kjennetegn ved et kvalitativt forskningsopplegg er at forskeren går i dybden på et smalt felt og konsentrerer seg om et mindre antall forskningsobjekter enn hva man gjør i et kvantitativt forskningsopplegg. Nilssen skriver at siden hver kvalitativ studie er unik vil også den analytiske tilnærmingen være unik. Dette medfører at vi som forskere utvikler metoder og prosedyrer for analyse og tolkning som er tilpasset den enkelte studien, og at forskeren preger utkommet av studien:

> I kvalitativ forskning er forskeren selv det viktigste instrumentet, fordi vi samler inn datamaterialet selv, vi konstruerer det i stor grad gjennom interaksjon med forskningsdeltakerne og det er vi som gjennomfører analyse og tolkning av det samme materialet (Nilssen 2012, s. 29).

Målet med den kvalitative forskningsmetoden er å få tak i andre menneskers handlinger, meninger, tanker og kunnskap, og vi vil ha tak i og tilgang til forskningsdeltakerens perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2009). For å få til dette vil jeg forsøke å gi en objektiv beskrivelse av observasjonene jeg gjør, men som Nilssen skriver i sitatet ovenfor så vil en kvalitativ analyse av materialet innebære at jeg også har en fortolkende rolle i analysen av datamaterialet. Derfor vil forskningen være påvirket av subjektive verdier.

Den kvalitative metoden kan være ressurskrevende og datatilfanget må begrenses for at det ikke skal bli for komplekst og uoversiktlig (Postholm & Jacobsen 2011). For å begrense datamaterialet slik at jeg kan gå i dybden på det har jeg valgt å observere tre grupper med to elever i hver gruppe i omtrent en skoletime hver. Det som ofte kjennetegner en kvalitativ forskningsmetode er at utvalget som forskes på ikke er representativt og at resultatet ikke kan generaliseres på grunn av det begrensete utvalget av personer som er med i undersøkelsen. Dette er også tilfellet for min studie, men selv om det er et begrenset utvalg av elever som blir observert i mitt forskningsprosjekt kan dette kvalitative forskningsarbeidet gi meg og andre lærere innspill til egen undervisning, og det kan tilpasses og overføres til flere klasserom hvis andre lærere gjenkjenner elementer og tendenser som belyses i denne studien.

3.2 Datainnsamling

For å samle inn data til studien min utførte jeg først en pilotundersøkelse og deretter observerte jeg og tok videoopptak av arbeidet til tre elevgrupper. Videre i dette kapitlet vil jeg utdype innsamlingsmetoden min ved å se nærmere på valg av skole og trinn og hvordan jeg utførte pilotundersøkelsen og observasjonen.

3.2.1 Valg av skole og trinn

Jeg bestemte meg tidlig for at jeg ville ut i skolen for å utføre en casestudie. Med negative tall som tema ønsket jeg å utføre datainnsamlingen hos et forholdsvis høyt klassetrinn som hadde jobbet med dette temaet fra før av slik at fokuset mitt ikke ble å undervise og instruere elever, men heller å belyse og gå dypere inn i et avgrenset område innenfor elevers arbeid med negative tall. I et av kompetansemålene etter 4. årstrinn står det at man skal kunne *bruke* positive og negative hele tall, mens etter 7. årstrinn står det at man skal kunne *regne* med positive og negative hele tall (Utdanningsdirektoratet 2014). På bakgrunn av dette siktet jeg meg inn på 6. trinn eller høyere slik at jeg var sikker på at elevene hadde erfaring med regning med negative tall.

Min veileder satte meg i kontakt med en tidligere masterstudent som kunne være behjelpelig med å skaffe tilgang til en skole. Siden jeg ikke hadde noen spesifikke kriterier til skolen tok jeg den første som sa ja til at jeg kunne komme og utføre innsamling av data. Jeg hadde ingen kjennskap til verken lærerne eller skolen fra før, men var takknemlige for at noen ville ta meg i mot siden dette ikke var noen selvfølge. Jeg kom med et ønske om å få utføre datainnsamlingen på 6. eller 7. trinn og av disse to var det en lærer på 7. trinn som sa ja til å ta i mot meg. I klassen til denne læreren var det 16 elever som i samråd med sine foreldre ga sitt samtykke til å være med i studien min. De godtok dermed at jeg tok videoopptak av elevenes arbeid med negative tall.

3.2.2 Pilotundersøkelsen

Første gang jeg var ute for å begynne med datainnsamlingen fikk elevene et oppgaveark. Dette oppgavearket var et redskap i min pilotundersøkelse, og elevene fikk svare individuelt og skriftlig. Jeg hadde bestemt meg for at det overordnete temaet for forskningsprosjektet mitt skulle være negative tall, men jeg visste ikke hvilket fokus jeg skulle ha innenfor dette temaet. Dette var hovedårsaken til at jeg valgte å gjennomføre en pilotundersøkelse, nettopp for å kunne bruke resultatene fra elevbesvarelsene til å se hva som var interessant og hva som var aktuelt å forske videre på. Piloten ble dermed et hjelpemiddel for å finne et mer avgrenset fokus og for å nærme meg et par forskningsspørsmål til videre datainnsamling.

I pilotundersøkelsen ønsket jeg å benytte anledningen til å teste ut ulike formuleringer og utforminger av oppgaver for å finne ut hva som kunne være interessant å fokusere videre på i hovedstudien, og jeg valgte derfor å ta i bruk nokså forskjellige oppgaver. Elevene fikk åtte oppgaver som omhandlet blant annet å fylle inn tallet som manglet i regnestykker, lage regnefortellinger, svare på tekstoppgaver og skrive regnestykket som passet til, samt å forklare fremgangsmåtene de brukte og hvordan de tenkte. Samtlige oppgaver omhandlet negative tall og jeg brukte ulike kontekster som for eksempel temperatur, penger og alder. Ved å ta i bruk ulike formuleringer og kontekster ønsket jeg å få bedre innsikt i hvordan elevene tenkte når de løste oppgavene, og samtidig skulle elevene få mulighet til å kunne ta i bruk ulike representasjoner og omdannelser. Oppgavearket i sin helhet ligger som vedlegg 1.

Mitt første møte med elevene var da jeg gjennomførte pilotundersøkelsen. Da fikk jeg presentert meg selv, mitt prosjekt og hva formål denne studien var, og elevene fikk stille spørsmål som de hadde omkring studien. Før elevene fikk arbeide med oppgavearket fortalte jeg at dette ikke var en slags test eller prøve, men at de bare skulle svare etter beste evne. At elevene fikk delta i denne pilotundersøkelsen kan ha bidratt til å gjøre dem mer kjent med situasjonen og til å ufarliggjøre settingen i større grad til de senere skulle bli filmet. Elevene fikk erfare hvilke typer oppgaver som ville komme og hva jeg ville spørre etter, og i tillegg fikk de muligheten til å bli litt kjent med meg og stille spørsmål. Dermed kunne vårt neste møte være mer forutsigbart og tryggere for elevene enn om vi ikke hadde møttes på forhånd.

I etterkant av pilotundersøkelsen studerte jeg datamaterialet for å finne ut hvor veien skulle gå videre, og da var det spesielt én oppgave som fanget oppmerksomheten min. Dette var en tekstoppgave som innebar at elevene skulle komme frem til et regnestykke som var passende til oppgaven:

> *Temperaturen er 5 grader under null kl. 1 om natten og synker med 3 grader de neste tre timene. Hva er temperaturen kl. 4? Skriv regnestykket som passer til oppgaven.*

Omtrent halvparten av elevene kom frem til det riktige svaret, -8, men det som var interessant var de ulike representasjonene elevene tok i bruk da de satte opp regnestykket. Noen eksempler på de ulike løsningene er:

- 5 – 3 = - 8
- 5 + -3 = -8
- 5 + 3 = - 2
- 5 + 3 = 8, men skriver at svaret er -8.
- 5 – 3 = 2, men skriver at svaret er -2.
- 5 – 3 = 2
- 9 + -5 = -14
- 5 – 9 = - 14

Oppgaven resulterte i mange forskjellige fremgangsmåter og svar, og dette gjorde meg interessert i å forske videre med lignende oppgaver i hovedstudien min for å finne ut mer om elevers arbeid med negative tall og omdannelser mellom tekstoppgaver og symbolrepresentasjoner. Pilotundersøkelsen ga meg et inntrykk av hvordan elevene arbeidet med oppgavene, og erfaringene jeg satt igjen med ble brukt til å formulere forskningsspørsmål og til å planlegge og fastsette rammene for den videre datainnsamlingen; observasjon og videoopptak av gruppearbeid.

3.2.3 Observasjon

For å begrense omfanget på datamaterialet slik at det skulle bli mulig å gå i dybden på det valgte jeg å observere tre grupper med to elever i hver gruppe. De seks elevene ble valgt i samråd med klassens lærer, og kriteriene for utvelgelsen var at elevene måtte være muntlig aktive og at de kunne samarbeide i arbeidet med oppgavene. Dette var for å sikre meg et best mulig datamateriale. Ved å la elever jobbe sammen i par kunne jeg observere deres diskusjoner underveis i arbeidet med negative tall og dermed få større tilgang til elevenes språk og resonnement. Jeg ønsket å ha små grupper for å unngå flere grupperinger innenfor gruppen, samtidig som jeg ville at hele gruppen skulle samarbeide gjennom prosessen.

Jeg fikk tildelt et møterom på skolen hvor jeg kunne observere gruppene i arbeid, og hver gruppe var inne i 30-45 minutter hver. Jeg tok videoopptak av gruppearbeidet samtidig som jeg noterte litt underveis, og jeg samlet inn elevenes notatark til slutt. Disse komponentene er grunnlaget for datamaterialet mitt. Videoopptaket sørget for at jeg fikk med det meste som foregikk av både dialoger og annen form for kommunikasjon som for eksempel kroppsspråk, og opptaket gjorde det mulig for meg å transkribere disse dialogene i etterkant slik at jeg videre kunne bruke de i analysearbeidet.

Som jeg nevnte tidligere vil en kvalitativ forsker prøve å få tak i andre menneskers handlinger, meninger og perspektiv, og i denne studien ville jeg ha tak i elevenes arbeid med oppgaver om negative tall. I lys av Golds grunnleggende observatørroller (i Postholm og Jacobsen, 2011, s. 52) kan jeg sies å være en deltakende observatør, da jeg valgte å spørre om utdypninger hvis elevene uttrykte seg uklart, eller ba de om å forklare seg ytterligere og sette ord på sin tankegang. Elevene fikk til sammen fire oppgaver, og de fikk jobbe med én oppgave om gangen slik at jeg bestemte når de skulle gå videre på neste oppgave. Jeg leste oppgavene muntlig og i tillegg fikk de dem skriftlig. Jeg ønsket at elevene skulle komme frem til et regnestykke som de mente passet til tekstoppgaven, og derfor ble flere av spørsmålene jeg stilte rettet mot at elevene skulle komme frem til dette og ikke bare et svar. Ved å være en deltakende observatør fikk jeg større innsikt i elevenes handlinger og meninger ved at jeg kunne be de utdype svarene sine, og dette ville jeg ikke fått tilgang på hvis jeg hadde vært en fullstendig observatør. Samtidig vil en deltakende observatør kunne påvirke elevene med det han sier og gjør, og ved å stille elevene spørsmål er det ikke utenkelig at deres svar blir formet ut fra dette. Et eksempel på dette er at elevene kan prøve å gi meg det svaret som de tror jeg er ute etter. Jeg vil påpeke at observasjoner jeg gjorde formes etter hva jeg så og hvordan jeg tolket de forskjellige situasjonene, og det samme elevarbeidet kunne derfor ha blitt observert annerledes hvis det hadde vært en annen person enn meg som var observatør. Jeg vil bruke transkripsjoner for å underbygge mine påstander i analysen og dette gjør det mulig for leseren å gjøre egne tolkninger.

3.3 Oppgavene

De tre elevgruppene i studien fikk jobbe med fire oppgaver om negative tall. Dette var tekstoppgaver som jeg hentet fra tilfeldige matematikkverk, og samtlige oppgaver hadde temperatur som kontekst. Grunnen til at jeg valgte å bruke tekstoppgaver var fordi pilotundersøkelsen viste at tekstoppgaver om negative tall var utfordrende for elevene, og spesielt overgangen fra en tekstoppgave til et symbolsk uttrykk skapte vanskeligheter for elevene. I tillegg brukes tekstoppgaver mye i lærebøker og i matematikkundervisning, og selv om negative tall er svært abstrakt og vanskelig å konkretisere med kontekster brukes tekstoppgaver også i innlæringen av negative tall. Årsaken til at jeg valgte temperatur som kontekst er at dette er en av de vanligste representasjonene som brukes for å illustrere negative tall (Kilhamn 2011). Dette betyr at en stor del av oppgavene elevene får i dette emnet på skolen vil være tekstoppgaver i nettopp denne konteksten. I pilotundersøkelsen ga spesielt denne typen oppgave interessante svar og flere forskjellige løsningsmetoder og dette var også en av grunnene til at jeg valgte akkurat denne utformingen av oppgavene. De tre første oppgavene er nokså like mens den fjerde oppgaven skiller seg ut fra de andre ved at den inneholder en tabell med stedsnavn og temperaturer som elevene er nødt til å bruke for å løse de tilhørende deloppgavene. Jeg vil presentere disse oppgavene nærmere i analysekapitlet der jeg vil analysere hver enkelte oppgave og se på blant annet hvilket potensial oppgavene innehar.

3.4 Analysemetoder

Etter datainnsamlingen tok jeg for meg videoopptakene av hver gruppe og transkriberte dialogene som fant sted. Etterpå skrev jeg ut transkripsjonene og leste gjennom datamaterialet flere ganger mens jeg noterte stikkord og tanker underveis. Med forskningsspørsmålet i bakhodet studerte jeg datamaterialet mitt og etter hvert begynte jeg å se etter forskjellige kjennetegn og utfordringer i elevarbeidet. Nilssen (2012, s. 78) skriver at koding og kategorisering av datamaterialet er kjerneaktiviteter i den kvalitative analyseprosessen og at forskere starter prosessen med en åpen koding av datamaterialet. Åpen koding betyr å identifisere, kode, klassifisere og sette navn på de viktigste mønstrene i materialet (Nilssen, 2012, s. 82). Ideen om åpen koding kommer fra forskningsmetoden ”grounded theory” (forankret teori), og hovedideen bak denne metoden er å utvikle nye teoretiske ideer som har basis i datamaterialet. Dette kan omtales som en induktiv tilnærming til datamaterialet og er motsetningen til den deduktive tilnærmingen der man i større grad tester teorier (Nilssen, 2012). Mitt analysearbeid kan plasseres innenfor en induktiv tilnærming siden jeg utvikler egne kategorier ut i fra datamaterialet jeg har tilgjengelig i stedet for å bruke ferdige kategorier og inndelinger. Av og til kan datamaterialet være svært komplekst ved en kvalitativ studie, og det å redusere, forenkle og få mening ut av denne kompleksiteten er utfordringen i kvalitative studier med en induktiv tilnærming. Det første steget blir å redusere datamaterialet til noen få temaer eller kategorier som bevarer essensen i datamaterialet (Nilssen, 2012). Da er det viktig å se sammenhenger mellom kodene man har slik at kategoriene man utvikler kan gi svar på forskningsspørsmålet.

Ved å transkribere og studere datamaterialet mitt har jeg identifisert tre hovedkjennetegn i elevenes arbeid med tekstoppgaver knyttet til negative tall og temperatur. De tre kjennetegnene for elevenes arbeid med tekstoppgavene i min studie var følgende:

- Elevene brukte tallinje og gradestokk.
- Elevene brukte positive tall.
- Elevene fant svaret først ut i fra konteksten og forsøkte deretter å tilpasse det symbolske uttrykket til det.

De to første kjennetegnene jeg nevner oppstår på grunn av oppgavens formulering, men det tredje oppstår først når jeg spør elevene om de kan sette opp et regnestykke som kan brukes for å løse oppgaven. I arbeidet med omdannelse fra tekstoppgave til en representasjon med symboler identifiserte jeg også noen utfordringer som elevene møtte. Med utgangspunkt i mitt datamateriale og utfordringer med negative tall som tidligere forskere har omtalt, har jeg kommet frem til to hovedutfordringer som fant sted da elevene arbeidet med omdannelser fra en tekstoppgave til en representasjon med symboler. Disse var følgende:

- Utfordringer knyttet til tolkning av begreper.
- Utfordringer knyttet til negative tall.
    - Mengde og retning.
    - Egenskaper ved addisjon og subtraksjon.
    - Tolkning av minustegnet.

Den første går ut på at omdannelsen krever at elevene tolker begrepene i tekstoppgavene for å finne ut hvilke operasjoner oppgaven handler om, og den andre typen handler om utfordringer som oppstår rett og slett fordi det er negative tall man jobber med. Ved å se på mitt datamateriale så jeg at utfordringene elevene sto ovenfor kunne tolkes til å være i stor grad de samme utfordringene som er blitt nevnt i tidligere forskning. Altiparmak og Özdoan (2010) nevnte i sin forskning tre kategorier av utfordringer som var vanlig å knytte til negative tall, og disse omhandlet mengde og retning, egenskaper ved addisjon og subtraksjon og tolkning av minustegnet. Siden utfordringene jeg fant i mitt datamateriale har likhetstrekk og tilknytning til disse kategoriene vil jeg bruke disse tre som underkategorier til kategorien om utfordringer knyttet til negative tall. Omfanget av de ulike kjennetegnene og utfordringene jeg fokuserer på i analysen vil variere. Noen vil være mer utbredt enn andre i datamaterialet, men jeg presenterer både de som forekom ofte og de som forekom bare en eller to ganger. Siden dette er en kvalitativ analyse med få deltakere vil også disse sjeldne utfordringene være relevante og viktige for at jeg skal kunne nærme meg et svar på forskningsspørsmålet mitt.

I analysen vil jeg bruke deler av Duvals (2004, 2006) teori om transformering av semiotiske representasjoner som analyseverktøy. Det vil være viktig å se på omdannelser mellom representasjoner og ulike semiotiske systemer siden alle matematiske objekter må jobbes med innen flere systemer (Duval, 2004; 2006). Elevene vil bli presentert for oppgavene i det semiotiske systemet naturlig språk, og jeg vil spørre dem om å representere oppgavens innhold med symboler i form av et regnestykke. Dette vil innebære at de også skal jobbe innenfor et notasjonssystem, og i analysen vil jeg være interessert i omdannelsen mellom disse to systemene. I analysen vil jeg se på kjennetegn og utfordringer som elevene møter i dette arbeidet og da vil jeg være spesielt interessert i å se etter representasjoner som elevene bruker.

Jeg vil bygge opp analysen slik at jeg tar for meg de tre kjennetegnene og de to utfordringene hver for seg. Disse 5 kategoriene vil utgjøre hvert sitt delkapittel. I analysen vil ikke nødvendigvis alle kategorier ha like stor tilknytning til Duvals (2004,2006) teori, og derfor vil ikke han knyttes inn i alle kategoriene jeg presenterer i analysen. For å belyse de ulike kategoriene vil jeg presentere utdrag fra elevbesvarelsene. Når jeg presenterer disse vil jeg kalle de tre gruppene for henholdsvis A, B og C og gruppenavnet preger første bokstav i pseudonymene slik at man lett skal kunne huske hvilken gruppe utdraget er hentet fra. Elevenes navn i hver gruppe blir derfor følgende:

- Gruppe A: Anne og Anders
- Gruppe B: Berit og Bjørn
- Gruppe C: Cathrine og Christian

Jeg vil først presentere en analyse av de fire oppgavene elevene arbeidet med, og etterpå presenteres analysen av elevarbeidet. I analysen av elevarbeidet fokuserer jeg på de tre kjennetegnene og de to utfordringene som jeg nevnte ovenfor.

3.5 Etiske retningslinjer og metodekritikk

Før jeg begynte å samle inn data sendte jeg ut et skriv til de foresatte i klassen der jeg fortalte om studien min og ba om tillatelse til å ta videoopptak av elevene. Jeg forklarte hva dette skulle brukes til og hvem som ville få se opptakene slik at både elevene og de foresatte visste hva det innebar å delta og hvilket formål jeg hadde. For å ivareta en etisk tilnærmelse og for å unngå at materialet kan spores tilbake til deltakerne i undersøkelsen vil jeg anonymisere skolens navn og ta i bruk pseudonymer på elevene jeg referer til.

Da jeg gjennomførte datainnsamlingen fikk alle gruppene først en oppvarmingsoppgave. Formålet med denne var å la elevene venne seg til omgivelsene og kameraet, og jeg ønsket at denne skulle bidra til å ufarliggjøre situasjonen for dem og gi dem mestringsfølelse, samt gjøre elevene mindre sjenerte. Oppgaven gikk ut på at de skulle fylle inn tallene som manglet i tre ulike tallpyramider, og elevene begynte å diskutere med en gang de fikk oppgaven. Selv om elevene ble tatt ut av klasserommet og filmet, prøvde jeg å gjøre situasjonen så naturlig og kjent som mulig for elevene. At de fikk jobbe sammen i par med oppgaver som var hentet fra lærebøker mener jeg kunne bidra til dette, siden det er en setting de er vant til fra før. At de ble tatt ut av klasserommet, filmet og hadde meg som ”lærer” var likevel nytt for dem, og det er derfor mulig at den nye situasjonen påvirket elevene og dermed også datamaterialet, selv om jeg forsøkte å legge til rette for en situasjon elevene skulle føle seg kjent og komfortabel med.

En annen faktor som også kan ha påvirket elevene og datamaterialet er hva jeg gjorde og sa underveis i min rolle som deltakende observatør. Som jeg nevnte tidligere var det elevenes arbeid, i minst mulig grad påvirket av meg jeg ville samle inn, men i kvalitative studier er det ikke uvanlig at forskeren preger utkommet av studien og jeg kan ikke se bort i fra at det også kan være tilfellet i min studie. Jeg kan ha foretatt selektive observasjoner ved at jeg har fokusert på enkelte situasjoner og oversett andre, og disse vil igjen være påvirket av min analyse og tolkning.

I studien min er datamaterialet basert på arbeidet til seks elever, og siden utvalget av elever er så lite fører det til at jeg ikke har et representativt utvalg av befolkningen. Dette betyr, som nevnt tidligere, at jeg gjennom denne kvalitative forskningen ikke kan generalisere mine funn.

4. Analyse av oppgavene

I dette kapitlet vil jeg presentere de fire oppgavene som elevene fikk arbeide med. Jeg vil blant annet ta for meg hvilket potensial de ulike oppgavene har og hvilke representasjoner de legger til rette for. Jeg vil også presentere regnestykker som er passende til tekstoppgavene. Samtlige oppgaver er som nevnt tekstoppgaver som handler om temperatur, og de er hentet fra ulike læreverk på forskjellige trinn. Siden temperatur er konteksten i alle oppgavene vil en del av analysen være felles for alle oppgavene og dette vil jeg presentere først. Deretter presenteres en analyse av hver oppgave.

Det første som er felles for alle tekstoppgavene er som nevnt temperaturkonteksten. Språket vi bruker i forbindelse med temperatur vil ofte inneholde begreper som *kaldere, varmere, stiger, synker, under* og *over* og i tekstoppgavene med denne konteksten blir man derfor nødt til å tolke hvilken operasjon de ulike begrepene indikerer. Om man skal bruke addisjon eller subtraksjon blir et avgjørende spørsmål, og tolkning av begrepene vil være viktig i prosessen fram mot en løsning. I noen av oppgavene spørres det etter *forskjellen* mellom to temperaturer, og dette begrepet vil være mer entydig og trenger ikke tolkes på samme måte som typiske ”temperaturbegrep” som *varmere* og *kaldere*. Ordet *forskjell* er et ord som er mer vanlig å bruke i matematikken og dette begrepet er, i motsetning til temperaturbegrepene jeg nevnte ovenfor, i større grad også brukt i andre kontekster som blant annet penger og alder.

Temperaturkonteksten i oppgavene åpner i stor grad opp for at elevene kan bruke representasjonen tallinje eller gradestokk. Mange av elevene kjenner til gradestokken fra hverdagslivet og den vil være aktuell som en representasjon i samtlige oppgaver. Ei tallinje vil legge til rette for at man kan bruke en ordinal forståelse av tall siden den presenterer tallene i en ordnet rekkefølge. Dette kan elevene bruke i arbeidet med oppgavene.

Tekstoppgavene åpner opp for at elevene kan bruke ulike representasjonssystemer og semiotiske representasjoner. Dette kan være blant annet figursystem (tallinje eller gradestokk) og symbolsystem (regnestykker). Oppgaven i seg selv er presentert innenfor representasjonssystemet naturlig språk og elevene kan bruke både skriftlig og muntlig språk videre i arbeidet med oppgaven. Ulike representasjoner fører til at man elevene er nødt til å utføre omdannelse mellom disse, og i oppgavene kan man for eksempel gå fra naturlig språk (konteksten i tekstoppgaven) til figurer (tallinje) eller til symbolspråk (regnestykke).

Hensikten med denne studien er blant annet å se hvordan elevene arbeider med omdannelsen fra en tekstoppgave til en symbolsk representasjon. Jeg valgte derfor å spørre elevene muntlig om de kunne sette opp et regnestykke som var passende til oppgaveteksten. Det er ingen av tekstoppgavene som instruerer elevene om å gjøre nettopp dette, og derfor vil dette være et spørsmål som jeg stiller elevene muntlig i hver oppgave for å få de til å komme frem til en representasjon med symboler.

4.1 Oppgave 1

Den første oppgaven elevene fikk jobbe med er hentet fra læreboken *Grunntall 10* (Bakke, 2007, s. 39). Denne boken er beregnet for 10. trinn, men siden jeg ville ha oppgaver med ulike formuleringer valgte jeg å ta den med selv om min undersøkelse var hos 7. trinn. Den første oppgaven så slik ut:

> På Dovre er det -33 ˚C. I Oslo er det 16 ˚C varmere. Hva er temperaturen i Oslo?

Et regnestykke som vil være passende til denne konteksten er -33 + 16 = -17. Da vil tallet -33 stå for temperaturen på Dovre, plusstegnet vil stå for begrepet varmere og 16 grader vil stå for antall grader varmere. Begrepet varmere vil indikere addisjon og bevegelse mot høyre på tallinjen, og siden det er snakk om temperatur i oppgaveteksten er det ikke utenkelig at elevene tar i bruk ei tallinje eller en gradestokk når de skal løse oppgaven. Ved ei horisontal tallinje kan man begynne på -33 og telle 16 grader bortover mot høyre (addisjon). Da vil man ende opp på -17 og når vi adderer et positivt tall til et negativt tall ser vi at mengden blir mindre samtidig som tallets verdi blir større. I dette tilfellet er mengden -33 større enn -17, men -33 er et mindre tall enn -17. Det blir nokså likt hvis man bruker ei vertikal tallinje som gradestokk, men da vil addisjon innebære at man beveger seg oppover.

Begrepet *varmere* vil alltid innebære addisjon og bevegelse mot høyre på tallinjen i temperaturkonteksten. Hvis vi snakker om grader sier vi sjeldent at temperaturen øker med -5 grader eller at det blir -5 grader varmere. Derfor sier Kilhamn (2009) at en regneoperasjon som innebærer å addere et negativt antall grader blir meningsløs på ei tallinje, siden temperaturen ikke kan stige eller øke med et negativt antall grader.

4.2 Oppgave 2

Den andre oppgaven som elevene ble tildelt er fra oppgaveboken *Sirkel 8A* (Torkildsen, 2006, s. 51). I denne oppgaven nevnes det, akkurat som i oppgave 1, to stedsnavn med forskjellig temperatur. Forskjellen mellom de to oppgavene er at i følgende oppgave så vil operasjonen være subtraksjon i stedet for addisjon, og dette må elevene tolke ut i fra beskrivelsen om at temperaturen "ligger under". Oppgaveteksten var følgende:

> På Tynset ble det målt -34 ˚C i desember 2005. Gjennomsnittstemperaturen i Antarktis ligger 15 ˚C under det. Hva er gjennomsnittstemperaturen i Antarktis?

Her vil regnestykket -34 – 15 = -49 være passende til konteksten. Når man subtraherer et positivt tall fra et negativt tall vil tallet bli mindre mens mengden blir større, og i denne oppgaven vil mengden -49 være større enn mengden til tallet -34, men tallet -49 er mindre enn -34. Siden temperaturen ligger 15 grader *under* -34 er man nødt til å subtrahere. I denne oppgaven subtraheres et positivt tall fra et negativt tall, og derfor blir mengden større selv om vi subtraherer. Tallinje og gradestokk kan benyttes i arbeidet med oppgaven og da kan man starte på tallet-34 og bevege seg 15 grader til venstre eller nedover siden det er subtraksjon. Man vil da ende opp med -49.

Som begrepet *varmere* i oppgave 1 vil også begrepet *under* i denne oppgaven inneha noen egenskaper som gjør at begrepet alltid vil innebære en bestemt operasjon. Hvis det for eksempel er "3 under" så vil dette tolkes til å bety at man skal subtrahere 3; altså – 3. Det gir derimot ingen mening å si "-3 under" eller at temperaturen er -3 grader under for eksempel 5 grader. Hvis man skal si at temperaturen ligger et bestemt antall grader under 5 grader vil man alltid bruke et positivt antall grader for å formidle dette.

4.3 Oppgave 3

Den tredje oppgaven er hentet fra samme bok som oppgave 1 og det var boken *Grunntall 10* (Bakke, 2007, s. 39). Tekstoppgaven var slik:

> En morgen er det -17 ˚C i Elverum. Samtidig er det 4 ˚C i Bergen.
> Hvor mange grader forskjell er det mellom temperaturen i Bergen og temperaturen i Elverum?

I denne oppgaven spør man etter hvor mange grader *forskjell* det er mellom temperaturene -17 og 4 grader. Begrepet *forskjell* kan defineres som avstanden mellom to tall på tallinjen og denne forskjellen vil alltid være et positivt tall. Hvis du skal finne ut for eksempel hvor mange grader det er i forskjell mellom 32 og 15 grader vil en vanlig fremgangsmåte være at man tar det største tallet og trekker fra det minste. Det vil si at man regner ut 32-15 og forskjellen blir 17 grader. Hvis vi bruker samme fremgangsmåte på tekstoppgaven ovenfor og trekker det minste tallet fra det største får vi regnestykket 4 – -17. Dette blir 21 grader i forskjell. I denne oppgaven subtraheres et negativt tall fra et positivt tall, og dette tilsvarer å addere. Dette kan bli veldig abstrakt for elevene, og det er vanskelig å forklare ut fra konteksten at subtraksjon av et negativt tall er det samme som addisjon. En annen mulighet er derfor å bruke tallinjen til å illustrere dette regnestykket. Da kan man starte på -17, telle seg oppover til 0 og deretter fortsette å telle frem til 4 grader. Da kan man summere 17 + 4 og man får dermed svaret 21 grader uten å bruke negative tall i regnestykket. Dette kan knyttes til en ordinal forståelse av tall og dette er et grunnleggende prinsipp for tallinjen og ordning av tall. En ordinal forståelse innebærer at man for eksempel sorterer etter størrelse eller rekkefølge på tallinjen og i denne oppgaven vil tallenes rekkefølge og ordning være en viktig kunnskap å inneha.

4.4 Oppgave 4

Den siste oppgaven elevene fikk jobbe med er hentet fra *Multi 7A* (Alseth, 2008, s. 12). Denne oppgaven bestod av fire deloppgaver og disse skulle løses med utgangspunkt i en tabell med fem stedsnavn og tilhørende temperaturer. Oppgaven så slik ut:

a) I hvilken by er det kaldest?
b) Hvor mye kaldere er det i Murmansk enn i Oslo?
c) Hvor mye varmere er det i Kairo enn i Anchorage?
d) Hvor mye kaldere er det i Oslo enn i Santiago?

By	Temperatur
Murmansk	-26 °C
Oslo	-9 °C
Kairo	23 °C
Santiago	31 °C
Anchorage	-37 °C

Deloppgave *a* dreier seg om å lese av tallene i tabellen og finne ut hvilken by som har den kaldeste temperaturen. Hensikten med denne oppgaven kan være å undersøke om elevene tenker at -9 er den kaldeste temperaturen siden dette er tallet med minst mengde, eller om elevene ser at det er Anchorage med sine 37 kuldegrader som har den kaldeste temperaturen. Noen elever kan tenke at -37 er større enn -9 siden 37 er en større mengde enn 9, og derfor er det viktig at elevene ser på hvor store tallene er og ordinaliteten for å finne det riktige svaret i stedet for å se på kardinaliteten og mengden. Ved å sette opp ei tallinje og markere de forskjellige temperaturene kan man finne ut hvor det er kaldest ved å se hvilken temperatur som ligger lengst til venstre på tallinjen.

Deloppgavene *b, c* og *d* er formulert nesten helt likt og spør hvor mye varmere eller kaldere det er i en by i forhold til i en annen by. Denne måten å stille spørsmålet på kan sammenlignes med at man skal finne forskjellen mellom to temperaturer og dette omtalte jeg i forbindelse med oppgave 3 ovenfor. Mye av det samme som jeg drøftet der vil også gjelde for disse deloppgavene. I oppgave 3 skulle man finne forskjellen mellom tallene -17 og 4 og dette er et negativt og et positivt tall. Det er også tilfellet i deloppgave *c* og *d* og derfor vil disse to deloppgavene løses på samme måte som jeg drøftet i analysen av oppgave 3. Oppgave *c* går ut på at man skal finne ut hvor mye varmere det er i Kairo (23 grader) enn i Anchorage (-37 grader), og dette kan løses ved å se for seg en tallinje og addere 23 + 37. Svaret blir da 60 grader. Hvis jeg skulle skrevet regnestykket direkte oversatt med negative tall slik de blir gitt i oppgaveteksten ville regnestykket blitt 23 – -37 = 60, og dette innebærer subtraksjon av et negativt tall. I oppgave *d* spør de hvor mye kaldere det er i Oslo (-9 grader) enn i Santiago (31 grader), og dette kan løses ved å addere 9 og 31 slik at man får 40 grader i forskjell. Direkte oversatt ville dette regnestykket blitt 31 – - 9 = 40, og nok en gang ville det blitt subtraksjon av et negativt tall. Ved å relatere til en tallinje blir disse oppgavene enklere å løse med positive tall i regnestykket, samtidig som regnestykkene gir mer mening for elevene enn om man skulle brukt negative tall for å løse dem.

Deloppgave *b* skiller seg ut fra de andre deloppgavene om forskjell på grunn av tallene som oppgaven operer med. Det er spørsmål om hvor mye kaldere det er i Murmansk (-26 grader) enn i Oslo (-9 grader), og dette blir en annerledes oppgave fordi begge temperaturene er negative. Dermed må man holde seg på den negative siden av tallinjen og man kan ikke relatere til null på samme måte som i de tidligere oppgavene. Man kan bruke den samme metoden der man trekker fra det minste tallet fra det største, -9 – -26, og få 17 til svar, men dette blir abstrakt og vanskelig å forestille seg. Ved å bruke tallinje kan man i stedet finne avstanden mellom de to temperaturene man har fått oppgitt i tekstoppgaven og regne antall grader mellom punktene -9 og -26. Da kan man se at også regnestykket 26 – 9 passer til denne konteksten og gir det riktige svaret 17 grader.

5. Analyse og drøfting av elevbesvarelsene

I dette kapitlet vil jeg presentere og drøfte episoder fra datamaterialet mitt, og de utvalgte episodene vil belyse kjennetegn som preger elevenes arbeid med tekstoppgaver og utfordringer som elevene møtte da de arbeidet med negative tall. Jeg vil strukturere analysen omkring kjennetegn og utfordringer, og jeg vil begynne med kjennetegnene i elevarbeidet.

5.1 Kjennetegn ved elevenes arbeid

Som jeg nevnte i kapitlet om analysemetode har jeg kommet frem til tre kjennetegn for elevenes arbeid med tekstoppgaver om negative tall og temperatur. De to første kjennetegnene vil være karakteristisk for hvordan elever jobber med negative tall og disse oppstår på grunn av oppgavenes formuleringer. Oppgaven inneholder temperaturspråk og negative tall, og de to første kjennetegnene for elevenes arbeid er at de bruker tallinje og at de tar i bruk positive tall for å finne svarene. Det tredje kjennetegnet oppstår fordi jeg spør elevene etter en representasjon med symboler som de kan bruke til å finne svaret på oppgavene. Det som kjennetegner elevenes arbeid etter at jeg har stilt dette spørsmålet er at de allerede har funnet svaret. De prøver derfor å tilpasse et regnestykke til de tallene de har fått gjennom oppgaveteksten og svaret de allerede har funnet. Jeg vil videre drøfte hvert enkelt kjennetegn og belyse dem ved å presentere eksempler fra elevarbeidet.

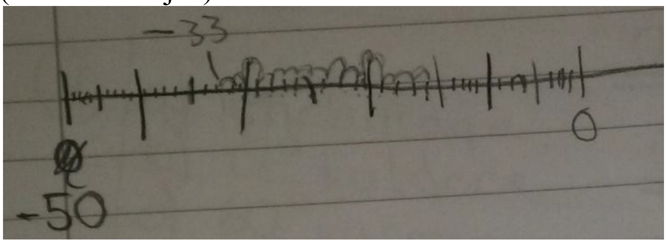
5.1.1 Elevene bruker tallinje eller gradestokk.

Bruken av tallinje eller gradestokk preger elevenes arbeid i nesten alle oppgaver, og siden denne representasjonen blir brukt så ofte vil jeg betegne den som et kjennetegn på elevenes arbeid. Elevene bruker tallinjen på to forskjellige måter i mitt datamateriale. Den ene måten innebærer at elevene tegner opp tallinja og bruker den visuelt, og den andre måten er at elevene bruker tallinja mentalt og refererer til den via det muntlige språket. Den semiotiske representasjonen tallinje, både mental og illustrert, vil inngå i det Duval (2006) omtaler som det semiotiske systemet *geometriske figurer*.

Jeg vil begynne med å presentere transkripsjoner som viser hvordan elevene brukte tallinjen visuelt, og deretter vil jeg gi eksempler på bruk av ei mental tallinje. I utdraget nedenfor får vi se hvordan elevene tegnet en tallinje og hvordan de brukte den som et medierende verktøy for å finne svaret til oppgave 1:

1. Jeg: Mhm. Men her står det -33 + 16.

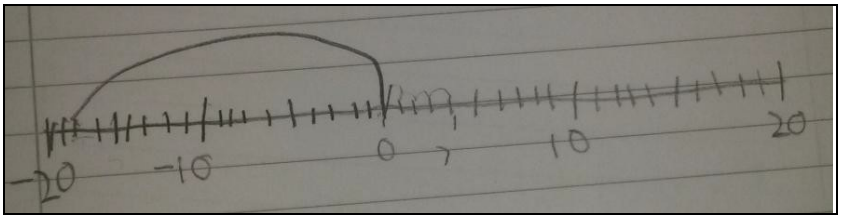
2. Anders: Det blir 49.
3. Jeg: Blir det det?
4. Anders: Njaa. 16? Eller ja. 5, 10, 15 pluss 1, 16… Begynne på nytt æ. (Bruker tallinjen). 17!



5. Anne: Ja!

I linje 2 sier Anders at -33 + 16 blir 49, men her tar han ikke hensyn til at -33 er et negativt tall. Etterpå, i linje 4, bruker eleven tallinje for å regne ut hva svaret blir. Han kommer da frem til at svaret blir -17 i stedet for -49 og dette indikerer at tallinjen hjelper ham å utføre addisjonen i riktig retning slik at eleven ser at det er tallet som blir større og ikke mengden.

I oppgave tre tok samtlige grupper i bruk tallinjen. Gruppe A tegnet tallinjen på papiret og elevene brukte dermed ei visuell tallinje i arbeidet for å finne forskjellen mellom temperaturene -17 og 4:



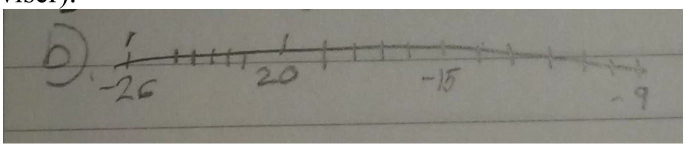
Eleven begynte på tallet -17 og telte bortover til 0 og deretter videre til 4. Dermed ble deres regnestykke 17 + 4 = 21. På tallinjen kan man også se at *forskjellen* på 21 grader utgjør avstanden mellom -17 og 4.

I oppgaven jeg nettopp har drøftet skulle elevene finne forskjellen mellom -17 grader og 4 grader. Dette er både en positiv og en negativ temperatur, og det var derfor elevene kunne bruke en strategi der de adderte tallene 17 og 4 for å finne avstanden mellom dem. Elevene regnet ut at det var 17 grader på den negative siden på tallinja og at det var 4 grader på den positive siden. I oppgave 4b skal man også finne forskjellen mellom to temperaturer, men her er begge de oppgitte temperaturene negative tall. Noen av gruppene forsøkte å bruke samme fremgangsmåte på deloppgave b som de gjorde på oppgave 3, men siden det er to negative tall man skal finne forskjellen mellom i stedet for et positivt og et negativt tall skaper dette problemer for elevene. Da viser det seg at elevene finner hjelp i tallinjen, og for å vise dette presenterer jeg en episode fra gruppe C:

6. Jeg: Hvor mye kaldere er det i Murmansk enn i Oslo?
7. Cathrine: Da tar vi 26 pluss 9.
8. Christian: Mmm. 26 -9.
9. Cathrine: Nei, det va det vi gjorde feil sist gang.
10. Christian: Å ja, ja. Men sia vi får korr my kaldere e det. Så da må vi liksom.. Da må vi på en måte ta akkurat samme som vi gjorde på den der oppgaven (refererer til oppgave 3).
11. Cathrine: Ja, da e det 26 + 9.
12. Christian: Men vi ska jo ikke over 0 vettu.
13. Cathrine: Men vi sætt på minus etterpå.
14. Christian: Sånn der tenke du?
15. Cathrine: Sånn her. Men du har 26.. Nei det blir ikke 26.. Det blir 13 trur æ. 17!
16. Christian: 17! 17 grader kaldere blir det. Også må vi regn ut.
17. Jeg: Koss kom du fram te 17 grader?
18. Christian: Da tok æ bare..
19. Cathrine: Æ telt ned.
20. Christian: Æ plussa faktisk på der da, sånn at det vart 26.

I begynnelsen diskuterer elevene om de skal regnet ut 26 – 9 eller 26 + 9. I linje 10 sier Christian at de må gjøre slik de gjorde i forrige oppgave (oppgave 3) og derfor mener Cathrine at det blir addisjon siden det var det de gjorde i den oppgaven (17 + 4 = 21). I linje 12 tyder det på at Christian er klar over at det blir en forskjell på disse to oppgavene siden han sier at de i denne oppgaven ikke skal ”over 0”. Dette kan tolkes til at han mener de beholder seg på den samme siden av 0 på tallinjen, og derfor kan de ikke bare addere slik de gjorde i oppgave 3. Utsagnet til Christian kan også indikere at han bruker ei mental tallinje i sin resonnering. Etter hvert går de bort fra å bruke den samme fremgangsmåten som i forrige oppgave, og regner i stedet ut svaret på en annen måte. Cathrine teller ned fra 26 grader til 9 grader, mens Christian teller oppover fra 9 grader til 26 grader. Begge ender opp med 17 grader i forskjell og begge to bruker kun positive tall i arbeidet. Videre tegner de ei tallinje for å visualisere og forklare fremgangsmåten:

21. Jeg: Du gikk i fra 9 og opp te 26, og du gikk ned fra 26 te 9. Og begge fikk 17? Kan dåkk skriv ned den utregninga?
22. Christian: 9 + 17 = 26 kanskje, nei det blir feil.
23. Cathrine: Vi visste ikke at det var det. Så da villa æ gjort sånn her (tegner tallinje og viser).



24. Cathrine: Også telt æ nedover sånn og du telt oppover.
25. Christian: 26 – 9 og det blir jo…
26. Cathrine: 17.

Her har elevene funnet svaret 17 og de forsøker deretter å finne et regnestykke som passer til svaret og tallene i oppgaveteksten. Først prøver de seg med 9 + 17 = 26, men de oppdager at dette blir feil siden de benytter seg av svaret som en del av regnestykket. Dette vil være et tegn på at de tilpasser den symbolske representasjonen etter at de har funnet svaret og dette er et av de andre kjennetegnene som jeg vil drøfte senere i analysen.

Som jeg nevnte kort i episoden ovenfor kunne utsagnet til Christian i linje 12 indikere at han så for seg ei mental tallinje før de fysisk tegnet opp ei tallinje på papiret. Det var flere av elevene som refererte til ei mental tallinje i arbeidet med tekstoppgavene og i oppgave 3 var det for eksempel to av gruppene som brukte en mental tallinje for å forklare sine utregninger. Et utdrag som belyser bruken av ei mental tallinje er følgende utsagn:

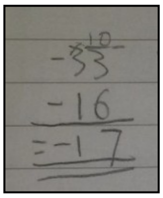
27. Berit: Æ tok 17 + 4. Og så lægg æ sammen det. Da blir det 21. For det e 17 tall på den sia av linja og null. 4 på den sia.

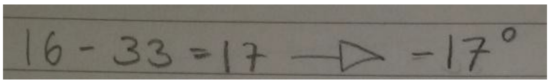
I dette utsagnet forklarer Berit at det er 17 tall på den ene siden av linjen og null, og at det er 4 tall på den andre siden. Dette eksemplet viser at hun nevner tallinjen eksplisitt i sin forklaring og dette betyr at Berit så for seg ei tallinje mentalt siden hun henviser til den uten å tegne den opp. I dette eksemplet og eksemplene jeg har presentert ovenfor ser det ut til at elevene tar i bruk tallinjen først og fremst for å finne svaret på oppgaven, men også for å se relasjoner mellom tallene de får oppgitt i tekstoppgavene.

5.1.2 Elevene unngår å bruke negative tall.

I utgangspunktet inneholdt tekstoppgavene elevene fikk negative tall, men et av de mest utbredte kjennetegnene jeg fant i mitt datamateriale var at elevene brukte kun positive tall i arbeidet med disse oppgavene. Samtlige av de fire oppgavene jeg brukte i min studie ble løst med bruk av positive tall minst en eller flere ganger, og det var sjeldent at elevene tok i bruk negative tall i arbeidet hvis jeg ikke spurte de spesifikt om å gjøre det. Videre vil jeg vise et eksempel fra hver oppgave som belyser hvordan elevene løste oppgavene uten å bruke negative tall.

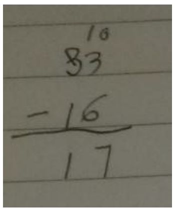
Jeg vil begynne med oppgave 1 hvor elevene skulle finne temperaturen i Oslo ut i fra opplysningene om at temperaturen var 16 grader varmere enn temperaturen -33. Det som kjennetegner elevenes arbeid med denne oppgaven er at samtlige grupper bruker positive tall og regner ut 33 – 16 eller 16 – 33 for å finne svaret. Deretter setter de på et minustegn foran svaret for å tilpasse svaret til konteksten i oppgaveteksten. Nedenfor presenteres utregningene til elevene, der svaret til gruppe A er helt til venstre og svaret til gruppe B er til høyre (gruppe A sa muntlig at regnestykket ble 33 – 16, men da de noterte det ned skrev de -33 uten å ta hensyn til dette fortegnet videre i utregningen):





Svaret på denne oppgaven er at temperaturen i Oslo er -17 grader, og som vi ser trengte altså ikke elevene å bruke negative tall for å regne seg fram til dette. Følgende utdrag er hentet fra gruppe C der de kommer frem til at svaret er 17, og etterpå ser de at de er nødt til å sette et minustegn foran svaret slik at det stemmer overens med oppgaveteksten:

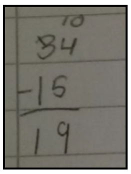
28. Cathrine: 33 minus 16. Ska æ skriv?
29. Christian: Og da blir det.. Ja, skriv opp. Vent da.

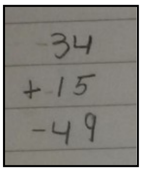


30. Cathrine: 17 grader varmere.
31. Christian: 17.
32. Cathrine: Ja det e 17. Minus! Minus, 17 minus blir det sia det va..
33. Christian: Mhm!

I dette eksemplet regner elevene med positive tall hele veien og setter på et minustegn foran svaret til slutt. Hvis man skulle regnet ut denne oppgaven med negative tall ville regnestykket blitt -33 + 16 = -17, men i stedet forholder elevene seg til positive tall og får regnestykket 33 – 16 = 17.

I likhet med oppgave 1 unngår samtlige grupper å bruke negative tall i utregningen ved oppgave 2. I denne oppgaven skulle elevene finne temperaturen som lå 15 grader under -34. Gruppe B sa med en gang at svaret ble -49, og de forklarte etterpå at de regnet ut 34 + 15 og la på et minustegn på svaret de fikk. Gruppe A og C regnet ut først 34 – 15 og endte opp med 19 til svar, men da de sammenlignet dette med oppgaveteksten innså de at dette ble en varmere temperatur enn -34 og dermed skjønte de at de måtte finne et annet svar. Da regnet også disse to gruppene ut regnestykket 34 + 15 til å bli 49 og satte på et minustegn foran svaret. Utregningene nedenfor er hentet fra gruppe C:





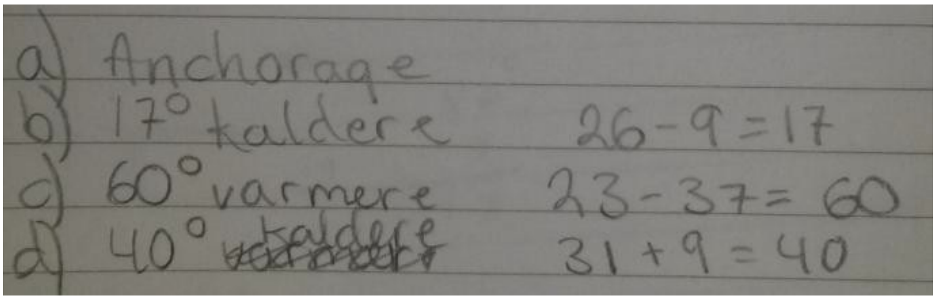
To av gruppene kom altså først frem til svaret 19, men med hjelp fra konteksten fant de ut at dette ikke kunne være riktig, og derfor regnet de ut oppgaven ved å bruke regnestykket 34 + 15. Her ser det ut til at elevene prøver seg frem med subtraksjon først og deretter addisjon, og ved å sjekke svarene ut fra konteksten ser de hva som kan være passende. Elevene henter tallene fra tekstoppgaven og prøver litt ulike operasjoner, og deretter bruker de konteksten til å vurdere hvor fornuftige svarene er.

I arbeidet med oppgave 3 skulle elevene finne forskjellen mellom to temperaturer; -17 grader og 4 grader. Elevene kom frem til svaret 21 grader og alle de tre gruppene brukte 17 + 4 som regnestykke for å finne svaret. Et eksempel på dette er fra gruppe B:

1. Berit: 21.
2. Bjørn: 21 ja. Æ regna det ut i stad.
3. Jeg: Koss fant dåkk fram te det svaret?
4. Berit: Æ tok 17 + 4. Og så lægg æ sammen det. Da blir det 21. For det e 17 tall på den sia av linja og null. 4 på den sia. Da blir det..
5. Bjørn: Æ tok å gikk bare 17 opp te null og da visst æ at da hadd æ 17 og pluss 4. 21.

Siden *forskjellen* mellom to tall kan defineres som avstanden mellom to tall på en tallinje vil det i tilfellet ovenfor være riktig å addere de to tallene. Siden avstanden mellom tall på tallinja kan betegnes som positiv blir det riktig av elevene å addere to positive tall og ikke et negativt og et positivt slik tallene blir gitt i oppgaveteksten. Jeg spurte elevene om det gikk an å sette opp et regnestykke der man brukte tallet -17 siden dette var oppgitt i oppgaveteksten. Elevene forsøkte på dette uten å lykkes, og to av gruppene (B og C) mente at dette ikke var mulig og begrunnet det med at -17 + 4 blir bare 13 og ikke 21. Som jeg nevnte i analysen av oppgave 3 vil en fremgangsmåte for å finne forskjellen mellom to tall kunne være å ta det største tallet og trekke fra det minste. Denne fremgangsmåten vil i dette tilfellet gi regnestykket 4 – -17, og dette gir svaret 21, men dette blir abstrakt for elevene.

I oppgave 4 brukte alle gruppene positive tall i de tre deloppgavene *b, c* og *d.* Å unngå de negative tallene ser ut til å være en vanlig strategi for elevene, og utregningen blir mindre komplisert når de bruker kun positive tall. Hvis man skulle brukt negative tall i følgende utregninger ville oppgavene blitt mer abstrakt og kompliserte. Besvarelsen nedenfor er hentet fra gruppe B som regnet ut disse svarene umiddelbart ved å bruke positive tall:



5.1.3 Elevene finner svaret først og tilpasser deretter det symbolske uttrykket.

Det tredje kjennetegnet jeg vil drøfte kan sies å være skapt av meg. Med dette mener jeg at kjennetegnet dukket opp fordi jeg stilte elevene spørsmål om å sette opp et regnestykke som de kunne bruke for å løse oppgavene. Det er ikke et krav om dette i oppgaveteksten, men siden jeg er ute etter å se overgangen mellom semiotiske systemer ba jeg elevene om å komme frem til en symbolsk representasjon. I dette arbeidet fant elevene svaret først på en annen måte enn ved å bruke et regnestykke, og etterpå forsøkte de å tilpasse et regnestykke til svaret de allerede har funnet. Jeg vil videre gi eksempler som viser hvordan dette kjennetegnet opptrer i elevarbeidet.

I arbeidet med oppgave 2 skulle elevene finne ut hva temperaturen var hvis den lå 15 grader under -34 grader. Som jeg nevnte tidligere brukte elevene positive tall for å regne ut dette, og da brukte de regnestykket 34 + 15 = -49. Noen av gruppene tenkte først at det skulle være 34 – 15 som var regnestykket, men da fikk de -19 til svar og dette passet ikke til konteksten i oppgaven. Gruppe C brukte konteksten til å se at dette ble feil, og følgende var en del av dialogen som oppstod i denne gruppen:

34. Jeg: Ska det vær -19 grader i Antarktis når det e -34 på Tynset?
35. Christian: Det høres kanskje litt rart ut egentlig da. Siden Antarktis e jo veldig, eller det e jo veldig kaldt der. Så det høres veldig rart ut. Så æ trur heller.. Siden nå tenker vi under null, så da blir det på en måte lengre.. Æ meine kaldere. Så på en måte det blir..
36. Cathrine: På en måte 34 + 15. Så sett vi på en minus.

Elevene benyttet seg av positive tall og kom frem til svaret 49. Deretter plasserte de et minustegn foran svaret slik at det stemte overens med konteksten i tekstoppgaven. Dette gjorde også de andre gruppene, og jeg spurte gruppene hvorfor de kunne være sikre på at denne fremgangsmåten ga det riktige svaret. Da presenterte elevene regnestykker som inneholdt negative tall og som ga svaret -49 i et forsøk på å forklare hvorfor det ble riktig. Gruppe A og C skrev at regnestykket ble -34 + -15 = -49, mens gruppe B skrev at regnestykket ble -34 – -15 = -49. Her kommer det tydelig frem at elevene allerede vet svaret og at de prøver å finne et regnestykke som passer til svaret de allerede har. Elevene prøver seg frem med tallene de har hentet fra oppgaveteksten og svaret de allerede har funnet, og de tester ut ulike fortegn og operasjoner og ser hvilke som virker mest fornuftig ut i fra konteksten. Elevenes forslag innebærer å addere et negativt tall til et negativt tall (-34 + -15) og subtraksjon av et negativt tall (-34 – -15) fra et negativt tall. I analysen av oppgavene ovenfor skrev jeg at regnestykket som passet til konteksten i denne oppgaven var -34 – 15 = -49, og at *under* i oppgaveteksten måtte tolkes til å bety subtraksjon. Regnestykkene som elevene kommer frem til kan beskrives som mer kompliserte regnestykker, og begrepet *under* ser ut til å være vanskelig å oversette til symboler.

Til dette kjennetegnet vil jeg også presentere en episode fra Gruppe A der det spesielt kommer tydelig frem at elevene finner svaret først og prøver deretter å tilpasse et regnestykke. I oppgave 3 skulle elevene finne forskjellen mellom -17 grader og 4 grader, og da jeg spurte dem om å sette opp et regnestykke som kunne gi dem svaret på tekstoppgaven utviklet samtalen seg på følgende måte:

37. Anders: Sånn -17 + 21.
38. Jeg: -17 + 21, hvorfor det?
39. Anders: Siden at da havne du på 4.
40. Anne: Hvorfor ikke 21 minus 17.. Nei..

I linje 37 sier Anders at regnestykket blir -17 + 21, og her har eleven tatt i bruk svaret på oppgaven (21) i selve regnestykket. Tallene de fikk oppgitt i tekstoppgaven var – 17 og 4 og ikke -17 og 21 som Anders har benyttet seg av for å presentere regnestykket. I linje 40 ser vi også at Anne bruker svaret som de allerede har kommet frem til for å ordne et regnestykke, og dette indikerer tydelig at den symbolske representasjonen er noe de tilpasser etter at de har funnet svaret.

5.2 Utfordringer i omdannelsen fra en tekstoppgave til et regnestykke

I elevenes arbeid med omdannelsen fra en tekstoppgave til et regnestykke fant jeg to typer hovedutfordringer. Den første er utfordringer knyttet til tolkning av begreper i tekstoppgaven, og dette kan være begreper som *varmere, kaldere, ligger under* og lignende begreper fra "temperaturspråket". I tillegg til dette viser det seg at flere av utfordringene kommer fordi det faktisk er bruk av negative tall og derfor har jeg valgt å kalle den andre typen utfordringer for utfordringer knyttet til negative tall. I denne kategorien vil det være tre underkategorier og disse vil være i samsvar med de tre kategoriene av utfordringer som er utarbeidet av tidligere forskning som i studien til Altiparmak & Özdoan (2010). Siden utfordringene jeg observerte i mitt datamateriale kunne tolkes til å være de samme som ble presentert i deres forskning valgte jeg å bruke disse som underkategorier. Dette var utfordringer knyttet til mengde og retning, aritmetiske operasjoner med negative tall og minustegnets triple natur.

5.2.1 Utfordringer knyttet til tolkning av begreper i tekstoppgaven

Tekstoppgave 1 innebærer at elevene skal regne ut temperaturen når den er 16 grader *varmere* enn -33 grader. I omdannelsen fra en tekstoppgave til en representasjon med symboler vil det være viktig å tolke operasjonen som hører sammen med begrepet *varmere*. Gruppe A forsøkte først å regne ut svaret ved å bruke operasjonen subtraksjon og da kom de frem til at regnestykket ble -33 – 16. Da de regnet ut dette sa de følgende:

41. Anders:	Det går oppover sia det e minus. Siden at det e minus vettu, du tar vekk 16. Og i minus… Du tar vekk noe som e allerede i minus så da går du enda lengre ned. Så på en måte pluss opp ned. Ja. 49!

Ovenfor ser vi at eleven bruker både begrepene *oppover* og *enda lengre ned* til å forklare hva som skjer når temperaturen blir varmere (linje 41) og oppover og nedover er to ulike retninger som blir brukt til å beskrive den samme operasjonen, subtraksjon. Dette kan være forvirrende og en slik problematikk ville vi ikke møtt hvis det hadde vært kun positive tall vi opererte med. Hvis et positivt tall hadde gått *oppover* ville dette ha hatt en entydig mening, men hvis et negativt tall hadde gått oppover kunne det betydd at mengden går oppover (og tallet minker) eller at tallet går oppover (og mengden minker). Omdannelsen kan derfor være utfordrende på grunn av at tolkningen av begrepet kan være tvetydig:

Varmere ⟷ "Oppover" ⟷ addisjon/subtraksjon

Illustrasjonen viser en omdannelse som inneholder to steg. Begrepet *varmere* kommer fra konteksten i oppgaven, mens begrepet *oppover* blir brukt av elevene og kan assosieres med en gradestokk der temperaturen går oppover når det blir varmere. Elevene blir nødt til å utføre en omdannelse herfra til symboler, og om man skal benytte addisjon eller subtraksjon kan være vanskelig å se ut i fra dette begrepet. Elevene starter altså i et naturlig språk og oversetter dette til gradestokk. Deretter må de oversette dette til symboler og dette er et eksempel på en tydelig omdannelse.

Negative tall fører til at tolkning av begreper som brukes i tekstoppgaven blir mer vanskelig enn om det bare hadde vært positive tall. Dette skyldes at egenskapene knyttet til tallenes mengde og retning ikke lenger er sammenfallende. I oppgave 2 inneholdt oppgaveteksten begrepet *under*, og dette fører til lignende utfordringer som de jeg nettopp har nevnt. I omdannelsen frem til en representasjon med symboler blir elevene nødt til å tolke hvilken operasjon begrepet *under* innebærer. Dette begrepet ville fungert fint ved positive tall siden det da ville hatt kun en betydning, men siden vi nå jobber med negative tall kan dette begrepet ha to betydninger ettersom at tallenes mengde og retning ikke lengre er sammenfallende. Omdannelsen fra det naturlige språket og til en symbolsk representasjon av en operasjon vil derfor kunne bli slik:

under $\longleftrightarrow$ addisjon eller subtraksjon

Først var det flere av elevene som tolket *under* til å bety subtraksjon, men da de regnet ut -34 – 15 til å være -19 prøvde de heller med addisjon for å komme frem til -49. Hos elevene førte subtraksjon til at mengden (-34) ble mindre og de endte opp med -19 i stedet for at tallet ble mindre. Da ville de endt opp med -49 som svar, men i stedet vil de bruke addisjon for å komme dit. Ved positive tall ville ikke elevene ha møtt på den samme utfordringen siden begrepet *under* da ville ha gått overens med både tallet og mengden og oppført seg samsvarende. Eksemplet ovenfor viser omdannelsen fra naturlig språk til symboler, og denne er utfordrende blant annet fordi oppgaven inneholder negative tall og begreper som elevene muligens ikke er vant til å tolke i matematikk.

5.2.2 Utfordringer knyttet til negative tall

I kapitlet om utfordringer knyttet til negative tall vil jeg ta for meg tre underkategorier av utfordringer som elevene kan møte i arbeidet med tekstoppgavene. Videre vil jeg ta for meg hver av disse underkategoriene hver for seg, og jeg vil begynne med utfordringer knyttet til tallenes retning og mengde. Deretter presenterer jeg utfordringer som kan knyttes til aritmetiske operasjoner med negative tall og til slutt drøftes utfordringer som er knyttet til tolkning av minustegnets betydning.

Tallenes retning og mengde

I teorikapitlet skrev jeg at egenskapene ved tallenes mengde og retning vil oppføre seg i samsvar med hverandre når vi holder oss på den positive siden av tallinjen, men når vi tar i bruk den negative siden av tallinjen vil disse egenskapene bli mer kompliserte. For elevene kan dette skape forvirring siden det blir vanskelig å bruke riktig språk når man omtaler og forklarer sin tankegang. For eksempel er minus 10 større enn minus 30 hvis det er snakk om selve tallet, men hvis det derimot er snakk om mengden vil 30 være større enn 10. I mitt datamateriale ser jeg flere steder at elevene ikke er konsekvente når det gjelder nettopp dette, og de kan for eksempel bruke begrepene ”går oppover” og ”går enda lengre ned” om samme handling. Dette indikerer at de i det ene tilfellet snakker om mengden og i det andre tilfellet snakker om tallet uten å nevne det eksplisitt, og derfor kan det bli vanskelig å forstå hverandre. Jeg vil vise et eksempel fra arbeidet med oppgave 1 der elevene i gruppe A kom raskt frem til svaret -17. Dette gjorde de ved å regne ut 33 – 16 og plasserte et minustegn foran svaret 17. Da elevene i gruppe A skrev ned regnestykket på arket sitt brukte de derimot negative tall og skrev følgende: -33 – 16 = -17. Svaret på dette regnestykket blir egentlig ikke -17, men -49, og jeg valgte derfor å be de om å regne dette stykket om igjen:

42. Jeg: -33 – 16, hva blir det?
43. Anne: Det blir jo 17 da.
44. Jeg: Hvis dere ser på det dere har skrevet her nå, -33 – 16.
45. Anders: Nei, det går oppover.
46. Anne: Hæ?
47. Anders: Det går oppover sia det e minus. Siden at det e minus vettu, du tar vekk 16. Og i minus… Du tar vekk noe som e allerede i minus så da går du enda lengre ned. Så på en måte pluss opp ned. Ja. 49!

I linje 45 ser vi at Anders oppdager hva som skjer når man subtraherer noe fra et negativt tall og i linje 47 prøver han å forklare dette ytterligere slik at Anne skal forstå hva han mener. Det første han sier er at det går *oppover* siden det er minus, og like etterpå sier han at siden du tar vekk noe som allerede er i minus går du *enda lengre ned*. Begrepene han bruker kan indikere at han ser for seg ei tallinje der man kan bevege seg opp og ned. Når han sier at det går oppover mener han mest sannsynlig at mengden går oppover, altså at -33 blir -49, der tallet 33 går oppover til 49. Når han i etterkant sier at tallet går enda lengre ned refererer han til tallet som blir mindre siden -49 er mindre enn -33. Dette upresise språket kan gjøre det vanskelig å kommunisere med hverandre, og det blir vanskelig å henge med i forklaringen når man ikke er konsekvent på om man snakker om mengden eller tallet. Videre i denne dialogen kommer gruppen frem til at svaret ikke kan bli -49 siden konteksten i oppgaven handler om at det skulle være varmere i Oslo enn på Dovre. Anne sier at hun tror svaret er -17 siden det er varmere enn -33, og jeg spør elevene om det kanskje kan være noe feil med regnestykket deres siden de får -49 til svar. De bestemmer seg for å prøve addisjon i stedet for subtraksjon og elevene skriver opp regnestykket -33 + 16. Til dette regnestykket fikk de også -49 til svar, og elevene sa at dette var forvirrende. Her har elevene tenkt at addisjon gjør mengden større, og dermed ble -33 til -49 når de adderte 16. Elevene har ikke tatt hensyn til at -33 er et negativt tall, og derfor fører deres utregning til at tallet blir mindre mens mengden blir større.

Et annet eksempel på utfordringer knyttet til denne kategorien er fra gruppe B sitt arbeid med oppgave 2. Der snakker den ene eleven om mengden mens den andre snakker om tallet i samme samtale:

48. Jeg:	Ka blir -34 minus 16?
49. Berit:	E ikke det minus 19? Æ veit ikke æ.
50. Bjørn:	Nei, du må.. For det blir jo… Du må trekk.. Da skal du trekke i fra. Og siden det er negative tall går det nedover når du trekker fra.
51. Jeg:	Hvis du har minus 34 og trekker fra enda mer.
52. Bjørn:	Det er jo minus.
53. Berit:	Da blir det over det.
54. Berit:	Minus 49.

I linje 50 ser vi at Bjørn, i likhet med Anders i forrige transkripsjon, forklarer hvordan subtraksjon med negative tall utføres. Bjørn sier at ”siden det er negative tall så går det nedover når du trekker fra”, og i linje 53 fortsetter Berit på Bjørns forklaring og sier at ”da blir det over det”. Her ser vi at Bjørn snakker om hvor store tallene er, mens Berit snakker om tallenes mengde. I denne episoden bruker de begrepene ”går nedover” og ”blir over det” om den samme handlingen, og dette kan føre til misforståelser og bidra til at det blir vanskeligere å forstå hverandre. Hvis vi ser på utsagn på tvers av gruppene ser vi at Anders (linje 47) og Bjørn (linje 50) forklarer hvordan man subtraherer et positivt tall fra et negativt tall på følgende måte:

Anders:	Det går oppover sia det e minus.
Bjørn:	Siden det er negative tall går det nedover når du trekker fra.

De to guttene forklarer det samme fenomenet og vi kan si at begge har rett selv om de tilsynelatende sier to helt forskjellige ting. Disse setningene tyder på at Anders ser på mengden til tallene mens Bjørn ser på verdien til tallene. Derfor blir det riktig for den ene å si at det går oppover mens for den andre vil det være korrekt å si at det går nedover.

Egenskaper ved addisjon og subtraksjon

I følge Prather og Alibali (2008) er addisjon og subtraksjon med negative tall utfordrende fordi elever forsøker å tilpasse kalkulasjoner med negative tall til sine forestillinger om utregninger med naturlige tall. Det er spesielt et prinsipp som er fremtredende hos elevene i mitt datamateriale, og dette dreier seg om at elevene har en forestilling om at de aritmetiske operasjonene addisjon og subtraksjon betyr henholdsvis å gjøre et tall større og å gjøre et tall mindre. Ved addisjon med positive tall blir tall større fordi mengde og retning henger sammen og er sammenfallende. Som jeg nevnte i teorikapitlet vil ikke retning og mengde lenger være sammenfallende hvis man regner med negative tall, og derfor vil ikke lengre addisjon nødvendigvis føre til at et tall blir større, men det kan også gjøre et tall mindre hvis det for eksempel er addisjon av et negativt tall.

Elevene i gruppe A regnet ut i oppgave 1 at regnestykket -33 – 16 ga svaret 17, mens regnestykket -33 + 16 ga svaret 49. Dette kan tyde på at de har en forestilling om at subtraksjon gjør en mengde mindre og at addisjon gjør en mengde større. Disse forestillingene fører til feil når de negative tallene blir innført, og i omdannelsen fra en tekstoppgave til en representasjon med symboler vil dette være utfordrende siden addisjon og subtraksjon med negative tall ikke stemmer overens med elevenes forestillinger som gjelder for positive tall. Nå blir det omvendt siden mengden blir større ved subtraksjon og mindre ved addisjon i regnestykkene elevene presenterer. I samtalen nedenfor kommer det enda tydeligere frem hvor sterkt prinsippet om at addisjon blir større og at subtraksjon blir mindre står hos enkelte elever. I følgende episode jobber gruppe A fortsatt med oppgave 1 og de vet at svaret skal være -17. De har kommet frem til at regnestykket skal være -33 – 16 eller -33 + 16, og videre forsøker jeg å hjelpe dem med å finne ut hvilket regnestykke som gir svaret -17:

55. Jeg:	Men hvordan er det når dette her er et negativt tall, når det står minus 33. For dere har nå gjort det som om det bare er 33 der, ikke sant? Dere har tatt 33 minus 16?
56. Anders:	Mhm, ja. Hva med 33 pluss 16, det blir 49.
57. Jeg:	Mhm. Men her står det -33 + 16.
58. Anders:	Det blir 49.

59. Jeg: Blir det det?
60. Anders: Njaa. 16? Eller ja. 5, 10, 15 pluss 1, 16… Begynne på nytt æ. (Bruker tallinjen). 17!
61. Anne: Ja!
62. Jeg: Ja svaret er -17. Så hvordan ble regnestykket?
63. Anders: Det der. (Peker på -33 – 16)
64. Jeg: Hvorfor har dere minus mellom -33 og 16?
65. Anders: Eh. Det virker kanskje mest naturlig.
66. Jeg: Hvorfor det?
67. Anders: Siden vi er vant til å regne med tall som ikke er under tallinjen på en måte, lengre ned, under null.

I linje 56 og 58 sier Anders at både 33 + 16 og -33 + 16 blir 49, og dette kan være et tegn på at han fokuserer på absoluttverdien til tallene og at addisjon fører til at denne verdien skal bli større i stedet for at tallet skal bli større. I linje 59 setter jeg et spørsmålstegn ved denne utregningen, og han prøver derfor en ny fremgangsmåte og benytter seg da av tallinjen. Da kommer han frem til at svaret skal bli 17, og for å dobbeltsjekke spør jeg han igjen hvordan regnestykket ble nå som svaret ble -17. Han peker da på regnestykket -33 – 16 (se linje 63), selv om han nettopp har funnet svaret på regnestykket -33 + 16. Dette kan være en indikasjon på at han har en forestilling om at det må være subtraksjon for å få -33 til å bli -17, og i linje 64 spør jeg hvorfor eleven bruker operasjonen subtraksjon og da får jeg til svar at ”det er det som virker mest naturlig”.

Bofferding (2010) trakk i sin studie fram hvordan absoluttverdien og størrelsen til tall oppførte seg annerledes ved addisjon og subtraksjon av negative tall enn ved naturlige tall. Når man opererer med naturlige tall resulterer addisjon i et tall som er større enn begge addendene, men hvis det derimot er negative tall vi jobber med og skal addere et mindre positivt tall til et større negativt tall, vil dette resultere i et større tall lengre til høyre på tallinjen, men tallet vil ha en mindre absoluttverdi. I episoden ovenfor blir dette utfordrende og det skaper forvirring siden elevene har en forestilling om at addisjon fører til et større tall mens subtraksjon fører til et mindre tall. Siden absoluttverdien og størrelsen ikke oppfører seg på samme måte som ved regning med positive tall fører dette til at elevene regner feil.

Før man begynner å jobbe med negative tall lærer elevene at addisjon gjør større mens subtraksjon gjør mindre. Som nevnt trenger ikke dette nødvendigvis å være sant lengre når man innfører negative tall, og hvis elevene bringer med seg slike prinsipper som gjelder for aritmetiske operasjoner med positive tall, kan det føre til problemer med regning med negative tall. I datamaterialet mitt preget dette flere av elevdiskusjonene, og i gruppe C sitt arbeid med oppgave 2 skjedde følgende:

68. Cathrine:	Det e 15 under der da.
69. Christian:	15 under, det vil si at..
70. Cathrine:	Det blir 26.
71. Christian:	26 grader? Hvis det blir 26 grader da har vi bare tatt 5. Så det blir 18. Trur æ. Nei.
72. Cathrine:	Det e jo bare å ta 34 minus 15.
73. Cathrine:	Det blir 19.

I denne diskusjonen ser det ut til at både Cathrine og Christian er innstilt på at 15 grader *under* -34 innebærer at -34 skal bli til et tall som har mindre absoluttverdi enn 34, og de kommer etter hvert frem til at svaret er -19. Dette kan skyldes at elevene overfører prinsipper fra operasjoner med positive tall, der for eksempel subtraksjon handler om å ta bort noe eller gjøre et tall mindre. Utsagnet som Cathrine kommer med i linje 72, "Det e jo bare å ta 34 minus 15", kan tyde på at eleven tolker begrepet *under* i oppgaveteksten til å være sammenfallende med operasjonen subtraksjon, men likevel blir det problemer i utregning på grunn av at elevene enten overser at -34 er et negativt tall eller fordi de tenker at det er absoluttverdien som må bli mindre og ikke tallet.

Hvis man skal subtrahere et positivt tall fra et negative tall vil det medføre at absoluttverdien øker samtidig som størrelsen minker, og det kan være forvirrende og vanskelig å forstå at -49 er *under* eller *mindre* enn -34, siden 49 er en større mengde enn 34. Dette kan også ha en sammenheng med at elevene har en forestilling om at addisjon gjør større og at subtraksjon gjør mindre, siden det kan virke som at det er vanskelig for elevene at mengden og absoluttverdien av et tall kan øke selv om vi subtraherer. Som nevnt tidligere kan det være utfordrende for elevene å tenke at addisjon kan gjøre mengden til et tall mindre, som for eksempel at -34 + 15 kan bli -19. Det kan derfor være mer naturlig for elevene å si at -34 – 15 blir 19, men da regner elevene slik at absoluttverdien blir mindre, og det fører til at størrelsen på tallet øker i stedet for at den minker. I denne oppgaven finner de frem til riktig svar på grunn av konteksten i oppgaven, og deretter ordner de et regnestykke som fører frem til resultatet -49. Resultatet fra studien til Bofferding (2010) viste at flere elever var usikre på om de skulle fokusere på å flytte til høyre på tallinjen eller om de skulle ende opp med en større absoluttverdi ved regnestykket -8 + 4. I tråd med dette vil det i episoden ovenfor være viktig for elevene å være bevisst på at det er størrelsen på tallet som skal bli mindre og ikke absoluttverdien, og det er viktig å påpeke at subtraksjon ikke lenger alltid gir mindre absoluttverdi nå som de også opererer med negative tall.

Tolkning av minustegnet

Minustegnet har som nevnt en trippel natur. Det betyr at det samme tegnet innehar tre ulike funksjoner. I mitt datamateriale har minustegnet to av disse funksjonene siden det enten indikerer operasjonen subtraksjon eller at et tall er negativt. Disse to funksjonene kalles henholdsvis for binær og unær funksjon. I den neste episoden jeg presenterer arbeider elevene med oppgave 2, og de skal regne ut temperaturen som er 15 grader under -34:

74. Bjørn:	Mhm. Æ tok 34 + 15.
75. Jeg:	Du tok 34 + 15?
76. Bjørn:	Mhm. Og så tok æ det svaret og la på et minus.
77. Jeg:	Okei, koffer kan du gjør det da?
78. Bjørn:	Fordi at det blir egentlig da.. Egentlig så ska regnestykket vær minus 34 minus minus 15.
79. Jeg:	Skriv opp det.
80. Bjørn:	Okei, får æ skriv. -34 – -15 = -49.
81. Jeg:	E du enig i det Tina?
82. Berit:	Mhm.

I linje 78 og 80 ser vi at Bjørn sier at regnestykket som tilhører tekstoppgaven er -34 – -15= -49. Videre i samtalen ønsker jeg at elevene skal forklare hva de mener med ”minus minus” og hvorfor dette regnestykket gir dem -49 til svar, og da oppstår følgende samtale:

83. Jeg:	-34 – -15. Ka betyr det når det e minus minus 15?
84. Berit:	At det tallet her e minus 15, men du ska minuse det. Mhm. Det her er et tall og det her er et tall. Og det her e liksom det samme som pluss da, bare at det er minus. Men det er enklere hvis det her er et tall og det her er et tall.
85. Jeg:	Du tenke at minus 33 er et tall og minus 15 er et tall. Ja. Men koffer blir det minus 49?
86. Berit:	Det e det samme som å plusse, for det blir jo 49. Det blir jo det i begynnelsen å.
87. Bjørn:	Mhm.
88. Jeg:	Men hvis det hadd vært minus 33 minus 15, ka ha svaret blitt da?
89. Berit:	Det hadde blitt 19.
90. Jeg:	Enn minus 34 pluss 15?
91. Berit:	Eh førti… æ meine…
92. Bjørn:	Det kunne også blitt 19.
93. Jeg:	(…) Koffer har dåkk tatt to minusa her sånn? Korr kjæm dæm fra?
94. Bjørn:	Fordi at.. Den ene minusen e jo den du bruke når du ska få nåkkå mindre, og den andre e jo foran tallet for å vis liksom at det her e negativ 15 og ikke positiv korr det ikke står nå.

I linje 84 kan det tolkes til at Berit forklarer at det ene minustegnet står for en operasjon ved at hun sier ”det her e liksom det samme som pluss da, bare at det er minus”. Når hun sier at ”det her er et tall og det her er et tall” peker hun på tallet -33 og -15. Minustegnet hører til tallet og dette betyr at minustegnet er et fortegn som indikerer at tallet er negativt. Jeg spør hvorfor dette blir -49 og da sier hun at det er det samme som å plusse (se linje 86). Å subtrahere et negativt tall sies ofte å være det samme som å addere tallet, men i denne situasjonen blir det ikke korrekt å subtrahere et negativt tall fra -34, siden dette medfører at tallet vil stige og bli -19 i stedet for å synke til å bli -49 som elevene tror det gjør. En av årsakene til at dette blir utfordrende er at elevene ser ut til å overse at -34 er et negativt tall. Elevene sier at -34 – -15 blir -49 siden ”minus minus” er det samme som å plusse, og dette betyr at de ikke forholder seg til minustegnet som står foran 34 og regner ut 34 + 15. Dermed ender de opp med 49 til svar. I linje 88 spør jeg hva -34 – 15 ville blitt, og Berit regner ut svaret som om -34 igjen ikke er et negativt tall og ender opp med svaret 19 (se linje 89). Når jeg i linje 90 spør om hva -34 + 15 ville blitt, svarer Bjørn at det også kunne blitt 19 og dette tyder på at han tar hensyn til minustegnets unære funksjon som indikerer at tallet er et negativt tall. Flere steder i datamaterialet ser det ut til at elevene ofte ignorerer minustegnet som en unær funksjon og i stedet behandler tallet som om det er positivt selv om minustegnet står foran tallet. I omdannelsen fra tekstoppgaven til representasjonen med symboler vil dette være en viktig del av regnestykket siden det ikke er det samme å addere og subtrahere tall hvis et tall er negativt i stedet for positivt.

Videre vil jeg presentere en episode fra arbeidet med oppgave 3 der gruppe A nærmer seg en symbolsk representasjon. I denne oppgaven skal elevene finne *forskjellen* mellom to temperaturer der den ene temperaturen er positiv og den andre er negativ. Elevene regnet ut dette først ved å bruke positive tall og da ble regnestykket 17 + 4 = 21. Jeg spurte hvordan regnestykket ville blitt hvis de brukte tallet -17 i stedet for 17, og følgende samtale oppsto:

95.	Anne:	17 + 4 = 21
96.	Jeg:	Ja, men det var da minus 17?
97.	Anders:	Ja, og da går det ikke.
98.	Jeg:	Og likevel fikk dere riktig svar.
99.	Anders:	Æ kommer ikke på noe annet enn å skriv det med skrift da.
100.	Jeg:	Okei. Enn hvis dere bruker noen negative tall da? Eller hvis dere skal regne ut forskjellen da, hvis det hadde vært 10 grader i Elverum og 4 grader i Bergen.
101.	Anders:	10 og 4.. Da hadde jeg tatt minus. 6.
102.	Jeg:	Ja, da hadde du tatt 10 minus 4 og fått 6.
103.	Anne:	Mhm.

I episoden over trekker jeg linjer til hvordan man regner ut forskjellen hvis man opererer med positive tall, og jeg spør elevene hvordan de hadde regnet hvis det bare var positive tall (linje 100). De tok da det største tallet og subtraherte det minste tallet (linje 101). I fortsettelsen av samtalen spør jeg om de kunne brukt samme fremgangsmåte også til denne tekstoppgaven, og samtalen utartet seg slik:

104. Jeg:	Går det an å gjøre det samme her da? For da startet du med det største tallet, 10 grader. Og så trakk du fra 4 som er det minste. Og da fikk du 6 grader. Enn hvis dere gjør det samme her da?
105. Anders:	Ta 21 og trekke fra 4.
106. Jeg:	Det var ikke 21 da, men 17. Minus 17 og 4. Hva som er størst av dem da?
107. Anders:	4.
108. Jeg:	Ja.
109. Anders:	Så 4 minus 17. 21. Ja! Minus minus.
110. Jeg:	Minus, minus ja, hva får dere da?
111. Anders:	21!
112. Jeg:	Mhm. Sånn kan det stilles opp. Men hvorfor minus minus?
113. Anders:	Så det ska ikke vær minus minus, bare minus?
114. Jeg:	Det e riktig det, men når dere har to minustegn her nå, hvordan regner dere ut det da? Hvorfor ble det 21? Når dere har 4 minus minus 17.
115. Anders:	Siden vi har 4 på.. 4 plussgrader. Og så trekker vi fra 17. Nei. Jo. Nei. 4 pluss og så tar vi bort 17. Men det burde ikke gå. 4 minus 17. Så vi må ha nå som e større enn begge tallene.

Hvis man skal ta det største tallet og subtrahere det minste vil det i dette tilfellet bli 4 – -17. Dette kommer Anders frem til i linje 109 ved å overføre samme fremgangsmåte som han brukte for å finne forskjellen på to positive tall. Å subtrahere et negativt tall betyr det samme som å addere, men dette er utfordrende å se ut i fra denne konteksten. Regnestykket som de hadde helt i starten (17 + 4) kan gi elevene mer mening enn regnestykket med to minustegn etter hverandre. Jeg spør hvorfor svaret ble 21 når de hadde 4 – -17 og dette er utfordrende for elevene å svare på. I linje 115 ser vi at Anders forsøker å forklare, men da kommer utsagnet ”men det burde ikke gå”. At to minustegn etter hverandre er det samme som å addere ser ikke ut til å være kjent for elevene i denne gruppen, og utsagnet i linje 113 tyder på at eleven ikke er sikker på at det skal være ”minus minus”. Dette er mer en gjetning som kommer på grunn av spørsmålene jeg stiller. I denne episoden er minustegnets betydning en utfordring for elevene, og i tillegg er egenskaper ved addisjon og subtraksjon utfordrende siden elevene mener at det ikke er mulig å bruke tallene -17 og 4 for å komme frem til svaret 21. Dette er med på å gjøre omdannelsen vanskelig for elevene, og det å benytte bare positive tall i utregningen vil være en enklere fremgangsmåte for elevene enn å bruke negative tall.

5.3 Sammenfatning og diskusjon

Ved å analysere mitt datamateriale fant jeg tre kjennetegn for elevenes arbeid med tekstoppgaver om negative tall i en temperaturkontekst, og i tillegg fant jeg også to hovedutfordringer som elevene møtte i omdannelsen fra en tekstoppgave til en representasjon med symboler. De tre kjennetegnene er at elevene bruker tallinje, elevene unngår negative tall og at elevene finner svaret først og prøver deretter å tilpasse en symbolsk representasjon til dette. De to utfordringene som elevene møtte i omdannelsen var utfordringer knyttet til tolkning av begreper i tekstoppgavene og utfordringer knyttet til negative tall. Sistnevnte førte med seg tre underordnete kategorier som er utfordringer som kan knyttes til tallenes mengde og retning, aritmetiske operasjoner med negative tall og tolkning av minustegnet.

I mitt datamateriale ser jeg at disse kjennetegnene og utfordringene er gjennomgående i omdannelsen fra naturlig språk (tekstoppgave) til en symbolsk representasjon (regnestykke), men jeg har også erfart at formuleringen av tekstoppgaven er med på å påvirke hvordan elevene arbeider med oppgaven og hvilke utfordringer som oppstår. I samtlige oppgaver der elevene skulle finne *forskjellen* var det tydelig at elevene brukte kun positive tall og at disse oppgavene var enkle å løse med positive tall. Disse oppgavene ble nærmest meningsløse hvis elevene skulle trekke inn negative tall i utregningen siden det da bare ble gjetting, prøving og feiling fra elevenes side. Bruk av negative tall gjorde dermed i utgangspunktet enkle oppgaver mer komplisert slik som Kilhamn (2011) omtaler det. Dette var også tilfellet for de andre tekstoppgavene, men spesielt de som omhandlet forskjellen mellom to temperaturer kunne i større grad løses enklere med positive tall enn med negative tall. Dette kan skyldes at forskjellen eller differansen kan illustreres som avstanden mellom to tall på ei tallinje og denne avstanden vil alltid være positiv. I oppgaver der begreper som *kaldere* og *varmere* ble brukt møtte elevene spesielt utfordringen som innebar å tolke begrepenes operasjon. I denne tolkningen var også tallenes mengde og retning en utfordrende faktor siden disse oppfører seg avvikende når det er negative tall man jobber med.

I følge Duval (2006) vil egenskapene som er knyttet til begrepene i en tekstoppgave være utfordrende for elever å oversette til et symbolsk uttrykk. Han skriver at det vil være mange studenter som ikke kommer til å mestre denne omdannelsen, uansett hvilket matematisk objekt man jobber med. Min analyse viser at elevene i stor grad bare prøvde seg frem for å finne et symbolsk uttrykk som passet til tekstoppgaven. Først fant de svaret på oppgaven ved å bruke konteksten og gradestokken, og elevene besvarte oppgaven i den samme konteksten som oppgaven ble gitt i, nemlig temperaturkonteksten. Da de fikk spørsmål om å presentere et regnestykke hentet elevene frem tallene som sto i oppgaveteksten og svaret som de allerede hadde funnet, og deretter testet de ulike operasjoner og fortegn. Så sjekket de hvor rimelig og fornuftig disse hørtes ut i forhold til konteksten. For eksempel forsøker elevene både operasjonene addisjon og subtraksjon i oppgaven hvor temperaturen blir *varmere*, og det er tydelig at denne omdannelsen er utfordrende og dette kan det være flere årsaker til. Blant annet kan det skylde at elevene ikke er vant til å jobbe med temperaturkonteksten siden den ikke brukes så mye i regning med positive tall. Dette kan føre til at det kommer nye begreper som elevene ikke er vant til å tolke, og i tillegg er det negative tall i oppgaven og dette kan gjøre tolkningen enda vanskeligere. En annen kontekst som for eksempel penger bruker man mye også før man begynner med negative tall, mens temperatur er en kontekst som blir innført samtidig som negative tall. Selv om temperaturkonteksten er kjent for elevene gjennom snakk om temperatur i hverdagen er det ikke sikkert elevene har arbeidet og regnet så mye i temperaturkonteksten tidligere, og derfor kan tolkning av begrepene knyttet til temperatur være ekstra utfordrende.

I mitt datamateriale kan jeg identifisere tre semiotiske systemer som elevene brukte i arbeidet med tekstoppgaver om negative tall. Alle oppgavene som elevene fikk var tekstoppgaver og dette innebærer at elevene ble presentert for oppgavene i systemet *naturlig språk*. Jeg stilte elevene spørsmål om hvilket regnestykke som passet til konteksten, og dette innebar at de skulle bruke et symbolsk *notasjonssystem*. I analysen ser vi at et tredje system dukker opp i elevenes arbeid med omdannelse fra tekstoppgave til symbolspråk, og dette er systemet *geometriske figurer*. Elevene tar i bruk representasjonene tallinje og gradestokk fra dette systemet, og disse representasjonene kan være til hjelp for å finne svaret i oppgaven. Bruken av tallinje dukker opp i overgangen mellom de to første systemene. Samtlige grupper benyttet seg av alle de tre semiotiske systemene, og nedenfor følger en figur med disse tre, samt aktuelle representasjoner som tilhører hvert system.

Naturlig språk	**Geometriske figurer**	**Notasjonssystem**
-Muntlig -Regnefortelling	-Gradestokk -Tallinje	-Symboler -Regnestykke

Figur 5: Semiotiske systemer og representasjoner som elevene brukte.

I datamaterialet mitt kommer det frem at omdannelser mellom disse tre systemene foregikk, og samtlige grupper startet i systemet *naturlig språk* siden oppgaven ble gitt innenfor dette systemet. I følge Duval (2006) er man nødt til å jobbe med et matematisk objekt innen flere systemer, og det å kunne skifte det semiotiske systemet er viktig for elevenes forståelse for det matematiske objektet. Å se på omdannelsen fra en tekstoppgave til et symbolsk uttrykk blir derfor viktig, og i tillegg nevner Duval (2006) at nettopp denne omdannelsen er spesielt utfordrende for elevene blant annet fordi de må oversette begrepene i tekstoppgaven til matematiske operasjoner. I min studie fikk elevene jobbe med tekstoppgaver i en temperaturkontekst, og det viser seg at denne konteksten ikke var egnet for å få elevene til å regne med negative tall siden denne konteksten åpner opp for at utregningene kan utføres med positive tall. Elevene jobbet derfor med temperatur og ikke med negative tall, og dette blir to separate kontekster som elevene ikke kobler sammen. I følge Duval krever en matematisk forståelse en indre koordinering mellom ulike semiotiske representasjoner, og samspillet mellom ulike representasjoner skal hjelpe elevene å forstå, men dette skjer ikke hvis elevene ikke knytter de ulike representasjonene sammen. I min studie blir representasjonene tekstoppgave i temperaturkontekst og symbolsk uttrykk separate objekter som elevene ikke kobler sammen, og dermed vil ikke dette hjelpe elevene til å forstå negative tall bedre. Hvis elevene ikke utvikler evnen til å koordinere mellom ulike semiotiske systemer vil to forskjellige representasjoner anses som to forskjellige objekt uten relasjoner i mellom dem, selv om de er to representasjoner av det samme objektet. Man er nødt til å gjøre elevene i stand til å koble sammen de forskjellige måtene matematiske objekt kan representeres på siden dette er viktig for læring i matematikk.

Whitacre et al. (2011) skriver at de fleste kontekstene man benytter i arbeidet med negative tall som temperatur, penger og høyde er tilgjengelige uten bruk av negative tall, og dette kommer tydelig frem i studien min siden elevene benytter seg i stor grad av bare positive tall i arbeidet. Det vil ofte være mer naturlig for elevene å bruke positive tall, og Kilhamns (2011) begrep ”making a simple problem complicated” poengterer at en oppgave kan bli mer komplisert enn den egentlig er hvis elevene skal bruke negative tall for å løse den. Det var flere eksempler på dette i min analyse der elevene først løste oppgaven enkelt ved å bruke positive tall. Da jeg etterspurte negative tall ble oppgavene vanskeligere og mer kompliserte for elevene å forstå. Bruken av kontekster der negative tall er unødvendig kan i følge Whitacre et al. (2011) svekke nytteverdien av negative tall. I den historiske utviklingen så vi at negative tall ble godtatt først når tallene ble betraktet som abstrakte og formelle tall, men også fordi de løste matematiske problemer som var helt avhengige av negative tall. Mye av motstanden til negative tall skyldtes at man så på dem som unødvendige siden hverdagsproblemene fint kunne løses uten negative tall. De fire oppgavene jeg brukte i min studie blir eksempler på dette siden de også fint kan løses uten å bruke negative tall.

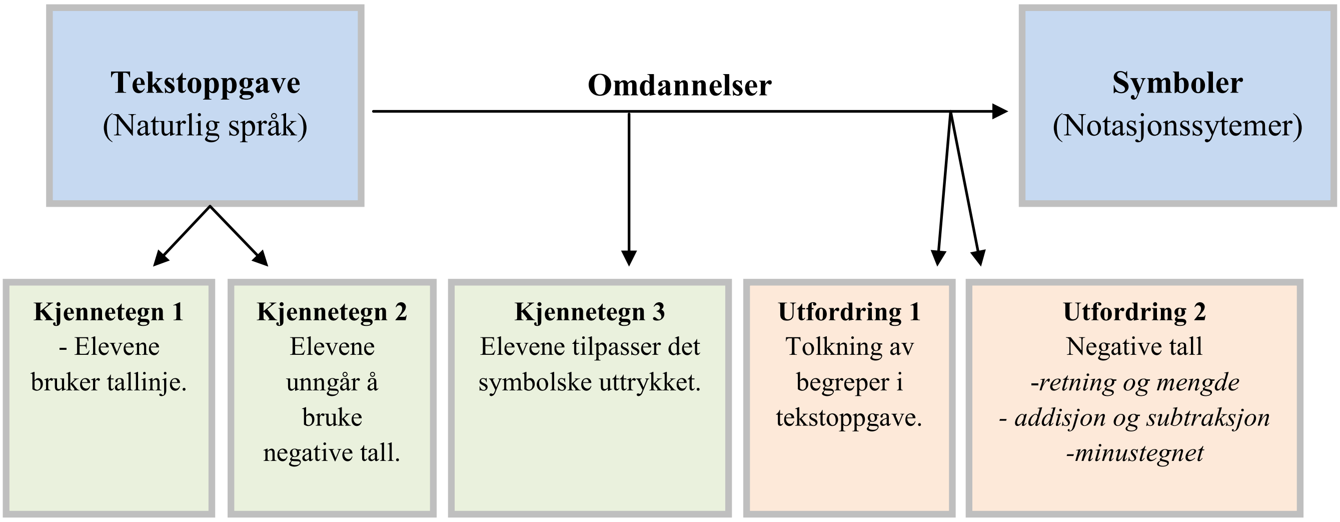
Å arbeide med negative tall i en temperaturkontekst kan ut i fra min analyse virke meningsløst på mange måter, men samtidig skal ikke verdien av denne konteksten undervurderes. Duval (2006) skriver at ulike representasjoner har ulikt potensial, og hver representasjon kan komme med ulike bidrag til forståelsen. Ved positive tall er regnefortellinger viktige for å kunne resonnere og konkretisere, og ved et regnestykke som for eksempel 23 + 6 kan vi bruke regnefortellingen til å illustrere at man for eksempel har 23 klinkekuler og får 6 klinkekuler til. Et regnestykke som inneholder negative tall vil derimot ikke kunne konkretiseres like enkelt som et regnestykke med positive tall, og videre vil jeg diskutere potensialet til tekstoppgaver med temperaturkontekst i forbindelse med undervisning av negative tall.

I min studie kunne flere av utfordringene ved negative tall som jeg observerte hos elevene knyttes til utfordringer som tidligere forskere også har funnet, og derfor vil det være interessant å se på om temperaturkonteksten kan ha vært til hjelp for elevene i utfordringer som var knyttet til mengde og retning, aritmetiske operasjoner og minustegnets betydning. Temperaturkonteksten har tett tilknytning til gradestokken og tallinja, og representasjoner som tallinja kan hjelpe elevene med å se sammenhenger og oppfatte tallenes ordning og rekkefølge. Når det gjelder regning med negative tall viser min analyse at denne konteksten ikke er så egnet. Tallinja vil være behjelpelig i utfordringer knyttet til retningen til tallene, men min analyse tyder på at tallenes mengde og retning likevel forvirret elevene siden de ikke oppfører seg sammenfallende ved negative tall. For å finne ut om det var tallet eller tallets mengde som skulle øke ved regnestykket -33 + 16 var det noen elever som brukte tallinja. Et eksempel på dette er at elevene først hadde svart at svaret ble -49, men da de utførte denne utregningen ved å bruke tallinja fikk de svaret -17. Dette kan være en indikasjon på at tallinja er et hjelpemiddel for å se sammenhengen mellom tall og hvilken retning operasjonen medfører seg, og i dette regnestykket går det fint an å bruke tallinjen for å konkretisere at temperaturen blir 16 grader varmere. Å utføre regning som addisjon og subtraksjon med negative tall på tallinja og i en temperaturkontekst vil likevel kunne være utfordrende i andre situasjoner, og et eksempel på dette er at vi ikke kan si at en temperatur øker med et negativt antall grader. Dette betyr at addisjon med et negativt tall ikke kan representeres med temperatur og tallinje, og derfor vil det være begrensninger ved bruk av tallinja og temperatur.

Ingen representasjon kan alene dekke alle aspekt ved et begrep, og det er nettopp derfor vi er nødt til å bruke variasjoner av representasjoner for å kunne dekke konseptet så godt som mulig (Duval, 2006). Alle representasjoner vil ha begrensninger, og ved bruk av tallinje i forbindelse med negative tall vil jeg si at begrensningene handler om at man ikke kan bruke den til å illustrere regning med negative tall. Den er ikke til hjelp for å forstå alle regnereglene som er knyttet til negative tall, men tallinja vil derimot kunne gi elevene mulighet til å se sammenhenger mellom tallene og hvor negative tall står i forhold til positive tall. Kilhamn (2011) poengterer at når man jobber med oppgaver om negative tall er det viktig å tenke gjennom hva målet med oppgaven er. Hvis målet er at man skal løse oppgaven enklest og raskest mulig er det ikke noe i veien for at elevene kan bruke bare positive tall, og det ville faktisk ha vært en undervurdering av deres evner hvis vi hadde forventet at de skulle bruke negative tall og en mer komplisert fremgangsmåte enn nødvendig for å finne svaret. Er derimot målet at elevene skal utvikle resonnering rundt negative tall ville det vært dumt om de unngikk å bruke negative tall, og derfor er det viktig for læreren å være bevisst på hva målet med oppgavene er, siden elevene ser ut til å løse de uten negative tall så lenge de ikke blir bedt om noe annet. For at temperaturkonteksten skal kunne bidra til å hjelpe elevene i arbeidet med negative tall kunne man først ha jobbet med denne konteksten i forbindelse med positive tall. Da ville konteksten ha blitt mer kjent for elevene. I tillegg må læreren være bevisst på hvilke begrensninger temperaturkonteksten ha samtidig som man er klar over hvilke formål den er egnet til. For eksempel så kan man fint bruke temperaturkonteksten til å illustrere *forskjellen* mellom temperaturer, men ikke til å illustrere subtraksjon av et negativt tall.

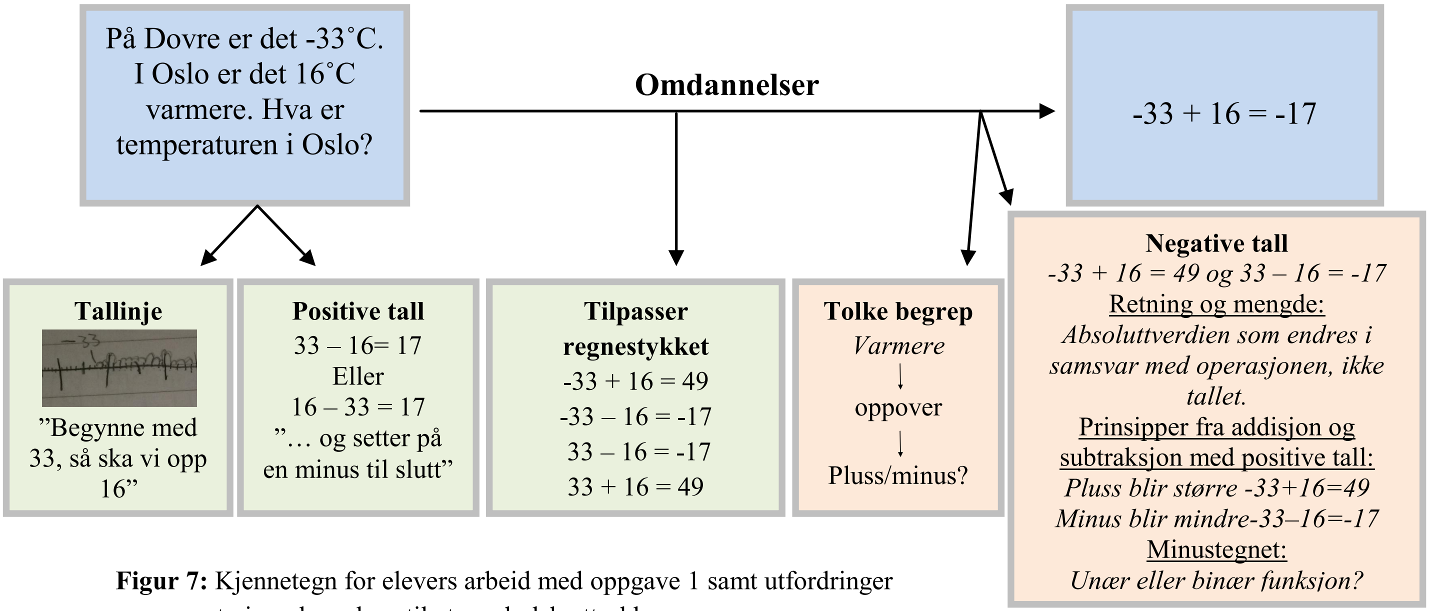
I min studie ser vi at bruk av representasjonen tallinje er et sentralt kjennetegn siden alle gruppene benyttet seg av tallinjen en eller flere ganger da de løste oppgavene. Dette kan være en tallinje som elevene fysisk tegner opp eller en mental tallinje som elevene forestiller seg i hodet. I noen av elevbesvarelsene får vi eksempler på en omdannelse mellom tre ulike semiotiske systemer, der elevene først begynner i systemet naturlig språk med tekstoppgavekonteksten, og deretter går de til systemet geometriske figurer siden de bruker tallinjen. Til slutt kommer de frem til systemet med notasjonsspråk der de ender opp med en symbolsk representasjon i form av et regnestykke.

I følge mitt forskningsspørsmål skulle jeg se på hva som kjennetegnet elevers arbeid med tekstoppgaver knyttet til negative tall og temperatur, og i tillegg skulle jeg se på hvilke utfordringer som kunne oppstå i omdannelsen fra en hverdagslig kontekst til en symbolsk representasjon. Med utgangspunkt i Duvals (2006) teori om transformering av semiotiske representasjoner og teori om negative tall har jeg laget en modell for hvordan omdannelsen mellom tekstoppgaver og symboler foregikk hos elevene i min studie. Jeg vil presentere en figur som oppsummerer mine funn og som viser elevenes vei fra en tekstoppgave gitt i systemet naturlig språk til en representasjon med symboler i notasjonssystemet. I denne omdannelsen var det som tidligere nevnt spesielt tre kjennetegn ved elevenes arbeid som skilte seg ut og to hovedutfordringer som elevene sto ovenfor. Den generelle figuren ble slik:



Figur 6: Kjennetegn for elevers arbeid med tekstoppgaver om negative tall og temperatur, samt utfordringer som oppstår i omdannelsen fra en tekstoppgave til symboler.

I denne modellen knytter jeg inn de mest sentrale kjennetegnene ved elevenes arbeid med tekstoppgavene, samt utfordringene som elevene møtte i omdannelsen. Disse er markert med vertikale piler og er plassert med hensyn til hvor de omtrent fant sted i elevenes vei fra tekstoppgave til symboler. De to første kjennetegnene er direkte tilknyttet elevenes arbeid med tekstoppgavene og oppsto naturlig på grunn av temperaturkonteksten og formuleringen av oppgavene. Det tredje kjennetegnet oppsto derimot på grunn av mine spørsmål der jeg ønsket at elevene skulle komme frem til et symbolsk uttrykk. Derfor er dette kjennetegnet plassert slik at det tilhører omdannelsen mellom tekstoppgaven og det symbolske uttrykket. Deretter kommer de to typene utfordringer som elevene møtte i omdannelsen. Hvis jeg tar for meg en av oppgavene elevene arbeidet med og plasserer denne i figur 6 får vi en grov oversikt over elevenes kjennetegn og utfordringer knyttet til denne oppgaven. I figur 7 presenterer jeg en kort analyse av elevarbeidet i oppgave 1 ved å bruke den generelle figuren som et analyseverktøy:



Figur 7: Kjennetegn for elevers arbeid med oppgave 1 samt utfordringer som oppsto i omdannelsen til et symbolsk uttrykk.

I figuren ser vi veien fra en tekstoppgave til et uttrykk med symboler. Elevenes arbeid kjennetegnes ved at de bruker tallinje, positive tall og at de tilpasser et regnestykke. I omdannelsen møter elevene to typer utfordringer og disse er knyttet til tolkningen av begrepene i oppgaveteksten og utfordringer ved negative tall. Ved å bruke to ulike semiotiske systemer til å representere negative tall er det mulighet for å øke forståelsen omkring dette matematiske begrepet, men resultatet av min analyse viser at omdannelsen mellom disse to representasjonene er utfordrende for elevene.

6 Avslutning

Hensikten med denne oppgaven har vært å identifisere hva som kjennetegner elevers arbeid med tekstoppgaver om negative tall gitt i en temperaturkontekst, samt å belyse hvilke utfordringer elevene kan møte i omdannelsen mellom de to semiotiske systemene naturlig språk (tekstoppgaver) og notasjonssystem (representasjon med symboler, regnestykke). Dette har jeg gjort ved å observere elever på sjuende trinn i arbeid med tekstoppgaver om negative tall.

I arbeidet med tekstoppgavene brukte elevene i utgangspunktet kun positive tall for å finne svaret til tross for at oppgaveteksten inneholdt negative tall. Gallardo (2003) beskriver utregning med positive tall i en kontekst som egentlig inneholder negative tall som meningsløs. Jeg vil ikke beskrive elevenes bruk av positive tall som meningsløs, men jeg vil heller se på det som et viktig kjennetegn i arbeid med oppgaver om negative tall. En oppgave gitt i temperaturkontekst avhenger ikke av at man regner med negative tall, og derfor vil det ikke være meningsløst å regne med positive tall. Elevene vet at dette fint kan løses med positive tall, og å regne med negative tall vil i mange tilfeller faktisk være mer krevende og uforståelig enn å løse oppgavene med positive tall. Kilhamn (2011) skriver at å forvente at elevene bruker negative tall vil være det samme som å undervurdere deres evne til matematisk resonnering. Bruken av positive tall vil likevel føre til at elevene møter utfordringer med å beholde det samme matematiske objektet, siden dette i utgangspunktet består av negative tall. Det er viktig å arbeide med et matematisk objekt i flere semiotiske systemer enn bare ett system (Duval, 2006), og ved å være bevisst på dette i undervisningen kan man jobbe med det samme matematiske objektet ved å bruke forskjellige representasjoner og semiotiske systemer. Dette kan bidra til at elevene blir kjent med det samme matematiske objektet gjennom flere representasjoner og dette kan bidra til å øke deres forståelse.

De fleste kontekster som blir brukt til undervisning av negative tall er i stor grad meningsløse på den måten at de streng tatt ikke er avhengig av negative tall for å kunne løses. Både temperatur, penger og høyde er kontekster som fint kan løses ved å bruke positive tall. I tillegg er ikke temperaturkonteksten egnet til å forklare og gi mening til alle de aritmetiske operasjonene med negative tall. Det vil for eksempel være umulig å gi mening til addisjon av et negativt tall siden vi ikke kan si at temperaturen øker med et negativt antall grader. Temperaturkonteksten har en tydelig tilknytning til tallinjen og gradestokken og disse semiotiske representasjonene vil være nyttig for å gi elevene mulighet til å se tallenes ordning på tallinja og hvor de negative tallene er plassert. Samtidig kan elevene også se sammenhengen mellom tall og skaffe seg en ordinal forståelse for tall. Representasjoner innehar ulikt potensial der hver representasjon kommer med ulike bidrag som kan hjelpe elevenes forståelse. En kontekst med penger legger veldig vekt på mengde og ikke retning slik som tallinje og temperaturkonteksten gjør. For lærere blir det viktig å være bevisst på hvilken kontekst som passer til hvilket formål. Hvis man skal jobbe med addisjon av negative tall vil det være mer hensiktsmessig å bruke konteksten penger i stedet for temperatur, men hvis man skal finne forskjellen mellom tall kan det være lurt å bruke temperaturkontekst og tallinje. Dette understreker viktigheten av å bruke varierte representasjoner i undervisningen, og for læreren blir det viktig å kjenne til begrensningene til de ulike kontekstene og representasjonene slik at man i størst mulig grad benytter seg av egnede og gunstige representasjoner i arbeidet med negative tall.

I det historiske perspektivet ble ikke de negative tallene anerkjent fordi de var nyttige til å løse hverdagsproblemer, men fordi de kunne brukes til å løse andre matematiske problemer. Man ga opp å gi de negative tallene mening i hverdagslige kontekster, og til slutt var det den arabiske fremgangsmåten med krav om opprettholdes av et system som ”vant”. Deres inngang til negative tall innebar at systemet som var gjeldende for positive tall måtte bevares, og derfor videreutviklet de systemet til også å gjelde for negative tall. En slik inngang til de negative tallene kan være mer hensiktsmessig enn hverdagslige kontekster som blir kunstige og av og til meningsløse.

I metodekapitlet skrev jeg at mine funn ikke kan generaliseres siden dette er en studie med få forskningsobjekter som ikke er representative for hele befolkningen. Til tross for at det var et begrenset utvalg av elever som ble observert i min studie kan funnene jeg har presentert ovenfor gi meg og andre lærere innspill til egen undervisning. Kjennetegnene og utfordringene jeg har kommet frem til kan overføres til flere klasserom hvis andre lærere gjenkjenner elementer og tendenser som belyses i denne studien. Min studie viser at det er viktig å være bevisst på hvordan negative tall undervises, og hvis man tar i bruk kontekster er det også vesentlig at man tenker gjennom hva målet med kontekstene er. Ingen hverdagslig kontekst kan for eksempel vise multiplikasjon med negative tall, og i et slikt tilfelle vil den arabiske inngangen med et system av progresjon være sentral og mer hensiktsmessig.

Litteraturliste

Alseth, B. (2008). *Multi: matematikk for barnetrinnet: 7: Grunnbok 7a*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Altiparmak, K., & Özdoğan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 41*(1), 31-47. doi: 10.1080/00207390903189179

Aubert, V. (1985). *Det skjulte samfunn*. Oslo: Universitetsforlaget.

Bakke, B. (2007). *Grunntall: matematikk for ungdomstrinnet: 10*. Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal, 93* (4), 373-397.

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., & Schappelle, B. (2013). Using order to reason about negative numbers: the case of Violet. *Educational Studies in Mathematics* doi: 10.1007/s10649-013-9519-x

Bofferding, L. (2010). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. *In P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Red.), Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 703-710. Columbus, OH.

Bruno, A., & Martinon, A. (1999). The teaching of numerical extensions: The case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(6), 789-809.

Cummins, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and instruction*, *8*(3), 261-289.

Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation registers. *Proceedings of the 10th International Conference on Mathematics Education, Copenhagen, Denmark.*

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring*. Oslo: Abstrakt forlag.

Freudenthal, H. (1983). Negative numbers and directed magnitudes. *Didactical phenomenology of mathematical structures* 432-460.

Gallardo, A. (1995). Negative Numbers in the Teaching of Arithmetic. I D. Owans, M. Reed & G. Millsaps (red.). *Conference proceedings of the 17th annual meeting for the psychology of mathematics education in North America, (Vol. 1, s. 158-163). Ohio, North America. PME.*

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 171-192. doi: 10.1023/A:1016210906658

Gallardo, A. (2003). " It is Possible to Die Before Being Born". Negative Integers Subtraction: A Case Study. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 2, s. 405-412) Honolulu, Hawaii: PME*

Gallardo, A., & Rojano, T. (1994). School algebra. Syntactic difficulties in the operativity with negative numbers. *Proceedings of the XVI International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, (Vol. 1, s. 159-165). Louisiana State Univesity, USA.*

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *In A. A. Cuoco (Ed.), The roles of representation in school mathematics: NCTM 2001 yearbook (s. 1-23). Reston, Virginia: NCTM*

Kilhamn, C. (2009). Addition and subtraction of negative numbers using extensions of the metaphor "arithmetic as motion along a path". I Winsløw, C. (Red.). *Nordic research in mathematics education. Proceedings from Norma08, (s.17-23). København, Danmark.*

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers.* University of Gothenburg. Hentet fra http://hdl.handle.net/2077/24151

Kvale, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Lamb, L. L., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., Whitacre, I., & Lewis, M. (2012). Developing symbol sense for the minus sign. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(1), 5-9.

Linchevski, L., & Williams, J. (1999). Using Intuition From Everyday Life in 'Filling' the gap in Children's Extension of Their Number Concept to Include the Negative Numbers. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 131-147. doi: 10.1023/A:1003726317920

Manchester, P. D. (2011). *Young Children Conceptualize the Relationships Among Positive and Negative Numbers and Zero.* Kent State University. Hentet fra http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=kent1301668039

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Nortvedt, Guri A. (2013). Leseforståelse og matematikk. *Bedre Skole*. ISSN 0802-183X. (1), s 26- 31

Pascal, B. E. T. S. (1958). *Pascal's Pensées*. New York: E.P. Dutton.

Postholm, M. B. (2011). *Læreren med forskerblikk: innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Prather, R. W., & Alibali, M. W. (2008). Understanding and using principles of arithmetic: Operations involving negative numbers. *Cognitive science, 32*(2), 445-457.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (2012). Taking away and determining the difference—a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics, 79*(3), 389-408.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv.* Oslo: Cappelen akademisk.

Torkildsen, S. (2006). *Sirkel: matematikk for ungdomstrinnet: 8 A: Oppgavebok*. Oslo: Aschehoug.

Utdanningsdirektoratet. (2014). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet 27.04.2014, fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 341-359. doi: 10.1023/A:1020229023965

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction, 14*(5), 469-484.

Vlassis, J. (2008). The Role of Mathematical Symbols in the Development of Number Conceptualization: The Case of the Minus Sign. *Philosophical Psychology, 21*(4), 555-570. doi: 10.1080/09515080802285552

Vygotsky, L. S., Rieber, R. W., & Carton, A. S. (1987). *The Collected Works of L.S. Vygotsky: Volume 1: Problems of General Psychology, Including the Volume Thinking and Speech*: Plenum Press.

Whitacre, I., Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., & Lewis, M. (2011). *Integers: History, textbook approaches, and children's productive mathematical intuitions.* Paper presented at the Proceedings of the 33rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Vedlegg 1: Oppgaveark til elever i 7. klasse

Navn:______________________

1. Fyll inn tallet som mangler i den tomme ruten.

   a) $3 - 5 = \square$ c) $5 + \square = 3$

   b) $-9 + 4 = \square$ d) $5 - \square = 8$

2. Forklar hvordan du kom frem til svaret ditt i oppgave 1a:

____

____

____

____

3. Lag en regnefortelling til regnestykket du kom frem til i oppgave 1b:

____

____

____

____

____

4. Lag en regnefortelling til regnestykket du kom frem til i oppgave 1c:

____

____

____

____

5. Ei natt var temperaturen 12 grader under null og frem til morgenen økte den med 8 grader.

   a) Hvor mange grader var det om morgenen?

   b) Skriv regnestykket som passer til tekstoppgaven:____________________________

6. Temperaturen er 5 grader under null kl. 1 om natten og synker med 3 grader i de neste tre timene.

   a) Hva er temperaturen kl. 4?

   b) Skriv regnestykket som passer til tekstoppgaven:____________________________

7. Jonas har en sum penger og mottar 100 kr.

   a) Han har da 50 kr, hvor mye penger hadde han fra før?

   b) Hvordan tenkte du når du løste denne oppgaven? ____________________________

8. Filosofen Platon ble født i år 427 før Kristus og døde i år 347 før Kristus. Hvor gammel var han da han døde?