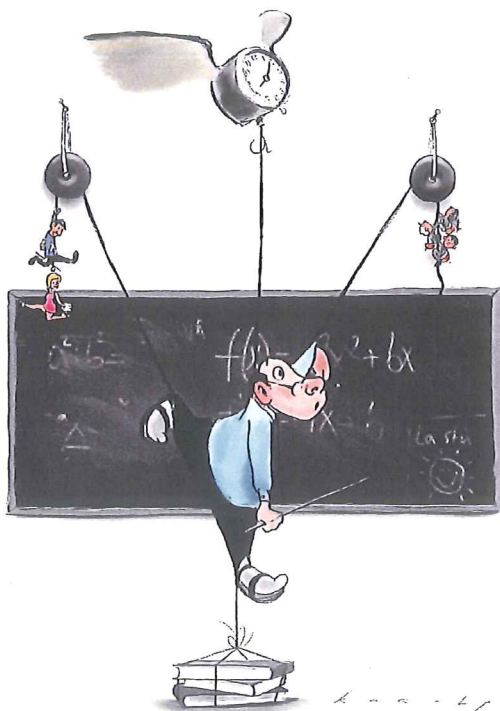


Bjørge Eilertsen

Hva påvirker undervisningen til matematikklærere?

- en kvalitativ studie i hvordan fire faktorer påvirker undervisningen til to grunnskolelærere.



Trondheim, mai 2013



Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Bjørge Eilertsen

Hva påvirker undervisningen til matematikklærere?

- en kvalitativ studie i hvordan fire faktorer påvirker undervisningen til to grunnskolelærere.

What affects the teaching of mathematics teachers?

- a qualitative study on how four factors affect the teaching of two elementary school teachers.

Masteroppgave, Master i matematikdidaktikk
Trondheim, mai 2013

Veileder:	Svein Arne Sikko
-----------	------------------

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Høgskolen har intet ansvar for synspunkter eller innhold i oppgaven.
Framstillingen står utelukkende for studentens regning og ansvar.

Forord

Denne masteroppgaven avslutter min femårige utdanning ved Høgskolen i Sør-Trøndelag. Jeg vil rette en takk til lærerne ved Høgskolen for god veiledning gjennom hele studiet. Spesielt vil jeg takke veilederen min Svein Arne Sikko for hans enestående tilgjengelighet på e-post, og hans evne til å tilpasse seg mine behov som student ved å gi respons både på hverdager og feriedager. Jeg vil også rette en takk til pedagogikklærer Svein-Otto Skjærvold som virkelig fikk meg til å brenne for læreryrket. Han viste i praksis viktigheten av å skape gode og tette relasjoner med elever.

Jeg vil takke skolene og lærerne som stilte opp på i denne studien. Uten dem hadde det ikke blitt en masteroppgave. Jeg vil takke skolene for måten de tok imot meg og fikk meg til å føle meg velkommen.

Masteroppgaven er et produkt av mange personer. Mine foreldre og svigerforeldre som har passet barna for at jeg skulle få jobbe med oppgaven, min rektor som har sørget for at jeg har fått fri og tid til å konsentrere meg om dette studiet fordi at han tror på kompetanseheving, og aller mest vil jeg takke min kone Eileen som har fått et ekstra ansvar for barna når jeg har jobbet med oppgaven, og når jeg har vært bortreist.

Jeg er takknemlig for det jeg har lært gjennom hele lærerskolen, og spesielt gjennom masterstudiet i matematikdidaktikk. Masteroppgaven er prikken over i-en for meg, og den har gjort meg enda mer interessert i de mekanismene som utspiller seg i forhold til undervisning av matematikk.

Harstad, mai, 2013

Bjørge Eilertsen

Sammendrag

Hva påvirker undervisningen til matematikklærere?, er en kvalitativ studie av hvordan fire faktorer påvirker to grunnskolelæreres undervisning i matematikk.

Forskningsspørsmål

- Hvordan påvirker formidlingsressurser lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker rammefaktorene lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker kollegaer lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker lærernes kompetanse matematikkundervisningen?

Teori

Den teoretiske rammen for studien tar utgangspunkt i Skempes (1976) teorier om ulike typer forståelser i matematikk, Hiebert et al. (1997) sine kjennetegn på klasserom som stimulerer til forståelse av matematikk og studier som viser hvordan ulike faktorer påvirker lærernes undervisning i matematikk.

Metode

For å svare på forskningsspørsmålene brukte jeg en instrumentell kollektiv kasusstudie som metode. Jeg observerte undervisningen til to lærere og intervjuet dem etter observasjonsperioden var avsluttet.

Resultat

Alle faktorene som studien undersøker påvirker fokuslærernes undervisning. Det er likevel ikke entydig hvordan faktorene påvirker en lærer. Læreboken har ulik påvirkning på fokuslærerne og de baserer seg på læreboken i forskjellig grad. Ettersom rammefaktorene er forskjellige, påvirket de også naturligvis på forskjellig måte. Liten tid til forberedelser og høyt elevantall gjør at fokuslærerne velger instrumentell tilnærming og tradisjonell undervisning, og kollegaer som kan bidra med kunnskaper forbedrer fokuslærernes praksis. Lærernes kompetanse har en sentral påvirkning. Vi ser dette på læreren som er utdannet matematikdidaktiker, fordi et fravær av denne kompetansen ville ført til at læreboken ville fått større innflytelse på hans undervisning, noe som i sin tur ville ledet mot undervisning preget av instrumentell forståelse.

Abstract

What affects the teaching of mathematics teachers?, a qualitative study of how four factors affect two primary teachers teaching in mathematics.

Research questions

- How do communication resources affect teachers' mathematics teaching?
- How do frame factors affect teachers' mathematics teaching?
- How do colleagues affect teachers' mathematics teaching?
- How do subject knowledge and pedagogical content knowledge affect teachers' mathematics teaching?

Theory

The theoretical framework for the study is based on Skemp (1976) theories about various understandings of mathematics, characteristics of classrooms that encourage understanding of mathematics (Hiebert et al. 1997), and studies showing how various factors affect how teachers' teach mathematics.

Method

To answer the research questions, I used an instrumental collective case study method. I observed the teaching of two teachers and interviewed them after the observation period was completed.

Results

All factors examined in this study affect the teachers' teaching. However, it is still not clear how factors influence teachers, because they affect differently on the teachers in this study. The textbook has different impact on teachers in this study and the teachers rely on textbooks to a different degree. As the frame factors are different in the two cases, they influenced the teaching in different ways. Little preparation time and high student number allows the focus teachers to choose instrumental approach and traditional teaching. Colleagues who can contribute with knowledge, helps improving the focus teachers' practice. Teacher competence is a key influence. We see this in the teacher who is educated in the didactics of mathematics, because the absence of this knowledge would have given the textbook a greater influence on his teaching, which in turn would lead to teaching characterized by instrumental understanding.

Innhold

1	Innledning.....	1
1.1	Bakgrunn for valg av oppgave.....	1
1.2	Formål og problemstilling.....	2
1.3	Begrepsavklaringer.....	2
1.4	Forhåndsforståelse av problemstillingen.....	3
1.5	Masteroppgavens oppbygning.....	4
2	Teoretisk rammeverk.....	5
2.1	Kunnskap og forståelse i matematikk.....	5
2.1.1	Instrumentell forståelse og relasjonell forståelse.....	5
2.1.2	Fordeler og ulemper med relasjonell og instrumentell forståelse.....	6
2.1.3	Begrepskunnskap.....	9
2.1.4	Prosedyre kunnskap.....	9
2.2	Læring i matematikk.....	11
2.2.1	Klasseromskultur som legger til rette for forståelse i matematikk.....	11
2.2.2	Intelligent learning & habit learning.....	14
2.2.3	Meningsfull læring og pugg.....	15
2.2.4	Kunnskap på primærnivå og refleksjonsnivå.....	15
2.3	Undervisning i matematikk.....	16
2.3.1	Å undervise for å utvikle elevenes forståelse.....	16
2.3.2	Læreres bruk av læreboken.....	18
2.3.3	Ulik innfallsvinkel til undervisning gir ulik kunnskap.....	18
2.3.4	Den didaktiske kontrakt.....	19
2.3.5	Matematikkdidaktisk kunnskaps påvirkning på læring.....	20
3	Metode.....	21
3.1	Valg av metode.....	21
3.2	Valg av informanter.....	22
3.3	Innsamling av data.....	22
3.3.1	Observasjon.....	23
3.3.2	Intervju.....	25
3.3.3	Triangulering.....	26
3.4	Transkripsjon.....	26
3.5	Hermeneutikken.....	27

3.6	Refleksjon rundt metodene.....	27
4	Analyse.....	29
4.1	Analyse av observasjon i matematikkundervisningen.....	29
4.1.1	Hendelse 1 – Kvadratiske likninger.....	29
4.1.2	Hendelse 2 – Forståelse av likhetstegnet.....	35
4.1.3	Hendelse 3 – Forholdsregning med flagg og rektangler.....	38
4.1.4	Hendelse 4 – Andre time med forholdsregning.....	43
4.1.5	Oppsummering av observert undervisning.....	47
4.2	Fokuslærerne om hvilke faktorer som påvirker matematikkundervisningen.....	48
4.2.1	Formidlingsressursers påvirkning.....	48
4.2.2	Rammefaktorenes påvirkning.....	52
4.2.3	Kollegaers påvirkning.....	56
4.2.4	Lærernes kompetanses påvirkning.....	58
4.2.5	Oppsummering av faktorer som påvirker matematikkundervisningen.....	63
5	Diskusjon.....	65
5.1	Observasjonen av lærernes undervisning.....	65
5.2	Faktorer som påvirker matematikkundervisningen.....	68
5.2.1	Hvordan påvirker formidlingsressurser lærernes matematikkundervisning.....	68
5.2.2	Hvordan påvirker rammefaktorene lærernes matematikkundervisning.....	69
5.2.3	Hvordan påvirker kollegaene lærernes matematikkundervisning	71
5.2.4	Hvordan påvirker lærernes kompetanse matematikkundervisningen.....	72
6	Konklusjon og perspektivering.....	74
6.1	Konklusjon.....	74
6.2	Perspektivering.....	75
7	Referanser.....	78
8	Vedlegg.....	80
8.1	Transkriberingsnøkkel.....	80
8.2	Samtykkeerklæring.....	81

1 Innledning

Denne masteroppgaven undersøker hvordan *matematikkundervisningen* til to grunnskolelærere påvirkes av fire sentrale faktorer. Undersøkelsen har foregått på to skoler i Nord-Norge; en barneskole og en ungdomsskole. Med oppgaven vil jeg se på hvordan faktorene påvirker den matematiske forståelsen undervisningen legger til rette for. Jeg håper oppgaven kan gi praktiske og teoretiske perspektiver på utfordringer i forhold til å undervise for å utvikle elevenes forståelse i matematikk. I dette kapitlet tar jeg for meg bakgrunnen for valget av temaet, mine forskningsspørsmål, min forhåndsforståelse og masteroppgavens oppbygning.

1.1 Bakgrunn for valg av oppgaven

Helt fra starten av min allmennlærerutdanning ved Høgskolen i Sør-Trøndelag var matematikkundervisningen preget av at jeg som elev skulle utvikle min forståelse i matematikk. Dette var helt nytt for meg. Jeg hadde alltid trodd at hvis man *mestret noe*, forstod man. Eksempelvis mestret jeg derivasjonsalgoritmen på videregående skole. For meg betydde det at jeg hadde forstått derivasjon. På lærerskolen lærte jeg noe nytt. Jeg lærte at det finnes ulike måter å forstå på. Som elev på videregående visste jeg *hvordan* jeg skulle gjøre en matematikkoppgave riktig, men jeg visste ikke alltid *hvorfor* det var riktig. Undervisningen i Matematikk 1 på lærerhøgskolen ble lagt opp slik at høgskolelærerne brukte undervisningsmetoder som støttet seg på at studentene skulle utvikle sin relasjonelle forståelse i matematikk. Studentene skulle øve seg i å forstå hvorfor, ikke bare hvordan. Dette førte til at jeg fikk en ny måte å tenke matematikk på. Jeg grublet på hva det *egentlig* ville si å forstå matematikk, og har i senere tid som lærer prøvd å bruke mine kunnskaper om relasjonell og instrumentell forståelse aktivt i læringssituasjoner i klasserommet (Skemp, 1976).

Etter å ha opparbeidet meg fem års erfaring som lærer har jeg observert at mange lærere har holdningen at matematikk er et puggefag, at man må være flink å huske regler og flink til å regne oppgaver. Når jeg imidlertid snakker med mine kollegaer om å forstå matematikk, er de aller fleste skjønt enige om at det viktigste er å forstå matematikken. Jeg opplever selv at det er en stor kontrast mellom å mene at forståelse er det viktigste i matematikk, men at faget samtidig er et puggefag og et regelstyrt og prosedyrebasert fag. Dette har fått meg til å tenke at matematikklærere kanskje ikke har en homogen oppfatning av hva det vil si å forstå i matematikk. Som ungdomsskolelærer ønsket jeg å forme en undervisning som hele tiden skulle bidra til at elevene skulle utvikle sin relasjonelle forståelse i faget. Dette syntes jeg var vanskelig i enkelte deler av skoleåret. Jeg følte at det ble vanskeligere da det nærmet seg eksamen i 10. klasse. Tids- og pensumpresset gjorde at jeg

prioriterte å formidle regneferdigheter ettersom det er lettest å lære bort, minst tidkrevende og gir kortsiktige resultater (Skemp, 1976). En av ressursene som jeg følte motarbeidet meg var læreboken som startet kapitlene med å presentere en regel, uten å formidle hvorfor regelen virket. Dette medførte at i de timene jeg baserte meg på læreboken, ble resultatet at elevene utviklet sin instrumentelle forståelse. Mangel på kollegaer med matematikdidaktisk kompetanse om forståelse bidro til at jeg savnet noen å diskutere mine undervisningsmetoder med. Noen som kunne komme med idéer og kritiske spørsmål til meg. Noen som bevisst arbeidet for å utvikle elevenes relasjonelle forståelse i matematikk.

1.2 Formål og problemstilling

Formålet med denne masteroppgaven er å undersøke – og lære mer om – hvilke faktorer som påvirker matematikkundervisningen til lærere og hvordan de påvirker. Dette har ledet meg frem til følgende problemstilling:

Hvilke faktorer påvirker matematikkundervisningen til lærere som ønsker å utvikle elevenes forståelse?

Istedenfor å lete etter et endelig svar på den ene faktoren – eller de faktorene – som påvirker matematikklærerne, har jeg valgt å fokusere på *hvordan* utvalgte faktorer, basert på min forhåndsforståelse og teori, påvirker hvilken forståelse lærerne underviser for. Dette har ledet meg inn på fire forskningsspørsmål:

- Hvordan påvirker formidlingsressurser lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker rammefaktorene lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker kollegaer lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker lærernes kompetanse matematikkundervisningen?

1.3 Begrepsavklaringer

Richard Skemp (1976) bruker i sine bøker og artikler begrepene *relational understanding* og *instrumental understanding*, som på norsk kan oversettes med relasjonell forståelse og instrumentell forståelse. Kort fortalt mener Skemp at undervisning som bidrar til at elevene for eksempel forstår hvorfor en regel i matematikk er riktig, eller klarer å bruke matematiske sammenhenger til å designe løsninger på et matematisk problem, for relasjonell forståelse. Instrumentell forståelse omtaler han som «rules without reason» – regler uten mening. Det betyr at en elev som kan derivasjonsalgoritmen, uten å vite hvorfor man kan gjøre det man gjør, har en instrumentell

forståelse av derivasjon. I resten av denne oppgaven kommer jeg til å omtale undervisning som legger til rette for relasjonell forståelse for *relasjonell undervisning*. Undervisning som legger til rette for instrumentell forståelse omtaler jeg som *instrumentell undervisning*.

Eisenhart et al. (1993) beskriver hvordan en students matematikkundervisning påvirkes av kollegaers matematiske syn, samt at studentens fagkunnskap påvirket elevenes muligheter til å oppnå relasjonell forståelse i matematikk. Ifølge Rezat (2012) og Johansson (2006) er det matematiske innholdet i et klasserom sterkt påvirket av læreboken. Mange lærere påstår også at plikten til å følge læreplanen og komme igjennom pensum fører til at de er et offer for et system de selv ikke rår over (Mellin-Olsen, 1984; Røsseland, 2011). Disse synspunktene har ledet meg til fire påvirkningsfaktorer:

- *Formidlingsressurs* – Verktøy, redskaper og hjelpemidler til formidling av lærestoff. Det kan for eksempel være lærebøker, oppgaver, digitale hjelpemidler og konkretiseringsmateriell.
- *Rammefaktorer* – Ressurser som lærere får for å løse læreoppgaven. Det er for eksempel læreplanen, elevtall, klasserom, tid til forberedelser og matematikkrom.
- *Kollegaressurs* – En ressurs som kan være en person som er ansatt som en fagressurs eller faglig veileder på skolen, kollegasamarbeid og team-arbeid.
- *Lærerens kompetanse* – Den enkelte lærers kompetanse i matematikk og matematikdidaktikk.

1.4 Forhåndsforståelse av problemstillingen

Min forhåndsforståelse av problemet var at det kan tenkes at tidsressursen påvirker matematikkundervisning i en tradisjonell retning, noe som igjen påvirker elevenes matematikkforståelse i retning instrumentell (Blomhøj, 1994; Hiebert et al., 1997). Det er kjent at lærere i Norge uttrykker misnøye med at tiden de nå bruker på rapportering, dokumentering og annet byråkratisk arbeid, går ut over tid som bør brukes til undervisningsforberedelser. Tidsmangel har jeg selv opplevd som lærer, og i slike tilfeller har jeg støttet meg på læreboken som formidlingsressurs. Dette fikk meg til å tenke på hvordan ulike faktorer påvirker undervisningen til lærere i matematikk, og hvilken betydning påvirkningen får for elevenes matematiske forståelse.

Hvordan påvirker egentlig læreboken undervisningen til lærere? Hvordan påvirker eksamen, tidsmangel og læreplanen? Har kollegaer innvirkning på hvordan man underviser? Spiller lærernes fagkunnskap og didaktiske kunnskap en rolle for hvilken forståelse elevene utvikler i matematikk? Mange spørsmål kom frem i denne tankeprosessen, og de nevnte ovenfor er bare et utdrag av dem.

Ettersom jeg har arbeidet som lærer i fem år har jeg en fordel med at jeg kjenner lærerpraksisen godt. Jeg kjenner det indre livet på skoler på godt og vondt, og jeg kjenner hvilke mekanismer som rører seg i et klasserom, noe som kanskje gjør meg bedre rustet til å oppfatte ting under observasjon enn studenter som ikke har vært lærere. Imidlertid vil jeg være mer forutinntatt enn det en student kanskje er, noe som kan føre til at jeg tolker mer ut av situasjoner enn det som strengt tatt er nødvendig. Forståelsen min har ført til at jeg har valgt ut noen kategorier basert på egen praksis og teorier (nevnt i kapittel 1.3), og jeg har antakelser om at tidspress vil føre til at lærere baserer seg på læreboken.

1.5 Masteroppgavens oppbygning

I kapittel 2 redegjør jeg for teorien som ligger til grunn for analysen. Kapitlet er delt inn i tre deler. Del 1 tar for seg teorier om matematisk kunnskap og forståelse. Del to tar for seg læring i matematikk og hva som kjennetegner et klasserom som legger til rette for at elevene skal utvikle matematisk forståelse. Del 3 tar for seg undervisning i matematikk; hvilke faktorer som påvirker matematikkundervisningen. I kapittel 3 redegjør jeg for metodene jeg brukte for å finne svar på forskningsspørsmålene mine. Her kommer det frem hvordan jeg valgte informanter, samlet inn data og triangulerte. Kapitlet presenterer også en refleksjon over egne metoder samt litt om hvordan mine egne fordommer kan prege studien. I kapittel 4 analyserer jeg observasjonen av undervisningen, og intervjuene med fokuslærerne, i lys av forskningsspørsmålene og det teoretiske rammeverket. I kapittel 5 glir analysen over i en diskusjon som gir svar på forskningsspørsmålene mine, og jeg avslutter i kapittel 6 med å konkludere forskningsspørsmålene, komme med perspektiver rundt dem og gi forslag til videre forskning.

2 Teoretisk rammeverk

Det teoretiske rammeverket er 3-delt. I den første delen tar jeg for meg forskning på kunnskap og forståelse i matematikk og redegjør for begreper som brukes i den sjangeren. I den andre delen presenterer jeg noen teorier om læring og læringsmiljøer i matematikk. I del 3 presenterer jeg forskning på undervisning i matematikk, der de ulike studiene belyser påvirkningsfaktorer på undervisningen i matematikk.

2.1 Kunnskap og forståelse i matematikk

2.1.1 Instrumentell forståelse og relasjonell forståelse

Kunnskap og forståelse i matematikk er begreper som har blitt bearbeidet av mange anerkjente matematikkdiraktikere verden over. I 1976 presenterte Richard Skemp en artikkel som omhandlet forståelse i matematikk. Han presenterte to nye begreper: *Relasjonell forståelse* og *instrumentell forståelse*. Skemp (1976) definerer relasjonell forståelse som å vite hva du skal gjøre og hvorfor. Instrumentell forståelse beskriver han som anvendelse av matematiske regler uten å vite hvorfor man kan bruke reglene eller hva regelens betydning er. Skemp omtaler relasjonell forståelse som det som faktisk *er* forståelse og som det han alltid har tenkt på som forståelse. Han beskriver at han etter hvert også oppdaget at det å kunne anvende regler – selv om man ikke vet *hvorfor* man gjør det – også er en type forståelse, og at det er mange lærere og elever som har den oppfatningen at instrumentell forståelse er forståelse. Skemp (1976) eksemplifiserer dette ved å si at en lærer kan minne elevene på regelen for arealet av et rektangel. Videre kan læreren forklare at man skal multiplisere lengde og bredde for å få riktig svar. Elevene som løser oppgavene basert på forklaringen vil mene at de har forstått det ettersom de klarer å bruke formelen og får riktig svar. Hvis læreren forteller eleven at eleven egentlig ikke har forstått dette, vil eleven vært uenig.

Stieg Mellin-Olsen har skrevet flere bøker og artikler om forståelse i matematikk. Mellin-Olsen (1984) problematiserer *instrumentalisme som fornuftsgrunnlag for læring*. Han eksemplifiserer dette ved å fortelle om en undervisningssituasjon der en lærer bruker tid på å gjennomgå prinsippene for løsningsmetoden i arbeidet med førstegradslikninger. Addisjon og subtraksjon på begge sider, og overflytting med skifte av fortegn. I slike situasjoner søker ikke elevene forståelse for matematikken, men en forståelse for selve metoden. Spørsmålene de kommer med til læreren er rettet mot bruken av metoden, ikke egenskapene til likhetstegnet. (Mellin-Olsen, 1984, s. 20) Spørsmålet her er: Hva er målet til læreren? Er det å lære bort en metode, eller forståelse for likhetstegnet? Dette er et vesentlig spørsmål i forhold til om det underviste lærestoffet er det samme

som det lærestoffet som elevene lærer. Det vesentlige i en slik situasjon er om læreren selv faktisk innehar kunnskaper i matematikkdiridaktikk og relasjonell og instrumentell forståelse. En lærer som er bevisst på dette kan undervise i en metode fordi metoden er nyttig når du allerede har en forståelse for likhetstegnet. Når forståelsen ligger til grunn er det større sjanse for at metoden blir en del av det kognitive kartet til eleven (Skemp, 1989).

Når Mellin-Olsen (1984) snakker om instrumentalisme som fornuftsgrunnlag for læring, snakker han om elever som er opptatt av «å få matematikken til». De tenker ikke på oppgaveteksten, men at teksten inneholder en oppgave som de ønsker å få rett svar på. Spørsmål som «skal vi gange eller dele?» eller «skal vi ta minus eller pluss?» er spørsmål som er en indikasjon på et instrumentelt fornuftsgrunnlag. Et tegn på at eleven er opptatt av å klare oppgaven, ikke forstå den (Mellin-Olsen, 1984).

Når Skemp (1976) snakker om å forstå hvorfor en regel virker, og knytter kunnskap til begrepet relasjonell forståelse, kaller Mellin-Olsen det for *forståelse for regelens struktur*, eller *strukturforståelse*. Den andre typen forståelse kaller Mellin-Olsen for *regelforståelse*, Skemp kaller det for instrumentell forståelse.

2.1.2 Fordeler og ulemper med relasjonell og instrumentell forståelse

Ifølge Skemp er det ikke slik at instrumentell forståelse er ubrukelig og at all undervisning skal være lagt opp slik at den hele tiden skal lede mot relasjonell forståelse. Han har tenkt at siden veldig mange lærere underviser instrumentelt, må det være fordeler ved denne type undervisning, og Skemp (1989, s. 9) kommer på tre klare fordeler med instrumentell undervisning:

- 1 I sin egen kontekst er prosedyrer vanligvis enklere å forstå, noen ganger *mye* enklere. Noen tema, som for eksempel multiplikasjon av to negative tall og divisjon med brøk, er vanskelig å forstå relasjonelt. «Minus ganger minus blir pluss» og «når du deler med brøk kan du snu den bakerste brøken og gange» er relativt enkle regler å huske, og hvis målet er å få riktig svar på en test, kan instrumentell forståelse være enkelt å lære og gi raske resultater.
- 2 Belønningen kommer raskt. Når noe er enkelt å lære, kommer det riktige svaret (belønningen) raskt. Det er viktig å ikke undervurdere mestringsfølelsen av å få alt riktig. Elever med dårlig matematisk selvtillit kan raskt oppnå dette ved å lære seg noen enkle regler som fører til riktig svar.

- 3 Fordi mindre kunnskap er involvert, vil elever som bruker instrumentell tenkning raskere oppnå riktig svar enn elever som tenker relasjonelt.

Det tredje punktet er lettere å forstå hvis man konkretiserer det med et eksempel:

La os si at det er barnebursdag og jeg har fem liter brus. Hvert glass rommer $\frac{1}{3}$ liter, og jeg skal finne ut hvor mange glass brus det blir.

- En relasjonelt tenkende person ville kanskje ha tenkt at hvis ett glass er $\frac{1}{3}$ liter, er tre glass én liter. Videre ville han kanskje multiplisert tre med fem og funnet ut at det hadde blitt 15 glass.

En enda mer tungvint relasjonell måte ville være å utlede hvorfor vi kan snu brøken og multiplisere, for å så gjøre det med de faktiske tallene. Dette ville tatt litt lengre tid.

- En instrumentelt tenkende ville snudd brøken, multiplisert fem med tre og dividert på én og fått svaret 15.

For den instrumentelt tenkende forutsetter dette at han eller hun har forstått hvilken prosedyre oppgaveteksten ber om, noe Skemp diskuterer når han snakker om *habit learning*. Dette begrepet redegjøres for i kapittel 2.2.2. Skemp (1989, s. 9) sier videre at det er minst fire fordeler med relasjonell forståelse:

- 1 *Den er mer tilpasningsdyktig til nye oppgaver.* Man tilpasser sine kunnskaper til nye oppgaver. Som motsetning møtte Skemp en instrumentelt tenkende elev som hadde følgende kunnskap:

Når man multipliserer et desimaltall med et annet desimaltall, kan man fjerne kommaene, multiplisere som om det var heltall, addere antall desimaltall i oppgaven og sette inn samme antall desimaler i svaret.

Dette er en nyttig kunnskap hvis man forstår hvorfor man kan gjøre det. Uten at det var elevens egen feil forstod ikke denne eleven det. Når eleven møtte en oppgave der 4,8 skulle divideres med 0,6 brukte eleven samme metode og fikk 0,08 til svar. Hvis eleven hadde hatt relasjonell forståelse for multiplikasjon med desimaltall ville han ikke gjort feil når han skulle dividere desimaltall.

- 2 *Den er lettere å huske.* Dette er et paradoks ettersom relasjonell forståelse er vanskeligere å lære. Det er lettere for elever å lære at arealet av en trekant er «lengden gange høyden delt på to», enn å lære hvorfor det er slik. Problemet er bare at hvis en ikke lærer hvorfor det er

slik må man lære separate regler for arealet av trekkanter, rektangler, parallellogram og trapes. En relasjonell forståelse av dette består av å se alle disse figurene i sammenheng til arealet av et rektangel. Det er fortsatt ønskelig å kunne de separate reglene, slik at man slipper å utlede dem hver eneste gang man skal bruke dem. Hvis en imidlertid skulle glemme en av reglene vil man klare å finne frem til dem likevel ettersom en har en relasjonell forståelse av arealet av et rektangel. Den generelle sammenhengen mellom de 2-dimensjonale figurene er vanskeligere å lære, men det varer lengre fordi man er i stand til å hente den fram igjen, noe man ikke kan hvis en har pugget en regel og glemt den.

- 3 *Relasjonell kunnskap er et mål i seg selv.* Dette er et empirisk faktum. Behovet for eksterne belønninger er mindre siden relasjonell forståelse er en belønning i seg selv.
- 4 *Relasjonelle skjemaer er levende (ikke statiske).* Den gleden elever får av å forstå noe relasjonelt fører til at eleven får lyst til å forstå nye temaer relasjonelt. I tillegg søker elevene kunnskap på egen hånd for å utvide deres kognitive skjema.

Skemp lister imidlertid opp flere grunner til at en lærer i grunnskolen velger instrumentell undervisning. Det ene er at det tar for lang tid å oppnå den relasjonelle forståelsen, og at elevene sannsynligvis klarer seg med å kunne prosedyren for en oppgave. Den andre grunnen er at den relasjonelle forståelsen for et spesielt emne er vanskelig å oppnå, og den instrumentelle forståelsen dekker elevenes behov for å mestre en oppgave på eksamen. Den siste grunnen sier Skemp kan være at alle de andre matematikklærerne på en skole underviser instrumentelt.

Videre skriver han at for at en lærer skal være i stand til å faktisk velge å undervise instrumentelt eller relasjonelt, kreves det at læreren faktisk har relasjonell forståelse for matematikken selv. Dermed vil bare matematikklærere med relasjonell forståelse for matematikkfaget være adekvat for undervisningen. Imidlertid hevder Skemp at det er grunn for å tro at majoriteten av lærerne ikke innehar denne forståelsen.

Det som ifølge Skemp er et større problem enn at instrumentell undervisning ikke bygger på forståelse, er situasjoner der det er et misforhold mellom undervisningsformen til læreren og den undervisningen eleven forventer å få. Det kan være to misforhold:

- Elever som har som mål å forstå matematikken instrumentelt, men som blir undervist av en lærer som ønsker at elevene skal forstå relasjonelt.

- Elever som har som mål å forstå matematikken relasjonelt, men som blir undervist av en lærer som underviser instrumentelt. (Skemp, 1989)

Melanie Reason (2003) drøfter Skemps forståelseskategorier og danner seg selv kategorier for hva som kjennetegner relasjonell og instrumentell læring, samt kjennetegn for den relasjonelle- og den instrumentelle elev. Hun er mer åpen for instrumentell forståelse ettersom hun mener at ferdigheter ofte er nødvendig før noe kan forstås relasjonelt.

I feel the need to help pupils acquire both instrumental understanding and relational understanding of mathematics, rather than one or the other, though the order in which each type of understanding should be developed is not clear. Skills are often needed before things can be understood relationally and Skemp's statement 'even relational mathematicians often use instrumental thinking' highlights the problem. Instrumental understanding is necessary to give to give pupils skills, and relational understanding enables application of these in context. It is as 'relational' and 'instrumental' form a duality rather than being distinct. (Reason, 2003, s. 7)

2.1.3 Begrepskunnskap

Begrepskunnskap (conceptual knowledge) er kunnskap som må stå i forhold til annen kunnskap. Hiebert og Lefevre (1986) ser på det som et stort nettverk av kunnskaper der all kunnskap står i relasjon til annen kunnskap. Isolert kunnskap kan derfor ikke per definisjon være begrepskunnskap. Utviklingen av begrepskunnskap oppnås ved at informasjon settes i relasjon til annen informasjon. Det kan være to isolerte kunnskapsbiter som settes i relasjon til hverandre eller ny kunnskap som settes sammen med gammel kunnskap. Det kan også være to isolerte kunnskapsnett av begrepskunnskap som settes sammen til et stort nett, noe som fører til en stor kognitiv reorganisering. Dette eksemplifiserer Hiebert og Lefevre (1986) med en niåring som mestret både subtraksjonsalgoritmen og sifrenes verdi i posisjonssystemet hver for seg. Da hun oppdaget sammenhengen fikk hun en forståelse for flersifret subtraksjon. En annen måte å utvikle begrepskunnskap er å umiddelbart kople ny kunnskap til gammel kunnskap. Hvis niåringen forstod algoritmen idet hun lærte den, har hun utviklet begrepskunnskap umiddelbart.

2.1.4 Prosedyrekunnskap

Hiebert og Lefevre (1986) definerer prosedyrekunnskap som noe som er koples mot to distinkte deler.

1. Matematiske symboler og matematisk syntaks.
2. Regler og algoritmer for å utføre matematiske oppgaver.

Punkt 1 innebærer å kjenne igjen symboler som brukes som representasjon for matematiske idéer,

og i tillegg være i stand til å avgjøre om den er syntaktisk akseptabel. En person med prosedyrekunnskap kan være i stand til å akseptere den matematiske syntaksen « $3,5 : \square = 2,71$ » selv om personen ikke er i stand til å løse oppgaven, og at « $6 + = \square 2$ » ikke er en akseptabel matematisk syntaks.

Punkt 2 er prosedyrekunnskap som brukes til å løse matematiske oppgaver. Det kan være steg for steg-instruksjoner om hvordan man for eksempel skal løse en førstegradslikning.

Det er derimot ikke slik at all læring og kunnskap kan kategoriseres som begrepskunnskap eller prosedyrekunnskap. Kunnskap kan også ligge i skjæringspunktet mellom disse to ytterpunktene. Det er også slik at hvis elever kun innehar begrepskunnskap i matematikk, kan de inneha en god matematisk intuisjon, men samtidig ha vansker med å løse matematiske problemer. I motsatt situasjon vil kanskje elevene produsere riktig svar uten at de aner hva de driver med. Derfor er det behov for både begrepskunnskap og prosedyrekunnskaper.

Å beherske matematikk består i å vite betydningen av begreper, forstå symboler, forstå prosedyrer og forstå hvordan dette henger sammen. Mange elever synes å ha utfordringer med å forstå hvordan dette henger sammen. Hiebert og Lefevre (1986) peker på tre faktorer som hemmer konstruksjon av relasjoner i matematikk:

1 *Kunnskapshull.* Man kan ikke bygge relasjoner mellom ny kunnskap og gammel kunnskap hvis gammel kunnskap ikke eksisterer.

Eksempel:

Hvis man skal oppnå begrepsforståelse for arealet av et rektangel, blir det vanskelig å få til det hvis man ikke har forståelse for konseptet multiplikasjon. Det kan ikke knyttes en relasjon til noe som ikke er der.

2 *Vansker med å kode relasjoner.* Barn har en tendens til å ha vansker med å kode relasjoner som voksne tar for gitt.

3 *Kunnskap knyttes til spesifikk kontekst.* Ny kunnskap lært i spesiell kontekst er bundet til kjennetegnene til konteksten den ble lært i. Forskjellige metoder læres i ulike kontekster. Metoder for å regne med penger blir brukt når det er penger, metoder for oppstilte regnestykker brukes når det er oppstilte regnestykker.

2.2 Læring i matematikk

2.2.1 Klasseromskultur som legger til rette for forståelse av matematikk

Hiebert et al. (1997) beskriver hva som kjennetegner et klasserom der undervisningen legger til rette for å forstå matematikk, og der undervisningen har som mål å både utvikle begrepsforståelsen og prosedyreforståelsen til elevene samtidig. De har laget fem kriterier for hva som kjennetegner et slikt klasserom, og påpeker at alle kriteriene henger sammen.

Often we have had a view that educational problems can be fixed by changing one aspect, such as curriculum, preparation of teachers, or assessment. For example, in the modern mathematics era, the focus mainly was on curriculum. Moving to classrooms that encourage understanding requires more than fiddling with one aspect, or adding more on to what is being done. It requires more substantive, long-term changes. It also requires a change in attitude and beliefs as well as in practice and expectations. (Hiebert et al. 1997, s. xiv)

Lindquist (Hiebert et al., 1997) sier at det har blitt lagt for lite vekt på lærerens rolle i forhold til undervisning og læring i matematikk. Hun presenterer fem aspekter som spiller en stor rolle for å utvikle elevenes forståelse i matematikk:

- Oppgavetyper som blir gitt
- Lærerens rolle
- Kultur
- Verktøy
- Elevenes ferdigheter

Utviklingen av forståelse hos elever kan imidlertid ikke oppnås ved å forandre eller forbedre ett av disse aspektene, men må heller ses på som steg som kan lede oss frem mot en utvikling av forståelsen. En av grunnene til at det har vært vanskelig å beskrive om det legges til rette for utvikling av forståelse i et klasserom, er at forståelse i matematikk er veldig kompleks og dynamisk. Hiebert et al. (1997) definerer forståelse slik: “We understand something if we see how it is related or connected to other things we know.” (Hiebert et al., 1997, s. 4).

Det denne definisjonen ikke sier noe om er *hvordan* elever gjør koplinger til annen kunnskap. Klasserom som er støttende for utvikling av forståelse er preget av refleksjon og kommunikasjon av matematikk, og at de fem aspektene kan brukes til å identifisere slike klasserom. I motsetning til det Eisenhart et al. (1993) skriver om en student som aldri lot undervisning for begrepsforståelse gå på bekostning av undervisning for prosedyrekunnskap, og at hvis en vektlegger den ene typen forståelse vil det andre lide for det, mener Hiebert et al. (1997) at det ikke nødvendigvis trenger å være slik. Man trenger ikke ofre den ene eller den andre, tvert imot bør begge typene for forståelse

utvikles sammen. Prosedyrer må læres med forståelse for at de skal kunne huskes og anvendes til nye typer problem (Hiebert et al., 1997).

Most teachers would say that they want their students to understand mathematics, and in fact that they teach for understanding. [...] However, we have not always had a clear idea of what it means to learn mathematics with understanding, and we have had even less of an idea about how to tell whether a classroom was designed to facilitate understanding. (Hiebert et al., 1997, s. 3)

1 Oppgavetyperne:

Den type oppgaver elevene får presentert legger grunnlaget for den type undervisning som gis i klasserommet. Ulike oppgaver gir ulik undervisning. Undervisning som gir elevene mulighet til å reflektere over og kommunisere om matematikk bør bygge på oppgaver som er utfordrende og interessant for elevene, og som det samtidig ikke skal være en bestemt løsningsmetode for. Elevene må få bruke kunnskaper og ferdigheter de allerede har for å kunne utvikle en metode for å løse den nye oppgaven. I tillegg må oppgaven oppmuntre elevene til å reflektere over matematiske idéer slik at de kan ta med seg noe av matematisk verdi etter at oppgaven er løst.

2 Lærerens rolle:

Den tradisjonelle læreren er en lærer som formidler relevant matematisk informasjon, demonstrerer prosedyrer og ber elevene om å øve på det de har blitt vist helt til læreren sier at de har øvd nok. Denne lærerrollen baserer seg på at forståelse kommer hvis elevene følger godt med på det læreren sier og gjør. Dvs at kunnskapen gis av læreren fremfor at den konstrueres av elevene selv i møtet med oppgaver eller problemer. Istedenfor å være en lærer som *lærer* elevene absolutt alt, kan lærerrollen sees som en rolle der læreren skal gi elevene mulighet til å lære, ikke bli lært.

Instead of acting as the main source of mathematical information and the evaluator of correctness, the teacher now has the role of selecting and posing appropriate sequences of problems as opportunities for learning, sharing information when it is essential for tackling problems, and facilitating the establishment of a classroom culture in which pupils work on novel problems individually and interactively, and discuss and reflect on their answers and methods. (Hiebert et al., 1997, s. 8)

Det skal være et læringsmiljø der elevene både kan arbeide individuelt, diskutere løsninger med andre og reflektere over oppgavene i plenum. Med dette mener de ikke at elevene skal konstruere all kunnskap uten at læreren blander seg inn, men at læreren må være nøye med å velge ut hvilken informasjon – og hvor mye informasjon – som skal gis når elevene arbeider med problemer.

3 *Kultur:*

Et klasserom er et lite læringsfelleskap. Det som definerer læringsfelleskap er blant annet hvordan mennesker forholder seg til og omgår andre mennesker (Hiebert et al., 1997, s. 9). Å etablere en kultur der elever utvikler forståelse for matematikk innebærer å etablere normer for hvordan samspeillet mellom menneskene i den kulturen skal forholde seg til hverandre. Denne kulturen kjennetegnes av fire ting (Hiebert et al., 1997, s. 9):

- Matematiske idéer er valutaen i klasserommet. Idéer som presenteres av en deltaker kan potensielt bidra til læring for alle deltakerne, og alle idéene skal behandles med respekt og verdighet og tas på alvor uavhengig av hvilken deltaker som presenterer den.
- Elevenes har valgfrihet i forhold til de løsningsmetodene de ønsker å bruke. Alle elever må få forstå sin egen metode, og ha respekt for at det finnes mange løsningsmetoder.
- Feil løsning gir muligheter for refleksjon over et problem. Slik refleksjon kan øke alles evne til analyse og bør brukes konstruktivt.
- Forklaringer på et matematisk problem eller vurderinger på om et svar er riktig avhenger av om løsningen gir matematisk mening, den avhenger ikke av hvor populær den som presenterer er.

4 *Støttende læringsverktøy:*

Matematiske verktøy bør sees som en støtte for læring. Det er imidlertid slik at verktøy ikke automatisk er en støtte for læringen. Elever må konstruere kunnskap gjennom å bruke verktøy. Derfor må elevene få lov til å utforske og jobbe med verktøyene de skal bruke. Matematisk forståelse ligger ikke i verktøyet, men konstrueres gjennom riktig bruk av disse.

Verktøy kan brukes til å løse matematiske problemer. Det kan være skriftlig notasjon som holder orden på deloppgaver av et større problem; man kan bruke kvadratcentimeterbrikker for å utvikle en metode for arealet av en flate. Mange ulike verktøy kan brukes som tenkehjelp når elever skal løse matematiske oppgaver. Verktøyene påvirker måten vi tenker på når vi skal løse et problem og derfor påvirker de også den *forståelsen* vi utvikler gjennom bruken av dem.

5 *Elevenes ferdigheter*

Alle elever har rett til å forstå matematikken uavhengig om de er blant de flinkeste eller svakeste i matematikk. Dette betyr at oppgavene som gis må være av en slik art at *alle* elevene har mulighet til å forstå det de gjør på et visst nivå. Dette medfører at alle elevene må delta i oppgavene som gis, vise respekt for hverandres idéer og læreren må legge til rette for en kultur der alles refleksjoner blir tatt på alvor. Hvis en elev ikke deltar i fellesskapet, vil elevenes muligheter for læring minske.

Røsseland (2011) skriver i sin mastergradsoppgave at hun trodde at mangel på bruk av referenter i et klasserom, opplevelser som skaper referanser til kunnskapen, var en av hovedgrunnene til at elever fikk matematikkvansker, men at mangel på elevdeltakelse kanskje var den største enkeltgrunnen til at elevene fikk problemer i matematikk.

Alle fem aspektene er avhengige av hverandre for å fungere. Hvis læreren gir oppgaver over elevenes nivå, vil nødvendigvis ikke alle elevene ha mulighet til å forstå matematikken. Hvis læreren vurderer riktigheten av et svar utfra hvem som gir svaret, vil han drepe den type kultur som presenteres i punkt 3.

2.2.2 Intelligent learning og habit learning

Skemp (1989) trekker frem *habit learning* som en læringsprosess som leder til instrumentell forståelse i matematikk. Problemet med *habit learning*, slik Skemp ser det, er at det er en svært umotiverende og lite anvendelig læringsform. Han eksemplifiserer med at vi kan tenke oss at vi skal lære oss et telefonnummer. Da innlærer vi telefonnummeret med pugg. Hvis vi også tenker oss at vi skal bestå en form for eksamen som innebærer å memorere en lang liste med telefonnummer, ville dette oppleves som vanskelig og umotiverende. I tillegg vil det å ha lært seg det første telefonnummeret være en helt isolert kunnskap som ikke er anvendbar til noe annet. Telefonnummeret kan ikke brukes til å lære seg det neste nummeret. Alle numrene må læres hver for seg. Jo flere telefonnummer som må memoreres, jo mer må hukommelsen huske på, og oppgaven blir vanskeligere og vanskeligere.

Kontrasten til puggingen av mange uavhengige telefonnummer er ifølge Skemp f.eks. at vi skulle bli spurt om å huske en tallrekke som denne:

4 7 10 13 16 19 22 ... (Totalt hundre tall av denne tallrekken)

Ettersom denne tallrekken har et mønster, trenger vi bare huske det første tallet, 4, og deretter lære oss mønstret, som er å addere tre hver gang. Vi bruker hjernen på en helt annen måte, og det er dette Skemp kaller for *intelligent learning*. Skemp (1989) anslår at ettersom matematikk er et fag som baserer seg på regularitet, bør undervisningen bestå av 95 % *intelligent learning* og 5 % *habit learning*. Språkfag som inneholder en stor del uregelmessige bøyningsformer og irregularitet mellom skrivemåte og uttale, krever langt mer *habit learning* enn tilfellet er i matematikk. I matematikk er det nyttig å kunne telle til 20 uten å forstå mengden når du skal lære å telle. Det er nyttig å vite at π er tilnærmet lik 3,1415 slik at du slipper å tegne opp en sirkel og måle diameter og

omkrets hver eneste gang du skal regne med π .

Skemp (1989) mener at elever ofte blir «bedt» om å pugge mange «gjøreregler» i matematikk istedenfor å bygge opp et kognitivt kart. Et kognitivt kart vil gjøre elevene i stand til å utvikle løsninger på et problem, mens med et sett av «gjøreregler» er en elev helt avhengig av å kjenne igjen startpunktet på problemet. Hvis dette er ukjent, vil ikke eleven klare å finne en løsning på problemet.

2.2.3 Meningsfull læring og pugg

Hiebert og Lefevre (1986) bruker begrepet *meningsfull læring* om relasjoner mellom kunnskap som gjenkjennes eller skapes. Meningsfull læring er ifølge dem veien å gå for å oppnå begrepskunnskap, og begrepskunnskap kan etter deres definisjon kun oppnås gjennom meningsfull læring.

Prosedyre kunnskap kan derimot læres med eller uten mening, men prosedyrer som er lært med mening – eller gjennom forståelse – er prosedyrer som blir en del av begrepsforståelsen.

Pugg har et fravær av relasjoner og er sterkt knyttet opp mot den konteksten der læringen fant sted. Kunnskapen er ikke relatert til annen kunnskap og kan derfor ikke generaliseres for bruk i andre situasjoner. Slik kunnskap kan bare brukes i situasjoner som er svært lik eller identisk med innlæringskonteksten. Det anses som isolert kunnskap. Det kan imidlertid tenkes at kunnskap som er innlært som pugg ved et senere tidspunkt kan gjenkjennes og relasjoner kan konstrueres som begrepskunnskap. Prosedyrer kan derimot innlæres med pugg. Det har ingen negativ innvirkning på prosedyrekunnskapen at den pugges.

2.2.4 Kunnskap på primærnivå og refleksjonsnivå

Når informasjonen har samme abstraksjonsnivå som kunnskapen som elevene skal oppnå, kaller Hiebert og Lefevre (1986) det for *kunnskap på primærnivå*. Dette er relasjoner mellom informasjon som er knyttet opp mot en spesiell kontekst.

Eksempel 1:

Når elever skal lære om desimaltall lærer de seg blant annet to ting:

- Verdiene til høyre for komma er tideler, hundredeler, tusendeler osv.
- Når de adderer eller subtraherer desimaltall, setter du opp regnestykket med utgangspunkt i hvor kommaet er.

Det forventes vanligvis at elever er i stand til å knytte relasjon mellom de to nevnte informasjonsbitene slik at de ender opp med å legge sammen tideler med tideler, hundredeler med

hundredeler osv. Dette kaller Hiebert og Lefevre (1986) for en primærrelasjon fordi informasjon kan knyttes til regning med desimaltall og ingenting annet. Kunnskapen er bundet til konteksten. Andre relasjoner er konstruert på et høyere abstraksjonsnivå enn den informasjonen som gis. Dette kaller de for *kunnskap på refleksjonsnivå*. Dette er relasjoner som er mindre knyttet til konteksten de gis i.

Eksempel 2:

Hvis vi tenker samme eksempel som ovenfor, kan det tenkes at en elev oppdager at når hun setter opp addisjonsstykket med desimaltall, legger hun sammen tideler med tideler, hundredeler med hundredeler, tiere med tiere osv. Når hun skal legge sammen brøk, bruker hun samme kunnskapen om størrelser og legger sammen brøkene med samme nevner. Hun har utvidet tanken om å legge sammen tideler med tideler og hundredeler med hundredeler til noe på et høyere abstraksjonsnivå. Hun legger sammen størrelsene som er i samme størrelseskategori (Hiebert og Lefevre, 1986).

2.3 Undervisning i matematikk

2.3.1 Å undervise for å utvikle elevenes forståelse

Eisenhart et al. (1993) publiserte en artikkel med tittelen «Complexities of learning to teach mathematics for understanding» der de hadde fulgt noen studenters praksis siste året på lærerskolen og første året i arbeid som lærer. Målet med artikkelen var å beskrive studentenes kunnskaper, matematiske syn, tenkning og handlinger i relasjon til undervisning av matematikk.

I artikkelen kommer det frem at den ene studenten de fulgte hadde et ønske om å undervise for å utvikle elevenes forståelse, og at hun så viktigheten av å undervise både for begrepskunnskap og prosedyrekunnskap. Imidlertid viste observasjon av studentens undervisning at hun slet mye mer med forklaringer av begrepskunnskap enn hun gjorde da hun bevisst underviste for prosedyrekunnskap. Eisenhart et al. (1993) skriver at det var flere *faktorer* som gjorde at studenten konsekvent underviste for prosedyrekunnskap og sjeldent underviste for begrepskunnskap:

- Egen kunnskap i matematiske tema og matematikkdiraktikk.
- Fokus på å dekke læreplanmålene.
- Ønske om at elevene skulle øve tilstrekkelig på kunnskapen.
- Hennes oppfatning av elevenes ferdighetsnivå og interesser.
- Hennes oppfatning av kollegaers undervisningssyn.

Mangler i studentens kunnskap i matematikk gjorde at hun i enkelte situasjoner kun fokuserte på prosedyrekunnskap. Fokus på å dekke læreplanmålene gjorde også at tid som kunne vært avsatt til å oppnå begrepsforståelse, ble brukt til iallfall å gi elevene prosedyrekunnskap i målene. Frykten for å ikke ha nok tid til dekke læreplanmålene før en helårsprøve (som fokuserte på prosedyrer) gjorde at hun under *morning math* gjennomgikk mye pensum på kort tid. Hennes ønske om tilstrekkelig øving på hvert tema tok også tid, tid som kunne vært brukt til å utvikle begrepskunnskap. Det viste seg imidlertid at når studenten underviste flinke elever som uttrykte interesse for å få en forståelse av hvorfor en prosedyre fungerte, underviste hun for begrepsforståelse fordi hun mente at elever med gode evner var mer interessert utforskende aktiviteter og kunnskap på *refleksjonsnivå* (Hiebert og Lefevre, 1986) enn andre elever. Studenten la også større vekt på begrepsforståelse i sin tredje lærerstudentutplassering enn hun gjorde i sin fjerde. Eisenhart et al. (1993) påpeker at det kan være ulike grunner til det, men peker spesielt på to muligheter:

- 1 Klassen i den tredje utplasseringen var gode faglig. Som fortalt ovenfor underviste hun i slike tilfeller i større grad for begrepsforståelse.
- 2 Hennes kollegaer påvirket henne. I den tredje utplasseringen kommenterte hun hvor mye kunnskap kollegaen hadde. Hun søkte derfor råd hos kollegaen når hennes egen begrepsforståelse kom til kort. Kollegaens forslag påvirket hennes planlegging av undervisningen, noe som ledet til en undervisning som i større grad la opp til begrepsforståelse. Hun søkte ikke råd hos kollegaen på den fjerde utplasseringen.

Eisenhart et al. (1993) oppsummerer delkapitlet med at flere personlige og kontekstuelle faktorer la press på studenten, slik at hun forbigikk begrepsundervisning. Selv om hun enkelte ganger underviste for begrepsforståelse, gjorde hun det aldri på bekostning av prosedyrekunnskapen. Videre peker artikkelen på at faktorene som påvirket studenten til å undervise for prosedyrekunnskap, var mer situasjonsbetinget enn personbetinget.

On a personal level, she did not always have the content or pedagogical knowledge she needed to teach for conceptual knowledge, despite her desire to do so. However, situational factors seemed to determine when she had or created the opportunity to learn that knowledge. Pressures to prepare students for tests, to cover designated topics in the curriculum, and to use school time for review and practice for procedural skills were obstacles around which Ms. Daniels (often inadvertently) found little room to implement her stated intention to teach for conceptual knowledge. (Eisenhart et al., 1993, s. 24)

2.3.2 Læreres bruk av læreboken

Rezat (2012) skriver at lærebøker er en av de viktigste ressursene i undervisning og læring av matematikk. Lærerne planlegger aktiviteter basert på læreboken og innholdet i undervisningen tar utgangspunkt i det som står i den. Bøkene brukes i hovedsak på to måter. Den ene måten er at læreboken er en kilde til oppgaver og den andre er at den er en guide for hvordan emnene skal undervises. Lærere fremstår som oversettere av innholdet i læreboken, og Rezat (2012) skriver at lærere er de som bestemmer hvor mye av læreboken som skal brukes, hvilken del av den, hvilke oppgaver i den, hvilke temaer som skal undervises i og hvordan elevene skal bruke den. Shield (2000) skriver at det er lærerne, og ikke elevene, som bruker læreboken mest.

Jamieson-Proctor og Byrne (2008) skriver at lærernes bruk av læreboken i undervisningen påvirkes av deres egen selvtillit i matematikk, deres matematiske kompetanse, deres faglige vurdering av læreboken og press fra skoleledelse, foreldre og kollegaer. Det er mer sannsynlig at en matematikklærer med god selvtillit underviser uten å basere seg på læreboken, enn en lærer med lavere selvtillit. En lærer med lavere matematisk selvtillit har mer tro på lærebokforfatterens kompetanse enn sin egen.

Johansson (2006) undersøker hvordan læreboken påvirker matematikkundervisningen. Ifølge Johansson påvirker læreboken hvilke tema en lærer i matematikk underviser i, og de emnene som står i læreboken, blir som oftest undervist i, og de emnene som ikke står der blir mest sannsynlig ikke undervist i. Lærebøkene er også hovedkilden til hvordan emnene presenteres for elevene (Johansson, 2006). Johansson (2006) fant i sin studie nummer 3 ut at lærerne stort sett brukte oppgaver og eksempler fra læreboken i undervisningen, og at elevene brukte over halvparten av undervisningstiden på å arbeide individuelt med oppgaver fra læreboken.

2.3.3 Ulik innfallsvinkel til undervisning gir ulik kunnskap

Boaler (2002) har undersøkt hvordan ulike innfallsvinkler til matematikkundervisning har påvirket hvilken type kunnskap elever tilegner seg. I en av sine studier (Boaler, 1997) forteller hun om to skoler som underviste matematikk på svært forskjellige måter. Den ene hadde en tradisjonell innfallsvinkel som baserte seg på læreren demonstrerte og at elevene øvde. Den andre skolen baserte seg på 2-3 uker lange åpne prosjekt. Elevene på de to skolene hadde i utgangspunktet samme faglig oppnåelse i matematikk ved starten av studiet. Boaler (2002) skriver at hun undersøkte hvordan de to ulike innfallsvinklene til undervisning påvirket elevenes matematiske forståelse. Hun (Boaler, 1997) fant ut at elevene som hadde mottatt tradisjonell undervisning gjennom interaksjon med oppgaver fra læreboken gjorde det bra når oppgavetyperne lignet

lærebokkonteksten, men hadde vanskeligheter med åpne oppgaver eller diskusjonsbaserte oppgaver. Den andre skolen som hadde fokusert på prosjekter med gruppearbeid, utviklet en mer fleksibel kunnskap og lyktes i større grad på spørsmål som krevde begrepsforståelse. På en nasjonal eksamen tre år etter studien startet gjorde elevene som hadde mottatt tradisjonell undervisning det betraktelig dårligere enn elevene som hadde arbeidet i gruppeorienterte prosjekt. Boaler (2002) påpeker at elevene ikke lærte mindre på den ene skolen enn de gjorde på den andre, men at *kunnskapen* de fikk var forskjellig og at den tradisjonelle kunnskapen var mindre fleksibel og mindre tilpasningsdyktig.

2.3.4 Den didaktiske kontrakt

Morten Blomhøj fikk i 1994 publisert artikkelen «Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare» i *Nämnamnaren* (Blomhøj, 1994). Blomhøj tar her i bruk begrepet *didaktisk kontrakt*, et begrep som først ble tatt i bruk av Guy Brousseau i 1984. Med didaktisk kontrakt mener Blomhøj (1994) at det utvikles en felles forståelse som danner rammene for samspillet mellom lærer og elever, og elevene seg i mellom, i klasserommet. Kontrakten preges av flere faktorer, men i stor grad av lærerens oppfattelse av faget og hvordan det skal undervises. Blomhøj omtaler den didaktiske kontrakten i tradisjonell matematikkundervisning som:

- at læreren omhyggelig gjennomgår de metoder og algoritmer, der presenteres i lærebogen,
- at læreren kun stiller oppgaver, som elevene på forhånd har fået redskaber til at løse,
- at en opgave er løst, når dens enkelte spørgsmål er besvaret,
- at de ønskede svar kan angives kort ved f.eks. et tal, en figur eller til nød en kort setning,
- at eleverne har krav på lærerens bedømmelse når en opgave er løst,
- at elevernes læring kan bedømmes alene ud fra, om de kan regne de stillede opgaver,
- at eleverne på deres side gør deres bedste for at løse de stillede opgaver. (Blomhøj, 1994, s. 37)

I en tradisjonell matematikkundervisning mener han det utvikles en trygg kultur for hvordan undervisningen foregår. Læreren innleder med gjennomgang på tavla, gir elevene oppgaver, og konsentrerer seg om å hjelpe elevene med oppgavene. Jo mer hjelp en elev trenger, jo mer konkret blir anvisningene. En slik undervisning passer ifølge Blomhøj (1994) ikke med intensjonene om at elevene skal tilegne kunnskap som de skal klare å anvende i nye situasjoner. Dette kan sees i sammenheng med Hiebert og Lefevres (1986) forståelse av begrepet *prosedyre kunnskap*, der de omtaler ett av elementene der som å f. eks. lære steg for steg-instruksjoner i løsning av førstegradslikninger, og begrepet *instrumentell forståelse* (Skemp, 1976). En slik innlæring av *prosedyre kunnskap* preges ofte av den tradisjonelle didaktiske kontrakten (Blomhøj, 1994).

2.3.5 Matematikdidaktisk kunnskaps påvirkning på læring

Hill, Rowan og Ball (2005) undersøkte hvordan lærernes matematikdidaktiske kunnskaper påvirket første- og tredjeklassingers læring gjennom et år. Deres studie viser at matematikdidaktisk kunnskap og elevenes læring i matematikk, henger nøye sammen. De skriver at når man undersøker hvordan matematikklærerens kunnskap påvirker elevenes læring, må man skille mellom matematikkunnskaper og matematikdidaktiske kunnskaper. Lærere må ikke bare kunne gjøre utregninger rett, de må også vite hvordan de kan bruke figurer som representasjoner for matematiske begrep og prosedyrer, kunne gi elever forklaringer på matematiske konsepter, regler og prosedyrer og analysere elevers løsninger – og alternative løsninger – og forklaringer (Hill et al., 2005). Flinke matematikere er flinke matematikklærere hvis de klarer å overføre sin matematiske kunnskap inn i det matematikdidaktiske landskapet; hvis de klarer å lytte til elevene, gi gode oppgaver og holde gode diskusjoner med elevene. Med kompetanse som matematikklærer mener Hill et al. (2005) evnen til å f. eks. skape representasjoner for $\frac{1}{4}$, hvordan han/hun forklarer regler eller at læreren er i stand til å forstå alternative løsningsmetoder og anerkjenne disse. Funnene deres viste at lærerens matematikdidaktiske kunnskap hadde stor påvirkning på elevenes prestasjoner både i første- og tredjeklasse. Selv om matematikken i første klasse er betraktelig mindre kompleks enn tredjeklassematematikken, viste det seg at den matematikdidaktiske kunnskapen likevel hadde stor påvirkningskraft på prestasjonene.

3 Metode

For å undersøke hvordan faktorer påvirker matematikkundervisningen til to lærere som ønsker å undervise for å utvikle elevenes forståelse, har jeg studert to klasserom i tre økter hver. Etter siste observasjon i hvert klasserom, hadde jeg et dybdeintervju med den respektive læreren. I dette kapitlet vil jeg gjøre rede for hvordan datainnsamlingen ble utført og analysert og hvorfor jeg valgte de metodene som jeg valgte.

3.1 Valg av metode

Kvalitativ forskning gir blant annet en detaljert forståelse rundt observerbare og ikke-observerbare fenomen, holdninger, intensjoner og handlinger. Det lar informantenes stemme komme frem og synliggjør faktorer som ligger bak handlinger (Cohen, Manion & Morrison, 2011, s. 219). Min studie retter seg mot hvordan ulike faktorer påvirker undervisningen til to matematikklærere. Jeg har ikke tallfestet påvirkningen, noe som kjennetegner kvantitative studier, men undersøkt *hvordan* ulike faktorer påvirker undervisningen.

Qualitative research is interested in the casual processes at work in understanding how one or more interventions or factors lead to an outcome, the mechanisms of their casual linkages. Quantitative research can tell us correlations, how much, whether and 'what', whilst qualitative research can tell us 'how' and 'why' – the processes – involved in understanding how things occur. (Cohen et al., 2011, s. 227)

Jeg anser studien som en instrumentell kollektiv kasusstudie, ettersom jeg har studert to ulike klasserom for å undersøke hvordan faktorer påvirker matematikkundervisningen. Cohen et al. (2011, s. 291) skriver at instrumentelle kasusstudier utforsker ett kasus som et instrument for å få innsikt i et problem eller en teori. Kollektive kasusstudier er å bruke flere individuelle studier for å få et mer nyansert bilde av problemet eller teorien som blir undersøkt. En individuell kasusstudie beskriver Robson (2002, s. 181) som en studie som blant annet kan bestå av å utforske hvordan ulike faktorer påvirker et utfall. Når det er flere kasus, der kasusene har felles funksjoner, kaller Robson (2002) det for *ett sett av individuelle kasusstudier*. Postholm (2005) beskriver kasusstudier som beskrivende forskning. Hun argumenterer med at en slik studie, på samme måte som all annen kvalitativ forskning, ikke bare orienterer forskningsarbeidet mot noen få variabler, men mot mange eller alle variabler i enheten som blir studert, noe Cohen et al. (2011) også skriver: "Case studies recognize and accept that there are many variables operating in a single case, and, hence, to more than one tool for data collection and many sources of evidence." (Cohen et al., 2011, s. 289).

3.2 Valg av informanter

For å finne svar på forskningsspørsmålet mitt, ønsket jeg å undersøke lærere som hadde litt forskjellig utgangspunkt på flere områder. Jeg ville i utgangspunktet observere og intervjué én lærer fra barnetrinnet og én fra ungdomstrinnet. Grunnen til dette var at jeg ville se hvordan ulikheter i rammefaktorene, ettersom totalt antall undervisningstimer i uka for en lærer er mindre på ungdomstrinnet enn på barnetrinnet, påvirket matematikkundervisningen. Ville informantene på barneskolen signalisere et tidspress og at det er for lite tid til forberedelser? Ville informantene fra ungdomstrinnet signalisere at eksamen presser frem en «teaching to the test»-undervisning der eksamen er styringsdokumentet? Dette var spørsmål som var interessante for meg i valget av informanter. I tillegg ønsket jeg at informantene skulle ha ulik faglig bakgrunn i matematikk fordi jeg ville se hvordan matematikkdiraktisk- og matematisk kunnskap hos læreren påvirket undervisningen til den enkelte lærer. For å finne ut om hvordan rammefaktorer påvirker matematikkundervisningen, valgte jeg å prøve å finne frem til en 7.-trinns lærer og en 10.-trinns lærer. Hovedgrunnen til dette var jeg ville se om læreplantrykket var synlig i undervisningen til en 7.-trinns lærer ettersom elevene snart skal over i ungdomsskolen, og jeg ville se om eksamenstrykket påvirket undervisningen til en 10.-klasselærer. Det var også et poeng at informantene ikke skulle være fra samme skole, fordi da kunne ulikheter i bruken av formidlingsressurser ved skolene komme frem, samt forskjeller i kollegiet. Ved å bruke lærere fra forskjellige skoler, var også sjansen for at lærerne brukte ulikt læreverv betraktelig større enn hvis de var fra samme skole.

Informant A, som jeg kaller Arne i resten av denne oppgaven, var en ung matematikkdiraktiker som jobbet på 9. trinn på en ungdomsskole i Nord-Norge. Informant B, som jeg kaller for Berit i resten av denne oppgaven, var en lærer i 40-årene som jobbet på 7. trinn på en barneskole fra samme distrikt, og hadde 60 studiepoeng i matematikk fra lærerskolen. Ved bare å bruke to informanter unngikk jeg kanskje at datamaterialet ble uhandterlig for meg, og det bidro nok til å gjøre analysen av de dataene jeg endte opp med lettere å jobbe med enn det hadde vært med flere informanter.

3.3 Innsamling av data

For å finne svar på forskningsspørsmålene tenkte jeg at det ville være nødvendig å observere lærerne undervise i matematikk. Jeg ønsket å se hvordan de underviste, hvordan de forklarte matematikk, hvilke representasjoner de brukte og hvilke aktiviteter som ble igangsatt. Samtidig ville jeg se hvilke *formidlingsressurser* som ble tatt i bruk i undervisningen – og hvordan de ble brukt som et verktøy til å utvikle elevenes forståelse i matematikk. Det en observasjon alene ikke sier noe om, er hvorfor læreren valgte de representasjonene som ble tatt i bruk, hvorfor de valgte én

spesiell aktivitet og hvorfor de underviser på den måten de gjør. For å finne ut hvorfor en lærer for eksempel baserer seg på instruksjonen i læreboken i hver time, eller hvorfor en lærer ber elever diskutere et problem for å se om de klarer å utvikle en metode for løsning av problemet, er intervju en god metode (Bjørndal, 2012). For å finne ut hvordan ulike faktorer påvirker lærernes matematikkundervisning kan en observere at en lærer lar seg påvirke av læreboken ved at den blir brukt mye i undervisningen, men en observasjon alene kan ikke si noe om hvilke andre faktorer som har påvirket læreren til å velge læreboken som formidlingsform. I en diskusjonsbasert matematikkundervisning, uten lærebok, kan en trekke slutninger om ulike grunner til at læreren har valgt å undervise på den måten, men man kan ikke vite uten å spørre ham. For eksempel kan akkurat det undervisningsopplegget være et undervisningsopplegg som en kollega har presentert for ham. For å få frem begrunnelser, tanker og følelser om hvordan faktorer påvirker matematikkundervisningen (Bjørndal, 2012), var det helt nødvendig å spørre lærerne om det. Derfor ble intervju valgt som metode.

Det er hensikten med undersøkelsen som bestemmer hvilke og hvor mange kasus forskeren velger å studere.

Dersom forskeren velger å studere flere kasus eller settinger vil det gå ut over hans eller hennes mulighet til å gå i dybden på hvert enkelt forskningsfelt. [...] Det er likevel problemstillingen og hensikten med studien som må være avgjørende for om ett eller flere kasus velges. (Postholm, 2005)

Jeg var lenge innom tanken å studere kun ett kasus, men problemstillingen min gjorde at jeg valgte å undersøke lærere både bra barneskolen og ungdomsskolen. Ettersom rammefaktorene kan være svært ulike på barne- og ungdomsskolene, tenkte jeg at det var muligheter for at det kanskje ville åpenbare seg noen forskjeller mellom trinnene.

3.3.1 Observasjon

Observasjon er ett av flere redskap forskeren kan bruke for å samle inn data fra forskningsmateriale. Bjørndal (2012) sier at observasjon i pedagogisk sammenheng kan sees på som *oppmerksom iakttagelse*. Det vil si at en forsøker å observere noe som er av pedagogisk betydning.

Ettersom jeg ønsket å være mest mulig anonym i undervisningen, nærmest som en flue på veggen, ønsket jeg å være det som kalles en *fullstendig observatør*. En fullstendig observatør er en observatør som observerer fra sidelinjen og der observatørens tilstedeværelse ikke legges merke til i settingen (Cohen et al., 2011; Postholm, 2005). Bjørndal (2012) kaller dette for en observasjon av første orden og mener dette bidrar til å sikre høy kvalitet i observasjonene. Mitt fokus var på lærerens undervisning, ikke på elevene.

Jeg fryktet at en bildeopptaker ville ha en litt for stor påvirkning på både informantene og elevene i klasserommet ettersom observasjonstiden bestod av tre økter i litt over en uke. Hadde dette vært et prosjekt der jeg hadde fulgt informantene over lang tid, hadde bildeopptaker vært mer aktuelt. Lyd- og bildeopptak oppfattes som et sterkt bevis på noe som har skjedd eller hvordan det skjedde (Bjørndal, 2012). Postholm (2005) argumenter imidlertid at hvis en har tenkt å bruke video- eller lydopptaker i et klasserom, er det viktig at elevene blir vant til bruken av disse instrumentene slik at de ikke påvirkes av dem. Min rolle som observatør var å beskrive hva som skjedde i undervisningen; hvordan undervisningen ble gjort; hvilke ressurser som ble brukt; hvordan ressursene ble brukt; hvordan matematikken ble representert og hvordan den ble forklart. Et bildeopptak ville antakeligvis klart denne jobben, men pga av lengden på observasjonsperioden – og ønsket om å observere det dagligdagse med minst mulig forstyrrelser – falt valget på feltnotater. Et lydopptak påvirker miljøet man undersøker mindre enn en bildeopptaker (Bjørndal, 2012) og er et godt hjelpemiddel for å sikre at data fra kommunikasjonen i klasserommet blir ivaretatt, men frykt for at en urolig klasse kanskje kunne forkludre dataene – noe som igjen ville ført til en krevende transkripsjonsjobb – gjorde at jeg valgte det bort. Det positive med lydopptak er at man ikke går glipp av lydsignaler, bortsett fra hvis lyder kommer samtidig og overdøver hverandre, eller at den ene overdøver den andre. Det negative er at en lydopptaker er en maskin. Den kan ikke rette fokus mot ett av lydsignalene i rommet, slik som et menneske kan. Et menneske kan sitte anonymt i et hjørne samtidig som det har et sterkt fokus mot et punkt eller en hendelse i klasserommet. Feltnotater var mer hensiktsmessig i min studie ettersom jeg kunne lage skisser av figurer på tavla og fokusere på å skrive ned det som ble gjort uten lyd også. På den måten kunne jeg rette fokus mot interessante hendelser i klasserommet uten å stikke frem forstyrrende elementer som bildeopptaker og lydopptaker.

Non-participant observers [...] stand aloof from the group activities they are investigating [...] The best illustration of a non-participant observer role is perhaps the case of the researcher sitting at the back of the classroom coding up every three seconds the verbal exchanges between teachers and pupils by means of a structured set of observation categories. (Cohen et al., 2011, s. 297)

En av ulempene med feltnotater er at det er svært vanskelig å få med seg hendelser som skjer samtidig pga at man har fokus på å skrive ned en hendelse idet en ny hendelse oppstår. Et annet problem er at faren for å overfortolke hendelser er i større grad tilstede enn det ville vært med bildeopptak der man kan se gjennom hendelsene flere ganger (Bjørndal, 2012). For å forstyrre den hverdagslige undervisningen minst mulig presenterte jeg meg for elevene som en masterstudent

som var der for å se på lærerens undervisning, og at det var læreren som jeg studerte, ikke elevene. Jeg informerte om at jeg kom til å observere tre økter, og at jeg i de øktene kom til å sitte bakerst i hjørnet og notere hendelser fra undervisningen. Elevene fikk også beskjed om at jeg ikke kom til å være til hjelp for dem, og at det var ikke noe vits i å henvende seg til meg.

Bruken av feltnotater som observasjonsmetode var hektisk. I enkelte sekvenser ble det svært mye å notere, og det kunne være krevende å notere når læreren eksemplifiserte matematikk i raskt tempo. Dette medførte at noe ble for dårlig dokumentert og var verdiløst for oppgaven. Feltnotatene strukturerte jeg i kategorier på ulike ark som jeg hadde på pulten foran meg. Ett ark for å notere rekkefølgen på eksempler, aktiviteter og interessante dialogutvekslinger i undervisningen, ett ark for å notere hvilke formidlingsressurser som ble brukt, ett ark for å notere rammefaktorer i klasserommet og ett ark for å notere tanker jeg gjorde meg vedrørende undervisningen. Etter undervisningstid måtte jeg nedskrive notatene på nytt på grunn av at det så litt slurvete ut i delen fra de hektiske periodene. Forskjellen i de nye notatene kontra de første, var kun at jeg skrev det penere og mer oversiktlig på nye ark, samt at jeg sørget for at språkfeil ble rettet opp. I tillegg skrev jeg ned en logg med mine refleksjoner rundt den observerte undervisningsøkten.

3.3.2 Intervju

Bjørndal (2012) beskriver samtalen som en god måte å ta del i en annen persons måte å tenke på. For å få svar på hvilke faktorer som påvirker en lærers matematikkundervisning, vil ikke observasjon av undervisningen alene gi et dekkende bilde av hvordan faktorene påvirker. Grunnen til at en lærer velger å undervise på én spesiell måte kan være kompleks; det kan være flere faktorer som spiller inn. Faktorer som ikke kommer til syne under en observasjon. Det er ikke mulig å se at en lærer gjennomfører en undervisning der han har hentet inspirasjon fra en kollega. Det er heller ikke mulig å se at mangel på konkreter på skolen førte til at en lærer valgte en annen undervisningsform enn det han i utgangspunktet hadde tenkt. For å få en bedre oversikt over hvordan slike usynlige faktorer påvirker matematikkundervisningen valgte jeg å bruke intervju. Intervjuet har den egenskapen at det også gir en mulighet til å oppklare uklarheter i forhold til det man observerer i undervisningen (Bjørndal, 2012).

Som intervjumetode brukte jeg en intervjuguide med lav grad av struktur. Jeg satte opp temaer – basert på å få svar på forskningsspørsmålene mine – som samtalen skulle dreie innom. Under disse temaene stilte jeg opp eksempel på spørsmål som kunne være med på å belyse forskningsspørsmålene mine. Bjørndal (2012) beskriver denne typen intervju som velegnet til å få fram mye informasjon om en sak. Ettersom jeg ikke intervjuet informantene samtidig, førte det til at

jeg etter intervju med informant A endret på detaljer i intervjuguiden. Det gikk hovedsakelig ut på å stryke spørsmål som viste seg å være lite velegnet i arbeidet med å få svar på forskningsspørsmålene, og å stryke spørsmål der jeg stod i fare for endre rolle fra å være intervjuer til å bli veileder.

Til dybdeintervjuet valgte jeg lydopptaker fremfor bildeopptaker fordi lydopptakeren føles mer ufarlig for informanten (Bjørndal, 2012). Det er viktig at intervjuobjektet føler seg trygg og jeg ønsket ikke å legge unødige press på informantene ved å filme dem. Minuset med dette er at jeg gikk glipp av en del ansiktsuttrykk og gestikulering som kunne ha vært til hjelp under fortolkningen av intervjuene, men toneleiet og stemmebruken gjorde det imidlertid greit å fortolke informantenes utsagn i dybdeintervjuene. Intervjuet av informant A ble gjort i skoletiden dagen etter siste observasjonsøkt på et møterom på skolen. Intervjuet av informant B foregikk etter skoletid etter siste observasjon.

3.3.3 Triangulering

“Triangulation may be defined as the use of two or more methods of data collection in the study of some aspect of human behavior. [...] Triangulation is a powerful way of demonstrating concurrent validity, particularly in qualitative research.” (Cohen et al., 2011, s. 195). Triangulering betyr blant annet at man kan bruke flere metoder til datainnsamlingen. Robson (2002) beskriver datatriangulering som bruk av mer enn én metode i datainnsamlingen. Som eksempel på datatriangulering nevner Kruuse (1989) kombinasjonen av kvalitative observasjoner og kvalitative intervju. I mitt prosjekt har jeg brukt denne typen triangulering for å styrke validiteten i observasjonene mine. Ved å integrere observasjonene i klasserommet i intervjuguiden, brukte jeg intervjuet til å validere mine observasjoner i klasserommet. På denne måten minsket jeg sjansen for bias (Cohen et al., 2011, s. 295), og trianguleringen gjør at dataene blir mer fullstendig (Ryen, 2002). Triangulering bidrar til at man har flere siktepunkt når man leter etter den objektive sannheten i studien. Den øker også risikoen for å få data som gir ulike svar (Ryen, 2002). På grunn av at informantene henviste til sine respektive lærebøker for å begrunne meningene sine har jeg også brukt kopier av noen sider fra lærebøkene. Når hver innsamlingsmetode har samsvar i dataene om et fenomen, styrkes tilliten til forskningsmetoden (Bjørndal, 2012, s. 119).

3.4 Transkripsjon

Etter at jeg var ferdig med intervjuene, og disse lå på båndopptakeren min, brukte jeg mye tid på å høre gjennom dem. I disse seansene lyttet jeg fritt til dem for å se om det var utsagn jeg kunne bite meg merke i. Selve nedskrivingsprosessen var håndterlig ettersom jeg kun intervjuet en informant

om gangen og ikke hadde noen form for gruppeintervju. Jeg valgte å grovt transkribere begge intervjuene i sin helhet selv om det ved første lytting ikke var alt jeg anså som verdifullt for oppgaven. Grunnen til at jeg likevel transkriberte alt var at det som jeg ved ett tidspunkt anså som uinteressant, kunne vise seg å være interessant ved en senere anledning. Det ble uansett helt nødvendig for meg å transkribere intervjuene i sin helhet ettersom jeg valgte å bryte ned intervjuet til de fire kategoriene som jeg presenterte i innledningen. Dette hjalp meg til å få en bedre oversikt da jeg arbeidet med å besvare forskningsspørsmålene mine. De transkripsjonene som viste seg å bli brukt i masteroppgaven transkriberte jeg langt mer nøye enn de som ikke ble brukt.

3.5 Hermeneutikken

Man sier om mange fenomener at de er meningsfulle. Men for å kunne forstå meningsfulle fenomener må de fortolkes. Fortolkning er noe vi må gjøre for å kunne samhandle med andre (Gilje & Grimen, 1993, s. 142). Den verdenen vi ser fortolker vi gjennom den forforståelsen og bakgrunnskunnskapen vi har. Det betyr at en forsker som observatør møter observasjonen med fordommer, noe som er nødvendig for at observasjonen skal gi mening til meg som observatør (Gilje & Grimen, 1993). I denne sammenhengen menes det ikke med *fordom* at man har holdninger som er basert på mangelfull kunnskap, men fordom sees på som hvilke forutsetninger man har for å forstå fenomener som oppstår (Gilje & Grimen, 1993, s. 152). Fenomener forstås gjennom den konteksten de oppstår i. Det er situasjonene de oppstår i som og fordommene man møter dem med som bestemmer hvilken mening de gir oss (Gilje & Grimen, 1993). «Vi forstår det vi observerer gjennom våre subjektive individuelle teorier, som innebærer at tidligere erfaringer og opplevelser er med på å farge og fokusere hva vi observerer.» (Postholm, 2005, s. 55).

Et utsagn som «han synger på siste verset» betyr ikke i alle sammenhenger at en vokalist snart er ferdig med sangen. Det kan bety at en idrettsutøver begynner å bli så gammel at han snart må legge opp, og det kan også bety at et liv er i ferd med å ta slutt.

I tolkningen av hvordan ulike faktorer påvirker matematikkundervisningen til to lærere som ønsker å utvikle elevenes forståelse, tolker jeg det gjennom måten jeg tolker teoriene jeg presenterte i kapittel 2. Mine fortolkninger av teoriene har gitt meg kategorier som jeg analyserer datamaterialet med, og de danner grunnlaget for diskusjonen i kapittel 5.

3.6 Refleksjon rundt metodene

Intervju var nødvendig for å få frem hvorfor lærerne underviste som de gjorde, og hvilke tanker de gjorde seg rundt det. For å styrke studien, og gjort den enda mer reliabel, burde jeg gjort et

pilotintervju. Da ville jeg spart meg for unødvendige spørsmål tilknyttet intervjuet med informant A. Det var likevel ikke store endringer som ble foretatt. Ingen endringer i tema, men heller en justering av spørsmålsformuleringer som jeg opplevde ikke var tydelige nok i det første intervjuet, samt fjerning av noen få spørsmål. Uten at det fikk store konsekvenser for datainnsamlingen, burde jeg likevel gjort et pilotintervju. Tydeligere spørsmålsformuleringer gir tydeligere svar.

På slutten av skriveprosessen tok jeg i bruk *medlemsvalidering*. «Den sterkeste versjonen innebærer at man presenterer hele rapporten for medlemmene eller de man har utforsket, for så å motta deres respons.» (Ryen, 2002, s. 182). Dette gjorde jeg hovedsakelig av to grunner. Den aller viktigste grunnen var at jeg ønsket å få tilbakemeldinger på om jeg hadde tolket informantene feil. Den andre grunnen var at det følte etisk riktig overfor informantene å gjøre det. Selv om jeg i intervjusituasjonen stilte validerings spørsmål som «Tolker jeg deg rett når du sier...», vil medlemsvalidering, ifølge Cohen et al. (2011), være en styrke for studiens validitet. Medlemsvalidering er ikke alltid uproblematisk, og det finnes flere eksempler på forskere som har mistet sine informanter etter at informantene fikk lese studien. Informantene i denne studien hadde kun én anmerkning, og formuleringen som ble anmerket ble omformulert til en formulering vi var omforent om.

Som vi kan se utfra transkripsjonene i kapittel 4, hender det at jeg stiller ledende spørsmål som «Førr at dem har et enklar språk?», «Ka det, vil det kreve tid?» og «At det va meir hverdagsnært?». Slike ledende spørsmål var ikke nedskrevne spørsmål i forkant av intervjuet, men heller et resultat av at intervjuene hadde en lav grad av struktur (Cohen et al., 2011). I etterkant ser jeg at dette er en av svakhetene med intervju med lavere grad av struktur. I intervju med høy grad av struktur holder man seg strammere til planlagte spørsmål og samtalene spinner ikke like mye rundt temaene som i et intervju med lav grad, og dermed er man kanskje mindre bevisst på hvilke ord man velger i oppfølgingsspørsmål, noe som gjør at intervjueren kan påvirke informantenes svar i større grad. Intervju med høy grad av struktur styrker studiens reliabilitet (Cohen et al., 2011, s. 204). Samtidig tror jeg man «vinner» noe med det mer ustrukturerte intervjuet; impulsive oppfølgingsspørsmål kan gi forskeren opplysninger som han ikke forutså før intervjuet.

4 Analyse

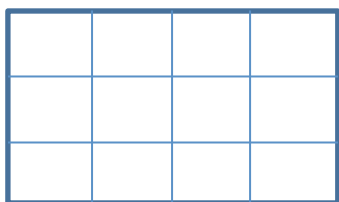
I dette kapitlet tar jeg for meg analysen av datamaterialet. Analysen er 2-delt. Den første delen av analysen tar for seg den observerte undervisningen der jeg analyserer hvilken matematisk forståelse fire undervisningstimer legger til rette for. I del 2 analyserer jeg intervjuene med lærerne i lys av de fire forskningsspørsmålene mine.

4.1 Analyse av observasjon i undervisningen

Under observasjonen av fokuslærerne, fokuserte jeg på hvordan ulike faktorer påvirket deres undervisning i matematikk, og på å beskrive undervisningen ved hjelp av feltnotater. All felles formidling lærerne utførte ble skrevet ned på ark. I tillegg skrev jeg fortløpende ned plenumsamtaler mellom lærerne og elevene, og i noen tilfeller fulgte jeg med lærerne når de veiledet elever i arbeid med oppgaver. Analysen av undervisningen bygger på disse feltnotatene, men er i enkelte tilfeller triangulert med utdrag fra det avsluttende intervjuet av lærerne.

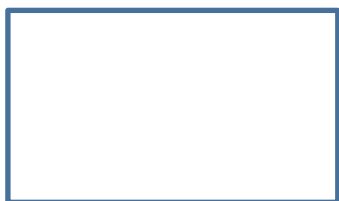
4.1.1 Hendelse 1 – Kvadratiske likninger

I undervisningsøkt 1 var temaet for timen kvadratiske likninger. Det elevene skulle finne ut av, var om det bare fantes ett svar på kvadratiske likninger. Lærer fortalte elevene om målet for timen og gav elevene i oppgave å tegne 4×3 . Elevene tegnet 4×3 (et rektangel) i skrivebøkene sine. En elev kom opp og tegnet 4×3 på whiteboarden. Eleven sa at dette var areal. Lærer tok raskt frem et rutenett på smartboardet og eleven tegnet inn 4×3 (Figur 1).



Figur 1

Arne tegnet opp et rektangel uten rutenett og mål på smartboardet.

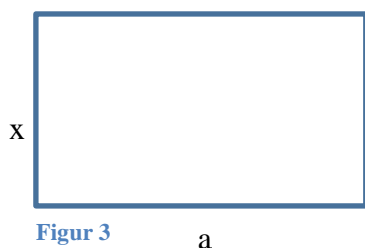


Figur 2

Arne stilte så et åpent spørsmål til alle elevene.

A:	Hva er arealet av dette?
E:	Vi må måle.
A:	Hvis vi ikke kan måle? Hva kan vi kalle sidene?
E:	x og.. a kanskje?
A:	Hva blir arealet?
E:	$x \times a$.

Arne tegnet på x og a på figuren.



A:	Hvorfor kan jeg ikke kalle begge sider for x ?
----	--

Allerede her ser vi at Arne har brukt utgangspunktet, som var å lære elevene å forstå løsning av kvadratiske likninger, og brutt utgangspunktet ned til noen av de mest elementære matematiske temaene løsning av kvadratiske likninger handler om; multiplikasjonstabellen og areal. Det Arne har gjort i introduksjonen her er å kople gammel kunnskap med annen gammel kunnskap og prøvd å legge til rette for at elevene skal kople sammen disse matematiske grenene som henger sammen. Matematikken koples på *før* undervisningen om kvadratiske likninger begynner. Førkunnskapen aktiveres, og hvis det var noen av elevene som hadde kunnskapshull i disse matematiske grenene, var dette også en sjanse til å forstå matematikken som ligger til grunn for kvadratiske likninger.

Hvis vi tenker på Hiebert og Lefevres (1986) definisjon og forklaring av begrepskunnskap, har Arne lagt til rette for begrepskunnskap allerede før elevene har begynt å jobbe med kvadratene. Hiebert og Lefevre sier at begrepskunnskap er kunnskap som må stå i relasjon til annen kunnskap, og at en isolert kunnskap ikke kan anses som begrepskunnskap. Videre sier de at for å utvikle begrepskunnskap – i dette tilfellet om forholdet mellom multiplikasjon, areal og algebra – må de isolerte kunnskapsbitene settes i relasjon til hverandre slik at de danner et nett av kunnskap. Hiebert og Lefevre (1986) nevner også *kunnskapshull* som én av tre faktorer som leder til prosedyrekunnskap. I dette eksempelet vil det være sånn at hvis noen av elevene i Arnes klasse har hull i en av de grunnleggende ferdighetene man trenger for å løse kvadratiske likninger, vil de mest sannsynlig oppleve å stå fast når de skal arbeide med kvadratiske likninger. Som vi ser av utdraget fra intervjuet nedenfor var tanken til Arne å bygge opp begreper det har vært snakket om før for å ta

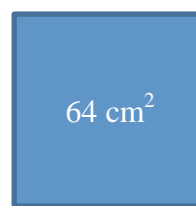
med elevene på det som skal skje videre i timen. På den måten kunne det hende at en eller to elever fikk en kognitiv reorganisering (Hiebert & Lefevre, 1986) der gammel kunnskap knyttes sammen.

I: Ka i dine tima va, eller va ikkje, relasjonelt støttanes?
A: Ja... /
I: Da hadde du jo tre økte. Den første økta hadde du likninge.
A: Ja,jo.. der prøvde æ jo det her med å bryte det ned, ka har vi hadd om før, og bygge det opp da. Så vi bygga det opp via gangetabellen, nær sagt, og tegna det. Det gjor vi mye i fjor da. Og bygga det opp derfra, så tegning. Ehh... å at dem sku tegne litt sjøl og at arealet og ka det e. Og at den her x i andre han e jo ikkje no villt fremmed. Vi kan jo tegne han. Og skjønne ka det faktisk e. Og tenkte at vi sku bruke videre det at koffer kan vi ikkje plusse x i andre med en x, for eksempel? Ka, koffer ikkje? E det, ja vi har jo snakka om det litt før du kom, om algebraen. da. Så det meine æ va på en relasjonell måte å bygge det opp på da..i forhold tell den tegninga, ja..og diskusjonen rundt det.

Arne vred videre undervisningen over fra rektangler til kvadrater og tegnet opp et 3x3-kvadrat som elevene skulle finne arealet av. Han tegnet videre opp et kvadrat med ukjente sider og et annet kvadrat med gitt areal.



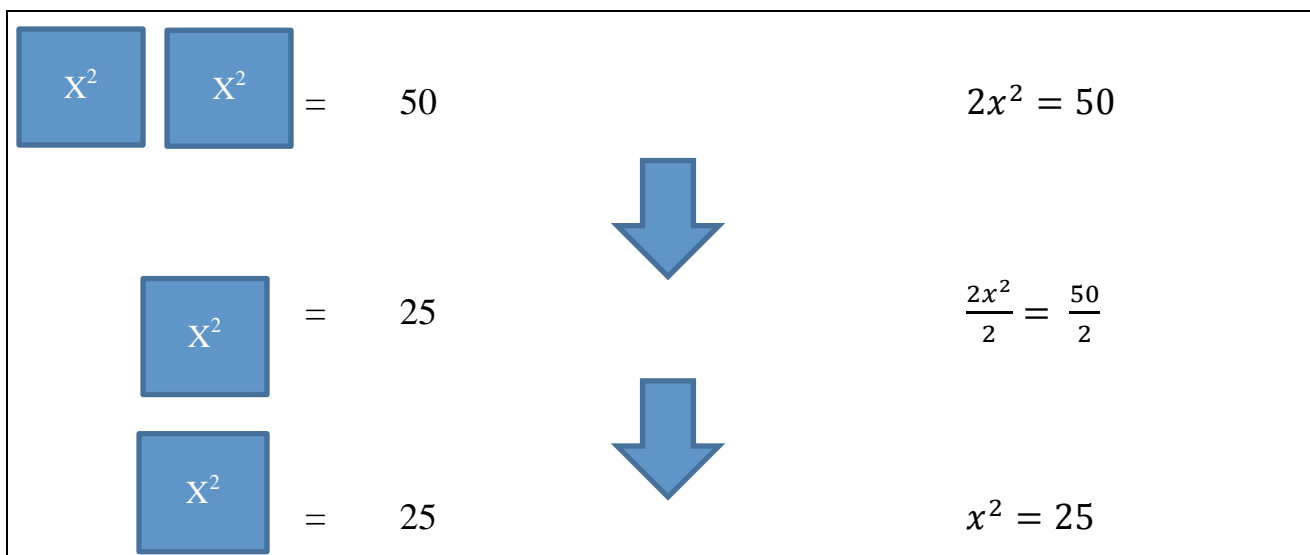
Figur 4 X



Figur 5

I Figur 4 kom flere av elevene raskt frem til at ettersom $3 \times 3 = 9$, måtte arealet av Figur 4 være $x \times x = x^2$. Forklaringen som elevene gav i plenum var at det var slik fordi sidene i et kvadrat var like lange. I Figur 5 kom elevene etter en diskusjon dem i mellom – og med lærer – frem til at sidene i figuren måtte være 8 cm. Arne brukte anledningen til å samtale med elevene om kvadrattall og kvadrattot.

Arne gav så elevene en oppgave. Han skrev opp likningen « $2x^2 = 50$ » og spurte: «Hvordan skal vi løse dette?». Arne demonstrerte løsningen samtidig som han tok elevene med på råd i gjennomføringen av løsningen. På venstre side tegnet han opp kvadrater, mens på høyre side skrev han opp de matematiske symbolene.



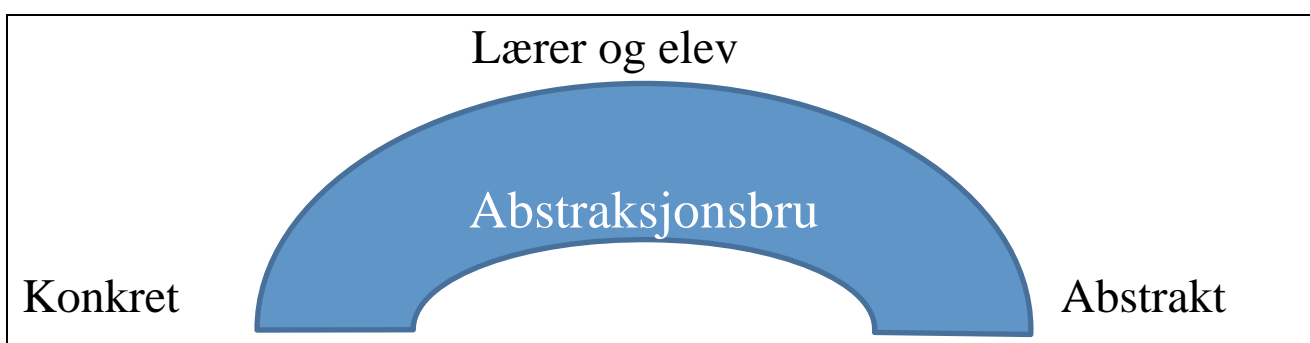
Figur 6

Arne diskuterte med elevene hvorfor han kunne dele på 2 på begge sider av likhetstegnet. Etter litt videre diskusjon forklarte Arne hvorfor man kan ta kvadratrota av 25 for å finne sidelengden x i kvadratet.

Arne skrev: $\sqrt{x^2} = \sqrt{25} \rightarrow x = 5$

Arne spurte om det fantes flere tall enn 5 som ganget med seg selv blir 25. Etter en stund med snakk kommer enkelte elever frem til at $(-5) \times (-5) = 25$. Arne redegjorde at det ikke finnes en negativ lengde og at det ikke går an å tegne i denne sammenhengen.

I analyse av denne undervisningssekvensen er det flere ting som er verdt å bite seg merke i. Med tanke på Skemp's (1976) definisjon av relasjonell forståelse, der elever skal forstå *hvorfor* man kan gjøre de operasjonene man gjør i løsning av likninger, er det klart at Arne forsøkte å legge til rette for at elevene skulle oppnå dette. Ved å tegne opp lengder og kvadrater som representasjon for symboler som x og x^2 prøvde han å gå sammen med elevene gjennom en abstraksjonsprosess.



Figur 7

Arnes rolle har trekk av lærerrollen Hiebert et al. (1997) beskriver. Oppgavene ble diskutert og reflektert over i plenum og elevene arbeidet både individuelt og sammen under problemløsningen.

Han stilte spørsmål som:

- Hva kjennetegner et kvadrattall?
- Hvordan tenkte du nå?
- Hva er egentlig kvadratrot?
- Er det andre tall som ganget med seg selv som kan bli 64?
- Hvordan tenkte du da du fant det ut?

Elevene måtte også hele tiden ta del i føringen på tavla. Elevene «bestemte» løsningsforslagene, men læreren hadde likevel regien.

I denne undervisningssekvensen ble smartboard brukt som et støttende læringsverktøy (Hiebert et al., 1997) for å forstå og løse matematiske problemer. Notasjonen av kvadratene på smartboardet bidro kanskje til at flere elever klarte å «være med på» abstraksjonsprosessen, enn det ville vært uten den. Det ble skapt referenter til kvadratiske likninger (Røsseland, 2011), og i tillegg fungerte smartboardet utmerket som tenkehjelp når elevene skulle tegne 12 cm^2 .

Spørsmål som «hvordan tenkte du nå?», var spørsmål som ble stilt uavhengig av om riktig svar ble avgitt. Hvis et svar var galt gav Arne elevene en mulighet til å reflektere over eget svar, noe som førte til at de enkelte ganger oppdaget sin egen feil. Å oppdage sin egen feil gir ikke samme nederlagsfølelse som når en lærer påpeker en feil. Når man oppdager egen feil har man brukt egen kunnskap til å oppdage det, og da har man jo vist matematisk kompetanse.

I intervjuet forklarte Arne hvorfor han valgte å undervise slik han gjorde i denne undervisningsøkten.

A: Ja, æ prøvde jo å få dem tell å skjønne ting, og vi, æ prøvde jo å få dem tell å lage den her x-en i andre, og finne ut at den va x i andre, at ikkje æ fortalte at her e en x i andre. Og så prøvde æ at dem, at vi sku løyse kvadratiske likninge, uten at vi hadde satt opp ei likning i det heile tatt. Sånn at vi sammen klarte å lage ei kvadratisk likning.

I: Koffer gjør du det?

A: Ja, emm... jo, førr vess æ hadde bære presentert den i boka, så hadde æ gjedd dem det, versågod her e det. Nu får dem delaktig blidd med å bygge det opp sjøl, og æ trur det e med at dem relatere det tell sæ på en anna

måte. Og så håpe æ at dem kan bruke det litt i forhold tell når dem sett og løyse. Før med ei tegning så skjønne alle det. Asså, okei her har æ tre x-a i andre, dem ser faktisk sånn ut. Minus 2 x-a i andre, dem ser faktisk akkurat sånn ut. Det e jo kjempelett, da sett dem med 1 x i andre igjen. Men når dem ser regnestøkket, $3x^2$ minus $2x^2$ (Arne lager forsvinnende lyd), ka gjør æ her?

I: Du hjelpe dem med abstraksjonsprosessen?

A: Ja, æ tenke det. Og det så æ med, når vi hadde introduksjon med likninge da vi brukte fyrstikkeske i forhold til variabler og sånn. Da så æ at det hjalp veldig. Og ting e så lett når det e ei tegning. Når det e konkrete ting, da kan jo alle det. Og så e det å hjelpe og bruke det når de sett og løyse oppgava.

Her kommer det frem at i undervisning av tema der prosedyrekunnskap er nyttig – slik som i løsning av likningsproblem – fokuserer Arne på å gi elevene flere ulike representasjoner som hjelp til abstraksjonsprosessen. Dette samsvarer med Reason (2003) som skriver at elever skal oppnå både relasjonell og instrumentell forståelse, og at disse to forståelseskategoriene former en dualitet fremfor å være distinkte.

Arnes undervisning bærer preg av mange elementer som kan knyttes til relasjonell undervisning og relasjonell forståelse. I arbeidet med kvadratiske likninger var oppgaver fra læreboken den eneste interaksjonen med læreboken. Formidlingen hans hadde ikke utgangspunkt i læreboken. Ifølge han selv ville han uten masterutdanningen brukt læreboken som basis for undervisningen¹, og ettersom læreboken presenterer eksempler på løsningsprosedyrer (se Figur 8 og Figur 9) – uten vektlegging av forståelse – ville denne undervisningssekvensen, uten hans fagkompetanse, fått et mer instrumentelt preg.

Likninger av typen $x^2 = 16$ kaller vi *kvadratiske likninger*. Ettersom både 4^2 og $(-4)^2$ er lik 16, så vil både $x = 4$ og $x = -4$ være løsningen på likningen $x^2 = 16$.

Det vil altså si at $x = 4$ og $x = -4$ er løsningen på likningen $x^2 = 16$.

Regel

Kvadratiske likninger har *alltid* to løsninger.

Figur 8, utdrag fra Faktor. Denne introduksjonen viser ett eksempel på en kvadratisk likning med løsning. Eksemplet etterfølges av en regel.

¹ I kapittel 4.2.1 sier Arne at uten masterutdanningen, ville han 99 % sikkert basert seg på læreboken.

Arne presenterte en fyrstikkoppgave på smartboard:



Figur 10

Alle elevene fikk i oppgave om overføre denne oppgaven til en likning med matematisk språk og løse den. Det ble ikke sagt at elevene skulle samarbeide med hverandre, men mange av elevene samarbeidet automatisk med sidemannen.

A: Hvordan løste dere dette?

E: $3x + 3 = 9$.

A: Hvordan løste du likningen?

E: Jeg tok bort 3 på begge sider.

A: Hvorfor?

E: Man må ta bort like mye.

Sekvens 4:

A: Gjør oppgave 6.24 i heftet [*oppgaver hentet fra et annet læreverk.*] og forklar eller vis hvorfor det som står i oppgaven er sant eller usant.

[*Oppgaven kommer med påstanden: « $x = -5$ » er det samme som « $-x = 5$ ».*]

Elevene jobbet to og to for å løse denne oppgaven. Det virket som om mange slet med å sette ord på det selv om de «skjønte» at påstanden var riktig. I en samtale mellom Arne og to elever klarte elevene, med lærerens veiledning, å finne ut av problemet.

E: Vi kan dele begge sidene på minus.

A: Kan ikke *bare* dele på minus.

E₂: -0?

A: Dele på null er...

E₂: Bare tull.

A: Hva må dere dele på for å få det samme?

(Elevene tenker)

A: Hvis du har 100 kroner. Hva må du dele på for å fortsatt ha 100 kroner?

E: 1. Dele på -1?

A: Ja, for eksempel.

Eleven fikk senere muligheten til å vise sin løsningsmetode for de andre elevene i klassen. Arne viste at det er enda flere måter å løse dette på, og henviste til «flytt og bytt».

(Arne skriver.)

$$x = -5$$

$$5 = -x$$

A: Men dette er jo ikke det samme som $-x = 5$

E: Men det er jo likt.

Arne roterte vektskålen han fortsatt hadde stående på pulten 180° og spurte elevene om det var noe ved likningen på vektskålen som forandret seg.

E: Ingenting. Det er det samme.

A: Da kan vi gjøre det med likninger også.

(Arne skriver.)

$$5 = -x$$

$$-x = 5$$

I alle sekvensene jobbet Arne med å bygge opp begrepsforståelsen for likhetstegnet. I sekvens 1 brukte han en vektskål som representasjon for likevektprinsippet. I sekvens 2 prøvde han å gjøre elevene oppmerksomme på å være bevisste på bruken av likhetstegnet i utregninger. I sekvens 3 brukte han fyrstikkesker som representasjon på en ukjent i arbeidet med likninger, der elevene skulle overføre det til en likning med matematisk språk. I sekvens 4 skulle elevene undersøke om én likning var det samme som en annen likning, og den ble avsluttet med at Arne demonstrerte at å snu sidene på ei vektskål tilsvarer å snu sidene i en likning.

Jeg oppfatter det slik at oppgaven i sekvens 4 legger til rette for at elevene skal få kommunisere og reflektere over matematikken. Oppgaven er av en slik art at det ikke er én bestemt løsning, og elevene må bruke kunnskaper de allerede har for å utvikle en løsningsmetode på problemet (Hiebert & Lefevre, 1986; Hiebert et al., 1997). Eleven som «fant» metoden «dele på -1» fikk muligheten til å dele sin idé med resten av klassen og fikk med det øve seg på å bruke språket for å rettfærdiggjøre sin løsning. Samtidig dro nok resten av klassen nytte av å se at eleven kanskje hadde en annen fremgangsmåte enn det *de* kanskje hadde. I denne oppgaven hadde elevene valgfrihet i forhold til hvordan de løste den. Sekvensen viser også at Arne ikke tok den tradisjonelle lærerrollen, men i

stedet en rolle der han legger opp til at elevene skal konstruere kunnskap selv eller i samhandling med andre elever. Løsningene ble også diskutert i plenum, noe som gir alle i klasserommet en mulighet for læring (Hiebert et al., 1997).

I sekvens 2 der Arne gav elevene muligheten til å oppdage misbruk av likhetstegnet, viste han elevene at det er mer hensiktsmessig å bruke symbolet \rightarrow , ettersom likhetstegnet representerer likhet. Jeg anser dette som opplæring av matematisk syntaks (Hiebert & Lefevre, 1986). Dette bidrar til at både symbolet « \rightarrow » og « $=$ » får en forsterket posisjon i bevisstheten til elevene, og de kan fungere som tilgjengelige verktøy som elevene kan bruke til å løse problemer (Hiebert et al., 1997, s. 56-57)

Et eksempel på at Arne forsøkte å gi alle elevene en mulighet til å oppnå en relasjonell forståelse for matematikk, viser seg i sekvens 4 da elevene «står fast» og Arne innledet en samtale med dem. Elevene foreslo å dele på minus, noe som ikke var en akseptabel matematisk løsning. «Hva må en dele på for å få det samme?» var antakeligvis ikke konkret nok for elevene, og Arne modifiserte problemet til «Hvis du har 100 kroner. Hva må du dele på for å fortsatt ha 100 kroner?», noe som førte til at elevene evnet å finne frem til en løsning som stod i relasjon til måten de angrep problemet på.

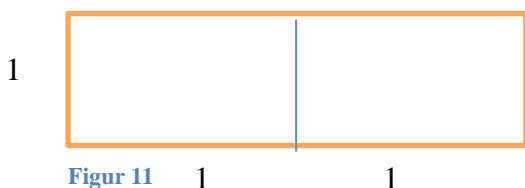
Alle sekvensene oppfyller i større eller mindre grad de fem aspektene i Hiebert et al. (1997). Det er vanskelig å si noe om oppgavene var innenfor faglig rekkevidde for alle elevene, og om alle deltok. Arnes måte å modifisere oppgaven på viser imidlertid at han prøver å gjøre oppgaven oppnåelig for elevene slik at de kan dra matematisk lærdom frem den. Om han lyktes med det på *alle* elevene, vet jeg ikke.

4.1.3 Hendelse 3 – Forholdsregning med flagg og rektangler

I den andre observerte undervisningsøkten med Berit, var målet for timen at elevene skulle lære om forholdsregning. I denne matematikktimen viste hun fem eksempler på forholdsregning.

Eksempel 1:

Berit tegnet et rektangel på tavla.



B: Hvorfor er dette et rektangel?

[Elev gir korrekt svar.]

B: Forholdet mellom høyden og bredde er 1:2. Hva er tegnet?

E₁: Deletegn.

B: Kan vi skrive det på en annen måte?

E₂: $\frac{1}{2}$.

B: Bra! Vi kan skrive det som brøk.

(Berit skriver «1:2 \rightarrow $\frac{1}{2}$ ».)

Eksempel 2:

Berit gav elevene en oppgave:

Forholdet mellom lengde og bredde i et rektangel er 3:1. Hvis bredden på rektangelet er 10 cm. Hva skal lengden være?

Berit tegnet på tavla:



Figur 12

E: 30 cm. [Prøver å forklare, men blir avbrutt av Berit]

B: Skjønner dere?

[Stille i klasserommet.]

E₂: Jeg gjør det på en annen måte. Jeg ganger forholdet med 10.

B: Ok, vi går litt videre. Vi går litt videre på det som står i boka.

Eksempel 3:

Berit gjennomgikk eksempeloppgaven på Figur 13 på projektor.

Forholdsregning



I et flagg skal de ulike lengdene stå i et bestemt forhold til hverandre. I det australske flagget er forholdet mellom bredde og høyde 2 : 1. Det betyr at bredden skal være to ganger høyden. Dette gjelder uansett hvor stort flagget er.



I det italienske flagget er forholdet mellom bredde og høyde 3 : 2. Det betyr at bredden er $\frac{3}{2}$ av høyden.

Eksempel

Et italiensk flagg er 20 cm høyt. Hvor bredt er flagget?

$$20 \cdot 1,5 = 30$$

Flagget er 30 cm bredt.



- 3.1 Finn bredden av et australsk flagg som er
a 20 cm høyt b 0,5 m høyt c 2 m høyt
- 3.2 Finn høyden av et australsk flagg som er
a 60 cm bredt b 80 cm bredt c 10 m bredt
- 3.3 I flagget til Algerie er forholdet mellom bredde og høyde 3 : 2. Finn bredden av et slikt flagg som er
a 10 cm høyt b 40 cm høyt c 1 m høyt
- 3.4 Finn høyden av et algerisk flagg som er
a 60 cm bredt b 75 cm bredt c 6 m bredt
- 3.5 I det norske flagget skal forholdet mellom bredde og høyde være 11 : 8. Hvilket av disse flaggene er tegnet i riktig forhold?



Figur 13, utdrag fra Multi. Bildet viser eksemplet brukt i hendelse 3, og oppgavene som var grunnlaget for hendelse 4.

B: Hvor stor er høyden i det italienske flagget hvis det grønne er 10 cm og bredden 30 cm?

E₁: 20 cm, fordi høyden er to tredjedeler av bredden.

B: I hvert fall 2 ganger den grønne delen.

(Berit viser på tavla.)

B: $\frac{3}{2}$ er 3:2.

E₁: Burde det ikke stå omvendt?

B: Når oppgaven sier bredden først, så skal bredden stå øverst på brøken. Hva var regelen for pluss av brøk?

E₂: Plusse nevner.

B: Nevner skal ikke røres. Vi ser (*skriver* $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$). Ser dere det? $\frac{3}{2}$ er en hel bit pluss en halv til. Det er det samme som å gange med 1,5.

Eksempel 4:

B: Når høyden er (Australias flagg) 20 cm. Hva er bredden?

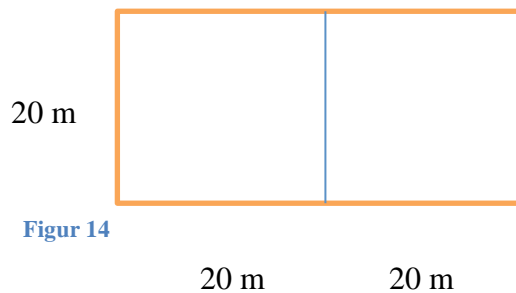
E₁: 40 cm.

E₂: Jeg forstår ingenting fordi en plass står det cm og en plass meter.

[Flere elever uttrykker at de ikke forstår og noe frustrasjon brer seg i rommet. Berit prøver å forklare en elev forholdsregning i plenum, men eleven forstår ikke. Berit ser litt oppgitt ut. De har holdt på med oppgave 3.1 i 20 minutter.]

Eksempel 5:

Berit skrev 2:1 på tavla og tegnet opp et rektangel. Hun sa at hvis forholdet mellom bredden og høyden er 2:1, er bredden to ganger så lang som høyden.

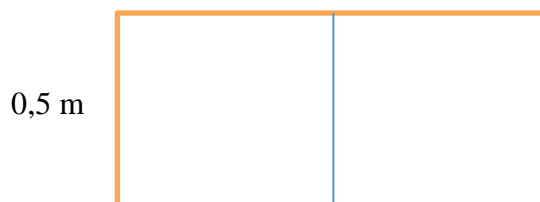


Figur 14

En elev sier han skjønnte det nå. Berit får bekreftende nikk fra flere.

B: Er du med, Lise? Nå som det er meter?

[Lise svarer ikke. Berit tegner et rektangel og skriver 2:1.]



Figur 15

B: Hvor bredt er det nå?

Lise: 1 meter.

B: Er dere med nå?

E: Ja, men ikke det der 3:2.

I denne undervisningsøkten baserte alle eksemplene – unntatt eksempel 1 – seg på å finne ut en ukjent side av et rektangel eller flagg når forhold mellom høyde og bredde er oppgitt. Berit slet med å få elevene til forstå hvordan de skulle finne den ukjente siden. Jeg oppfatter at Berit i denne undervisningssekvensen viste eksempler på hvordan elevene skulle løse oppgaver i forholdsregning i en rektangel-/flaggkontekst. Hiebert og Lefevre (1986) mener at kunnskapen som læres i én spesiell kontekst blir sterkt bundet til den konteksten den er lært i. Berits rolle ligger her nær den tradisjonelle læreren (Hiebert et al., 1997) som demonstrerer eksempler, der forståelsen kommer hvis elevene følger med på det læreren sier og gjør.

I eksempel 2 og 3 kom elever med forslag til løsningsmetoder til problemet uten at Berit valgte å undersøke elevenes løsningsmetoder nærmere:

Eks. 2:

«E₂: Jeg gjør det på en annen måte. Jeg ganger forholdet med 10.

B: Ok, vi går litt videre. Vi går litt videre på det som står i boka.»

Eks. 3:

«B: Hvor stor er høyden i det italienske flagget hvis det grønne er 10 cm og bredden 30 cm?

E₁: 20 cm, fordi høyden er to tredjedeler av bredden.

B: I hvert fall 2 ganger den grønne delen.»

Hiebert et al. (1997) mener alle idéer og meninger potensielt kan bidra til læring, og idéene bør tas på alvor for å lage en kultur der alle elever får forstå sin egen metode. I disse to situasjonene ivaretas ikke de tankene. Det ble ikke avsatt tid til oppgaveløsning i denne økta. All undervisningstid gikk til at læreren viste eksempler fra tavla. Noe av grunnen til det var at mye tid forsvant til kontaktlærerarbeid som ble gjort i den første delen av undervisningsøkten. I denne timen var det få elementer som samsvarte med de fem aspektene i Hiebert et al. (1997). Undervisningen stimulerte i liten grad til relasjonell forståelse.

På spørsmål i intervjuet om hvorfor Berit brukte hele timen på å demonstrere flagg- og rektangeleksempler på forholdsregning, kom det frem at hun i utgangspunktet ikke hadde planlagt å innlede temaet med å demonstrere løsninger på forholdsregning med rektangler. Hun sa i intervjuet at elevene antakeligvis ikke klarte å relatere seg noe særlig til forholdsregning med flagg, og at hun burde brukt eksempler eller oppgaver som de i større grad kunne føle eierskap til. Den opprinnelige

planen var at elevene skulle gjøre en aktivitet med centikuber, men ettersom disse allerede var utlånt, fikk undervisningen en tradisjonell innfallsvinkel.

I:	Klare du å tenke på nå aktivitet du kunne starta det her temaet med? Som e, der du sjøl ikkje instruere?
B:	Ja, æ hadde tenkt å gjøre en aktivitet.
I:	Ja, korsen aktivitet?
B:	Æ hadde tenkt å bruke sånn herre, sånn herre kvadratiske brikka som du kan sette i hop.
I:	Sånne centikuba?
B:	Ja. Sånne som sett fast i hverandre. Det hadde æ tenkt å bruke. At de sku få utdelt nå brikka, og så sku de bruke det her med å ta 1 tell 2, med å ta 1 rød og 2 hvite. Og så se hvordan dette utvide sæ vess man bruke de førr at de sku få sette i sammen. Men de va opptatt. De va faktisk lånt ut tell nå andre.
[...]	
I:	Så det påvirka faktisk heile måten du la opp undervisninga om forholdsregning på?
B:	Ja, det gjor det.

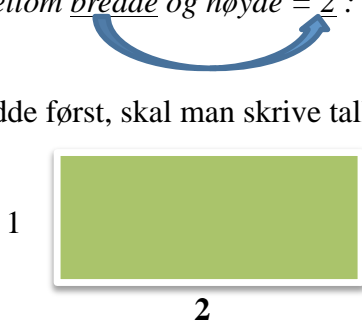
Mangel på formidlingsressursen *centikuber* førte til at undervisningen ble lærebokstyrt, og det gjorde at en aktivitet der elevene skulle få sitte og jobbe med problemet selv ikke ble gjennomført. En slik aktivitet ville hatt et bedre utgangspunkt for å oppfylle kriteriene for klasserom som stimulerer til forståelse i Hiebert et al. (1997).

4.1.4 Hendelse 4 – Andre time med forholdsregning

Etter første time med forholdsregning uttrykte Berit at hun ikke var fornøyd med hvordan timen hadde gått. Hun følte at elevene ikke fikk helt «tak på» oppgavene, og sa at hun ble å bruke hele neste time på å gjennomgå oppgavene om forholdsregning elevene hadde fått i lekse. Den andre timen med forholdsregning var preget av eksempler, forklaringer og muntlig elevaktivitet. Etter en kort innledning med repetisjon, gjennomgikk hun alle oppgavene eleven hadde hatt i lekse i kronologisk rekkefølge (se Figur 11).

Innledning:

Berit skrev: «Forholdet mellom bredde og høyde = 2 : 1



Figur 16

Forklarte at når man sier bredde først, skal man skrive tallet til bredde først.

Oppgave 3.1 a:

Berit tegnet:



Figur 17

B: Vi skal finne ut hvor bredt flagget er når vi får vite at høyden er 20 cm.

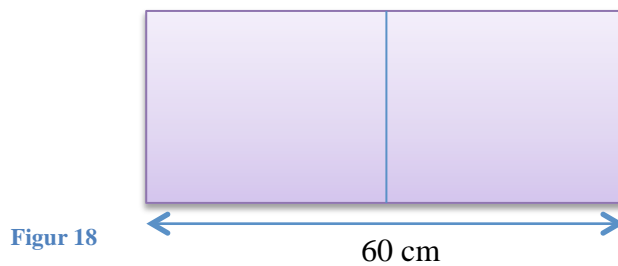
E₁: 40 cm.

B: Hvorfor?

E₁: Fordi bredden skal være dobbelt så lang.

Oppgave 3.2 a:

Berit tegnet:



B: Nå skal vi prøve den motsatte veien. Er alle med? Hvor mye blir det i hver bit?

E₁: 30 cm.

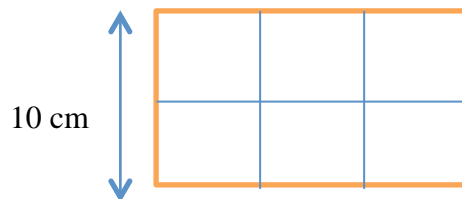
B: Hvor høyt er flagget?

E₁: 30 cm.

B: Hvorfor?

E₁: Fordi det er halvparten.

Oppgave 3.3 a:



Figur 19

B:	Hvordan kom du frem til bredde?
E ₁ :	Vet ikke.
B:	Det er viktig å vite hva vi gjør.
E ₂ :	Kan dele 10 på 2, og da blir bredden 15 cm.
E ₃ :	Jeg gjorde det på en annen måte. Vi delte 10 på 2 og ganget med 3.
B:	Veldig bra. De som har valgt gangning med 1,5, det er helt ok. Det er mange måter å komme frem til svaret på.

Oppgave 3.5:

B:	Hvordan tenkte du?
E ₁ :	Så på hva som så riktig ut.
B:	Helt ok måte å løse det på.
E ₂ :	Jeg målte sidene og fant halvparten av 8 og halvparten av 11.
B:	Ok.
E ₃ :	Jeg ser an hva som er rett.
E ₄ :	Mamma tvang meg til å måle, og da fant jeg ut at bredden var 5,5 og høyden 4. Hvis jeg ganger begge med 2 så får jeg forholdet.
B:	Dette er den vanskeligste oppgaven. Helt greit å ta det på øyemål.
E ₂ :	Jeg synes dette var den enkleste oppgaven.
E ₅ :	Enig.
B:	De siste oppgavene på en side er ofte vanskeligst.

Innledningsvis forklarte Berit at siden man sier bredde først, skal bredden være det første tallet i forholdstallet. Informasjonen baserer seg på en huskeregel. Fordelen med dette er at huskereglene er enkle å lære seg (Skemp, 1976). Ulempen er at det kan være umotiverende å skulle huske på mange slike huskereglene. Gjør du imidlertid mange nok øvelser, er sjansen god for at du blir å huske det. Det er dette Skemp kaller for *habit learning* (Skemp, 1989) og som Hiebert og Lefevre (1986) definerer som pugg. Pugg har et fravær av relasjoner og er sterkt knyttet opp mot innlæringskonteksten.

Likevel var denne timen vesentlig forskjellig fra den første timen med forholdsregning på ett Sentralt punkt; elevene var mye mer deltakende i drøftinger av løsninger. Deres matematiske idéer ble delt med deltakerne i klasserommet (Hiebert et al., 1997). I motsetning til den første forholdsregningstimen, der Berit demonstrerte eksempler og formidlet informasjon om hvordan en kunne finne ut en ukjent side ved hjelp av forholdsregning, ble denne timen mer preget av kommunikasjon og refleksjoner rundt prosedyrene elevene hadde valgt, noe som vises i oppgave 3.3 og oppgave 3.5. I oppgave 3.1, 3.2 og 3.3 ble elevene i større grad utfordret på hvorfor de mente

svaret deres var riktig, og hvordan de tenkte da de bidro med sine løsninger. Dette skilte seg også ut ifra hendelse 3, der Berit ikke tok tak i elevenes måte å tenke på da de presenterte løsninger.

If they spend most of their time watching the teacher demonstrate methods for solving special kind of problems, they are likely to become better at imitating these methods on similar problems. If they spend most of their time reflecting on the way things work, on how various ideas and procedures are the same or different, on how what they already know relates to the situations they encounter, they are likely to build new relationships. (Hiebert et al., 1997, s. 17)

Oppgavene var av en slik art at det ikke var én bestemt metode for å løse problemene. Dette ser vi av måten elevene kommuniserer matematikken på i plenum. Berit la også i større grad til rette for at elevene skal få kommunisere matematikken, og viste at hun gav elevene valgfrihet i forhold til de metodene de ønsket å bruke. Dette vistest da hun sa: «Det er mange måter å komme frem til svaret på.». I hendelse 4 la hun i større grad til rette for at elevene skulle få muligheter til å utvikle sin begrepsforståelse i matematikk fordi matematikken ble kommunisert. Imidlertid var så å si alle oppgavene knyttet opp mot flagg og rektangler – samme kontekst – noe som ifølge Hiebert og Lefevre (1986) kan føre til at kunnskapen blir svært bundet til denne konteksten og vanskelig vil kunne la seg overføre til forholdsregning i andre kontekster. Skemp (1976) skriver at i sin egen kontekst er prosedyrer enklere å forstå, og i noen sammenhenger betraktelig mye enklere. Når kunnskap blir knyttet opp mot en spesiell kontekst, og ingenting annet, kaller Hiebert og Lefevre (1986) det for kunnskap på *primærnivå*.

Oppgave 3.5 er interessant fordi den skiller seg litt fra de andre oppgavene. I denne oppgaven er forholdet oppgitt, og elevene skulle undersøke hvilket flagg som hadde det riktige forholdet. I motsetning til Berits ytring om at «dette er en vanskeligste oppgaven», uttrykte flere av elevene at de tvert om syntes dette var den enkleste oppgaven. Av elevutsagnene fra undervisningsøkten ser vi at elevene ytrer 3 forskjellige fremgangsmåter i forhold til den oppgaven: øyemål; målte sidene og fant halvparten av forholdet; målte sidene og ganget de med to. Denne oppgaven legger til rette for at elevene skal kunne reflektere over hverandres løsningsmetoder og diskutere likheter og forskjeller mellom metodene (Hiebert et al., 1997). At oppgavene innbyr til at elevene må måle og undersøke kan også ha ført til at de fant oppgaven interessant. Imidlertid ble ikke løsningene deres diskutert ved denne anledningen.

Helt på slutten av timen brøt Berit rektangelkonteksten med å diskutere en oppgave som gikk ut på å finne ut hva forholdet mellom ris og vann skulle være når man skulle koke ris. Med dette eksemplet virket det som flere elever klarte å knytte oppgavekonteksten til seg. Det sier

også Berit noe om i intervjuet.

B:	Men vess æ hadde tadd det her med ris, som får større konsekvensa før /
I:	Ja, før det va et heilt anna type eksempel du hadde /
B:	Ja, æ trur vess æ hadde tadd det innledningsvis, så kanskje æ hadde hadd fleire med. Tell å begynne med.
I:	At det va meir hverdagsnært?
B:	Ja, før det va meire sånn, sånn at dem faktisk skjønne at forholdet har betydning, eller så går det gærnt. Om det går gærnt med det flagget, om det blir litt lengre, eller, asså, ka e poenget i det, liksom?

4.1.5 Oppsummering av observert undervisning

Hendelse 1 viste at Arnes undervisning i liten grad lot seg styre av læreboken. Undervisningen i hendelse 1 la til rette for relasjonell forståelse på den måten at han prøvde å bygge opp begrepene rundt kvadratiske likninger og brukte ulike representasjoner som støtte for dette. I noen tilfeller kan det være lettere å utelukke at undervisningen legger til rette for instrumentell forståelse enn det er å bekrefte at den legger til rette for relasjonell forståelse. En instrumentell tilrettelegging skulle hatt mer fokus på rekkefølgen av regler, og bruken av regler, i løsning av kvadratiske likninger. Det skulle vært mer fokus på metoden for løsningen. Dette var ikke tilfellet i denne hendelsen.

Hendelse 2 viste Arnes oppbygging av begrepet «likhetstegnet», og han brukte ulike innfallsvinkler og misoppfatninger for å styrke dette begrepet hos elevene. I denne undervisningøkten passet Arnes undervisning godt med Hiebert et al. (1997) sine aspekter for et klasserom som legger til rette for utvikling av begrepskunnskap og prosedyrekunnskap samtidig.

Hendelse 3 viste en undervisning som i liten grad passet med de fem aspektene til Hiebert et al. (1997), og la med tanke på aspektene ikke til rette for utvikling av begrepskunnskap og prosedyrekunnskap samtidig. Undervisningen var basert på at Berit viste eksempler på et spesifikt problem på tavla og at elevene skulle følge godt med. I utgangspunktet hadde Berit tenkt å bruke en praktisk aktivitet som innledning til emnet, men fravær av formidlingsressursen *konkreter* førte til at hun baserte seg på lærebokens instruksjon.

Hendelse 4 viste at når Berit tar elevene med på refleksjon rundt oppgavene i plenum, kom flere løsningsstrategier frem, og hun tok elevenes matematiske forståelse på alvor ved å spørre dem om hvordan de tenkte da de presenterte sine løsningsforslag. Hendelsen viste også at Berit så at oppgavetyperne som var i læreboken var for ensformig, og selv sa hun at hun burde ha brukt mer hverdagsnære eksempler. Denne økta hadde elementer av relasjonelle tilnærminger til stoffet, men det var også instrumentelle tilnærminger som det at «hvis oppgaveteksten sier bredde først», skal

tallet for bredde stå først i forholdstallet.

4.2 Fokuslærerne om hvilke faktorer som påvirker matematikundervisningen

4.2.1 Formidlingsressursers påvirkning

Under intervjuet med Arne snakket vi om flere typer formidlingsressurser som digitale hjelpemidler og smartboard. Men etter hvert dreide samtalen seg inn mot bruk av læreboken og dens påvirkningskraft.

- | | |
|----|---|
| I: | Korsen ressursa – eller mangel på ressursa – påvirke undervisninga i retning instrumentelt? |
| A: | Mmm. Ja, eeh...meir og meir har det gådd opp førr mæ, og æ har jo leita lenger og lenger bort fra det læreverket vi har. Og gjennom det vi har gjort her har æ jo / |
| I: | Korsen læreverk har dåkker? |
| A: | Faktor..så har æ jo innsedd kor instrumentelt det læreverket e. Det æ va borti før..det va... nu huske æ ikkje ka det heite, men det hadde, ikkje sant, éi bok førr geometri sia det va aldersblanding. |
| I: | Ja. |
| A: | Ja... og det va óg heilt instrumentelt og det har nok påvirka mæ. Og så tok det nok tid førr æ innså kor «gæle» det va, og nu..prøve æ å, all mi undervisning på tavla..trur æ ikkje bunne ut av læreverket i det heile tatt...kanskje. |

Arne fortalte her at lærebøkene han har brukt før, og den han bruker nå, legger opp til en instrumentell forståelse for elevene, men at hans nåværende undervisning ikke legger læreverkets formidling til grunn for hans egen formidling. Dette er i samsvar med den observerte undervisningen av Arne. Jamieson-Proctor og Byrne (2008) skriver at lærerens vurdering av den matematiske verdien til læreboken påvirker lærerens bruk av den. Rezat (2012) sier at læreboken brukes i hovedsak på to måter: oppgavesamling og/eller en guide til instruksjon. Observasjonen av Arne viste at den ble brukt som en kilde til oppgaver. Læreboken Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006) har instrumentelle presentasjoner av mange tema i matematikk, noe vi også kan se av Figur 8 og Figur 9 som var introduksjonssidene til temaet kvadratiske likninger som Arne underviste i datainnsamlingsperioden. Hvis Arne skulle presentert en formidling som baserte seg på denne introduksjonen, kan det tenkes at undervisningen ville lagt opp til å presentere en løsningsmetode for et problem, flere lignende eksempler med påfølgende oppgaveløsning der elevene gjør oppgaver som står i stil med eksemplene. I slike situasjoner søker elevene forståelse for selve metoden, ikke matematikken (Mellin-Olsen, 1984). Instrumentalismen blir grunnlaget for læringen og lærerens rolle blir å være en person som serverer informasjon til passive elever, demonstrerer prosedyrer og som gir oppgaver som står i stil med gjennomgangen (Hiebert et al. 1997; Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp 1989).

Likevel poengterte Arne noe viktig. Han fortalte at hans nåværende undervisning ikke legger læreboken til grunn, selv om han bruker temaene som basis.

- | | |
|----|---|
| I: | E den [<i>læreboka</i>] styrans i din undervisning vil du si? |
| A: | Vi velge jo tema utifra det og så ser vi jo ka dem har..under de ulike teman. Vi følg jo det ganske bra da, men så prøv æ jo å gå uttaførr i forhold tell undervisninga da..ja. |

Det kom altså frem at læreboken påvirker hans valg av tema og undertema for undervisningen, men at hans nåværende undervisning ikke kan baseres på læreboken fordi han vurderer det slik at den legger til rette for instrumentell forståelse (Jamieson-Proctor & Byrne, 2008). Det som er interessant er hvorfor Arne har gått bort ifra å bruke læreverket som ressurs til formidlingen.

- | | |
|----|--|
| I: | Korsen e dett undervisningssyn i forhold tell de begrepan [<i>relasjonell og instrumentell forståelse</i>]? |
| A: | Ja, eeh... der trur æ at æg heile tia e relasjonell. Og så lære man jo nye ting heile tia, så man finn ut at det man trudde ikkje alltid stemme. Og æ ser jo den utviklinga man har hadd, heile veien, i forhold tell å gjøre det relasjonelt, så kan man jo si, dessverre, med handa på hjertet at det før kanskje ikke va det. (<i>Ler litt mens han sier det</i>) |
| I: | Koffer e det sånn da? |
| A: | Ja koffer e det sånn? Eeh... jo, det kjæm jo litt an på ka man har med sæ, ka slags tanka man har, og æ va og veldig opptatt av å gjøre det relasjonelt da æ kom ut da. Med tid. Ka slags tid du har å legge i det. Og så har vi kanskje funne ut at... den læreboka man har brukt ikkje fordre det her relasjonelle som man ønske, og det tar jo tid før man innser det, dessverre, spesielt vess man ikkje har nån samtalepartnera man kan snakke litt om det. Eeh.. så når man plutselig ser det og, og ser ka det e man hold på med så får man nye horisonter vess man kan si det sånn da. Ja. Kanskje. Det e jo komplekst da. |

Her trakk Arne frem flere grunner til at hans tidligere undervisning har vært preget av mye instrumentell tilnærming. Han trakk frem rammefaktoren *tid*, kollegaressursen *samtalepartnere* og formidlingsressursen *læreboken* som noen alternative årsaker til at det ble sånn. I artikkelen til Eisenhart et al. (1993) påvirket undervisningssynet til én kollega studenten til å undervise for begrepsforståelse, mens en annen kollega påvirket undervisningen hennes i retning prosedyrekunnskap. Studenten følte også et tidspress i forhold til å «komme gjennom pensum».

Grunnen til at Arne nå arbeider for å gi elevene relasjonell undervisning kom også frem.

- | | |
|----|---|
| I: | Korsen trur du din undervisning ville ha vært vess du ikkje hadde hadd masterutdanning? |
| A: | Da hadde æ vært en eh, brukt boka. |

I: E du sekker på det?
A: Ja..asså... 99 % sekker på, ja.

Her er det implisitt at Arne mente at det er utdanningen hans som har bidratt til at han har beveget seg bort fra instrumentell formidling og lærebokens formidling, og han var tydelig på at uten utdanningen hadde han ikke etterstrebet relasjonell undervisning.

Formidlingsressurser har en stor plass i undervisningen til alle lærere, også Berit. I Berits klasserom fantes det smartboard, projektor, 6 PC-er og ei flyttbar krittavle. I den observerte undervisningsperioden var det nok krittavla som var hyppigst brukt, ofte i interaksjon med læreboken. I intervjuet kom det frem at læreboken har en svært sentral plass i undervisningen i klasserommet hennes og på skolen generelt.

I: Men du bruke åsså læreboka endel. E den styranes i di undervisning?
B: Ja, det vil æ si.
I: På korsen måte?
B: Følg jo den ganske, ikkje slavisk, før vi veit jo det at vi e nødt, vi kan ikkje gå gjennom alt. Det e ikkje alt vi på trinnet, så e det jo vi som planlegg matematikken, vi går ofte inn og ser ka det e dem skal bli testa i når dem skal ha prøva. Og så hente vi det som e vesentlig i forhold tell det, og konsentrere oss om de tingane. Den styre oss nok veldig mykje og så hoppe vi nångang av og gjør andre ting, men den e nok i hovedsak styranes.

Berit sa at kapittelprøvene som læreboken legger opp til er styrende for hva det skal undervises i. Utfra observasjoner i undervisningen² ble også eksemplene som læreboken presenterte brukt som basis for formidlingen. Dette er ikke vanskelig å tenke seg til heller, ettersom oppgavene i boken er tilpasset oppgavene elevene får på prøve. Fordi læreboken styrer, blir forståelsen læreboken tilrettelegger for den type forståelse elevene tilegner seg. Rezat (2012) skriver at lærerne planlegger aktiviteter basert på læreboken, og at innholdet i undervisningen tar utgangspunkt i det som står i læreboken. Dette samsvarer med interaksjonen Berit har med læreboken.

I: Korsen jobbe du når du planlegg ei heilt vanlig økt i matte? [...]
B: Ja, det e forskjellig. Det e alt etter ka det e vi hold på med. Som oftest, asså det som e sånn i hovedsak så e det jo sånn at æ bruke... en, asså matematikken isolert sett, en tell to timar på ettermiddag kveldstid der æ ser igjennom ka slags oppgava vi skal gå igjennom. Æ prøve å sette mæ inn i dem og forstå dem sjøl sånn at æ e 100 % sekker på at æ har forstådd oppgavan sjøl, sånn at ingenting kjæm som en overraskelse på mæ ihvertfall.

² Hendelse 3 der Berit bruker oppgavene i læreboken som basis for de eksemplene hun bruker til å formidle informasjon om forholdsregning. Alle eksemplene hadde utgangspunkt i forholdene mellom bredde og lengde i et rektangel.

Min tolkning av dette er at Berit implisitt sa at hun som oftest bruker oppgavene i boka som forberedelsesmateriale før undervisning. Dette forsterker hennes uttalelser om at hun og lærerne på trinnet baserer seg på testene som læreverket tilbyr. Hun forklarte bruken av læreboken med at det ville tatt svært mye tid for eksempel å drive matematikk uten bok og at det er lettere å bruke boken ettersom skolen bruker Multis (Alseth, Nordberg, & Røsseland, 2008) halv- og helårsprøver som kartlegging i forhold til elevprestasjoner.

I: Kor de her testan hentes ifra da?

B: Ifra boka og så har vi jo de herrane, Multi som vi bruke som verk har jo utvikla sånne halvårsprøva og en heilårsprøve og de følg vi. De bruke vi som kartlegging og det gjeld på heile skolen. Heile skolen bruke det.

I: Ka syns du sjøl om at læreboka e så styranes?

B: Det gjør det jo enklare. Førre at du veit heile tia atte at, ikkje sant, så æ syns jo det at det e enklare enn om at æ sku ha hadd det sånn derranes matematikk uten bok. [...] Førre at æ har vorre med og skrevet en oppgave om matematikk uten bok (*ler*), men det e så lenge sia nu. Men asså det vil jo kreve utruglig mykje meire i forhold tell, da må du jo bruke den planen, asså kunnskapsløftet og den eventuelle lokale planen som skolen her har og derifra hente ting ifra andre læreverk ifra idébanka som har forskjellige ting og så da sy sammen og så lage, så æ trur ikkje det vil bli umulig, men æ trur det vil kreve veldig mykje.

I: Ka det, vil det kreve tid?

B: Tid ikkje minst.

Utfra intervjuet kan man tolke det at det er flere grunner til at læreboken er styrende. En grunn er at det vil ta mye *tid* å hele tiden skulle lage egne oppgaver og formidlingsformer. En annen er at skolen har lagt opp til at kartleggingen av matematiske ferdigheter og matematisk forståelse baserer seg på store prøver designet av lærebokforfatterne, og at undervisningen skal samsvare med det elevene blir testet i ved prøver. Dette medfører at mye av ansvaret for om det drives relasjonell eller instrumentell undervisning, i dette tilfellet, ligger hos læreboken.

Læreboken som formidlingsressurs har påvirket Arnes og Berits undervisning. I startfasen var den mer styrende hos Arne enn det den er nå og han navngir rammefaktorer og kollegaer som mulige årsaker til dette. Imidlertid har Arnes matematikdidaktiske kompetanse gjort at læreboken ikke påvirker så mye at den får lov til å være en premissleverandør for instrumentell undervisning. På tross av at læreboken har en stor plass i skolen, sier Arne implisitt at masterutdanningen er årsaken til at han har beveget seg bort fra lærebokens formidling. Berit baserer seg i dag i større grad på instruksjoner som læreboken foreslår³, og undervisningen påvirkes i større grad av hvilken forståelse læreboken legger til rette for.

³ Eksemplene hun brukte i hendelse 3 var hentet fra læreboken.

4.2.2 Rammefaktorenes påvirkning

Når man blir ansatt som lærer på en skole får man mange rammefaktorer å forholde seg til. Disse rammefaktorene er hjelpeskilder som påvirker læreren i større eller mindre grad. I intervjuet med Arne kom det frem at *tid* påvirker undervisningen hans.

I:	Eeh... e det sånn at du alltid undervise relasjonelt, eller e det nån gang at du snur om på det også tenke at det, det her skal æ heller undervise instrumentelt?
[...]	
A:	Ja, eeh, vess det går an på en grei, ordentlig og oversiktlig måte å gjøre det relasjonelt, eller ihvertfall dela relasjonelt, så ønske æ det. Etter hvert så ser man jo at det, det e ikkje alle som heng med. Førre vess man ska bygge det opp relasjonelt så betyr det jo at pyramiden e, e, e, har, eh, de nederste steinan at man kan bygge på nåkka. og det e ikkje alle som har det. Og det har vi diskutert mye her på skolen, og va på et kurs og, så det store spørsmålet e: Ka skjer fra mellomtrinnet tell ungdomsskolen? Eeh, kor blir begrepan av? Førre man ser i – og det ser æ og – det va ei fra matematikksenteret som liksom så det at når man skulle bygge vidare på ting så va det håll. Så da må man bære snu på det og så må man tell slutt lære dem det instrumentelle. Og det har jo med tid å gjøre. Det e et ganske bra pes og æ ser i år æ har niende så fann vi ut at læreboka fåreslo 38 uke trur æ. Vi fann ut at vi hadde 34 uke, og da fær masse bort og. Så da må vi /
I:	Ja, korsen har det sæ at du har bare 34 uke?
A:	Storyline, eeh...ka det heite? Utdanningsvalg. Vi har, eeh, miljødaga. Vi har den kulturelle skolesekken. Så summen av tid ikkje sant, og da må man stille sæ et spørsmål om ka skal du bruke tia di på i timan.

Arne trakk frem at lærebøkene – som baserer seg på timeantallet til K-06 (Utdanningsdirektoratet, 2010) – legger opp til 38 uker matematikk, mens lærerne i realiteten har 34 uker i året. De tapte ukene fører ifølge Arne til at de elevene som har hull i matematikken ikke får tilstrekkelig med tid til å forstå matematikken relasjonelt, noe (Røsseland, 2011) påpeker der fokuselevne hennes forklarer at de føler de ikke får nok tid til å forstå matematikken. Læreren skal dekke pensum og kan ikke dvele i lang tid med ett tema. I sin egen kontekst er matematikken enklere å forstå instrumentelt (Skemp, 1989) og følgene av det er at det tar kortere tid å drive instrumentell undervisning. Relasjonell forståelse er lettere å huske, men vanskeligere å lære (Skemp, 1989) og i situasjoner med tidsnød i arbeidet med elever som har faglige «hull», underviser Arne de elevene til slutt instrumentelt, hvis den relasjonelle undervisningen ikke har nådd frem. Dette så også Eisenhart et al. (1993). Studenten la større vekt på begrepsforståelse i den praksisperioden utplasseringen foregikk i en faglig flink klasse der elevene viste interesse for å forstå hvorfor en prosedyre fungerte. I forhold til hvordan en matematikkeksamen påvirket Arne var han litt tvetydig. Han fortalte at han «hadde lyst» å si at eksamen ikke påvirket undervisningen hans, men senere i intervjuet kom det frem at eksamen hadde en viss påvirkningskraft.

- I: Ja koffer, koffer tyr man tell den instrumentelle tellslutt? Koffer lar du.. dem heller ikkje lære.. ok dem kan ikkje det her... men koffer tyr du tell det instrumentelle?
- A: Ehh... ja, det handle jo om eksamen da, de må jo kunne det.
- I: Ja.
- A: Men, asså, ofte e det jo åsså sånn at ehh..nån gang – og det har æ sedd med mæ sjøl og – så har æ kunne nåkka instrumentelt, æ har gjort 100 oppgava, æ har gådd på lærerskolen og fikk A på alle matteprøvan, uten å kanskje skjønne så mykje. Men, når man plutselig etter ei stund bynne å tenke koff..ka e det æ gjør? Så..eh..bynne man jo å greve opp i det. Og da kan man liksom rutinen eller, algoritmen, eller fremgangsmåten, og da har æ klart å sedd det bak... så det kan man også tenke at..eh (*puster tungt ut*) instrumentell e kanskje ikkje den store, stygge ulven...alltid, men førr nån så handle det om å få den førr å kanskje seinar forstå, men da må du plutselig stille dæ et spørsmål en dag...og det...det e jo ikkje sikkert, nei.

Arnes utsagn om at «de må jo kunne det» som svar på hvorfor han til slutt tyr til det instrumentelle viser at eksamen og læreplanen påvirker hans undervisning; rammefaktorene påvirker han. Han legitimerer det også ved å henvise til at den relasjonelle forståelsen *kan* komme senere, og at hvis man har ferdighetene innarbeidet, kan det være enklere å oppnå den relasjonelle forståelsen for et tema. Hiebert og Lefevre (1986) sier at kunnskap som innlæres med pugg kan gjenkjennes på et senere tidspunkt og relasjoner kan konstrueres som begrepskunnskap. Skemp (1989) skriver at en lærer kan velge å undervise instrumentelt fordi det tar for lang tid å oppnå den relasjonelle forståelsen og hvis eleven antakeligvis klarer seg med prosedyren. Hvis den relasjonelle forståelsen for et bestemt tema er vanskelig å oppnå og en instrumentell forståelse dekker behovet for å mestre en oppgave på eksamen, kan det også være en årsak til at en lærer velger å ty til en instrumentell tilnærming til undervisningen.

- I: Eehh.. du nevnte kanskje nåkka om det i sted, men når du har dårlig, vess man har dårlig tid... tell å forberede sæ... ka e det mattelæreran her på skolen – dine kollegaer – vanligvis gjør? Korsen undervisningsform trur du det e?
- A: Nei, da regne æ med at Faktor e basis.
- I: Faktor e basis.
- A: Og da e vi tell instrumentelt.
- I: Eeh..det e altså litt avhengig av korsen læreverk det e /
- A: Det vil æ tru.
- I: ...førr korsen undervisning drives?
- A: Æ vil tru det. Det e veldig mange, og æ ser, eh... nu har vi tadd opp det her med lesing i alle fag. Og æ så bære ka det gjør med mæ i forhold tell bevissthet tell for eksempel naturfag som æ ikkje har no utdanning i. Men korsen heilt anna måte æ plutselig tenkte på faget. Og da tenke æ jo atte at vess man ikkje har så mykje utdanning, og så hold på med matematikken, så kan man kanskje ha den samme måten, altså man har ikkje tilgang til den samme måten å tenke på i forhold tell å gjøre det tilgjengelig førr dem. Eh.. og æ fikk mæ en

voldsom aha-opplevelse når dem bære nevnte lesing i alle fag... førr æ har bare brukt lesing som basis. Altså lesing e det vi gjør i naturfagen. Ikkje som, eh.. en metode. Og da tenkte æ det atte kanskje e det nån som tenke det at: «Her e boka og den bruke vi». Og da e det så instrumentelt på Faktoren at vess du ikkje gjør nåkka såeh... så e det ikkje... det e ikkje nåkka relasjonelt igjen egentlig da. Da e det det der pugginga av de der reglan. Og så ser æ, at mange eleva har den kulturen. Det e sånn de vant tell matematikken, og det e og et stort problem.

Mangel på tid kan ifølge Arne ofte føre til at læreboken blir en svært sentral del av undervisningen. Rammefaktoren *tid* påvirker hvordan formidlingsressursen *læreboken* påvirker matematikkundervisningen. Hvis tid gjør at undervisningen baserer seg på læreboken, da vil tilnærmingen til forståelse læreboken har påvirke elevenes forståelse i lærebokens retning. På Arnes skole vil det lede mot en instrumentell tilnærming. Han påpekte at lærernes faglig kompetanse i matematikkfaget spiller en rolle fordi lærerne uten mye utdanning kanskje ikke har tilgang til den samme måten å tenke på, i forhold til å gjøre matematikken tilgjengelig for elevene, som en lærer som har solid faglig og didaktisk bakgrunn.

I likhet med Arne mener Berit at rammefaktorer påvirker henne. Ifølge Berit er det elevene som hun har fått i oppdrag å undervise, og hvordan klassen blir delt i undervisningen, som er en av de viktigste påvirkningsfaktorene i undervisningen hennes i matematikk. På spørsmål om hva som er det viktigste for å kunne drive forståelsesbasert undervisning sier Berit:

- B: Æ har jo ei stor gruppa med eleva, dem e 27. Æ har – heldigvis – førr ungan mest da, men æ har en del sterke eleva, flinke eleva som, som, og æ syns det e en kjempefin ressurs å bruke de. Førr at når ungan forklare hverandre så bruke de ofte enklare ord å få fram så det e lettar førr andre å skjønne det.
- I: Førr at dem har et enklar språk?
- B: De har et enklar språk ja. De tenke enklare, og meir forståelig førr hverandre. Så æ syns det e veldig fint å bruke dem. Deffør bruke æ ofte å spørre dem, vi har en oppgave og så sir dem svaret, og så sir æ ja kan ikkje du fortelle mæ korsen du har tenkt. Korsen har du tenkt når du kom frem tell det? Og det kan gjøre at de andre plukke opp. Så det syns æ e en kjempefin ressurs å bruke.

Berit bruker elever til å forklare matematikk for – og diskutere med – andre elever. Dette kan påvirke undervisningen på flere måter. Ifølge Hiebert et al. (1997) er klasserom som er preget av kommunikasjon og refleksjon av matematikk støttende for elevenes utvikling av forståelse i matematikk. I tillegg til at de flinke elevene må trene på å uttrykke egen forståelse overfor andre elever, får svakere elever sjansen til å kommunisere matematikk overfor én annen elev istedenfor en hel klasse. Berit sa også at hun spør sterke elever om hvordan de har tenkt når de skal løse en matematikkoppgave, og på den måten får de sterke elevene reflektert over og kommunisert

matematikk, samtidig som andre elever kan plukke det opp. Dette passer med Hiebert et al. (1997) syn på hvordan en klasseromskultur bør være. Matematiske idéer som presenteres kan potensielt bidra til læring for alle og at alle elever har rett til å forstå sin egen metode i problemløsning.

På oppfølgingsspørsmålet i neste avsnitt kom det frem at sammensetningen av elevgrupper påvirker hennes mulighet til å hjelpe elever i oppgaveløsning fordi hun sa at hun ikke kan sette seg ned med dem. Dette tolker jeg som at etterspørselen etter hjelp i undervisningen når det er 27 elever i klasserommet er så stort at en som lærer ikke kan vie altfor mye *tid* til noen få elever. Læreren kan ikke bare hjelpe de elevene som trenger det mest i hel klasse, men må vie *tid* til alle.

I:	E det andre ressursa?
B:	Så syns æ det e fint å ha... æ syns at det e fint åsså ha muligheten tell å ha ei lita gruppa der de som treng litt mer oppfølging får det. Det syns æ e en veldig fin ressurs å ha – når æ har den tilgjengelig, men vi har den jo ikkje tilgjengelig i alle sammenhenga. Førre at da får de, i ei så stor gruppa med eleva vil det være nån som forsvinn fordi de ikkje vise at de treng hjelp, og at de e redd førre å vise at de treng hjelp, det ska ikkje være synlig at de ikkje beherske det. Og da syns æ det e greit at de får en muligheten tell å være ute på ei mindre gruppa der de blir mere synlig og får mer hjelp.
I:	Får dem alltid muligheten til å være ute på ei lita gruppa?
B:	Nei, det e det dem ikkje gjør.
[...]	
I:	Påvirke det din måte å undervise på?
B:	Ja det gjør det førre at de, de... æ føle og ser jo at æ når dem ikkje i den store gruppa fordi æ gjerne sku ha gådd bort tell dem og sett mæ ned i lamme dem, men det kan æ ikkje gjøre..

Antall elever påvirker henne på den måten at hun «ikke når dem» (elever som vanligvis er på gruppe) når de er sammen med resten av klassen. Det påvirker også hvordan undervisningen blir lagt opp, og minsker sjansen for at elevene skal få drive utforskende aktiviteter.

I:	Så sånn større, sånne utforskanes aktiviteta føre tell en mere uro /
B:	Uro og, og, og så e det nån som da melde sæ litt mere ut. Du ser at det e nån eleva som ikkje takle det at dem skal sette og, å så får dem på en måte ingenting.
I:	Så det har igjen sammenheng med elevgruppa å gjøre?
B:	Ja.
I:	Ville det her ha variert i forhold tell korsen eleva du hadde hadd?
B:	Æ trur det ville variert i forhold tell kor mange æ har. Vess æ hadde hadd ei mindre gruppa som æ hadde hadd bedre oversikt over når de satt litt sånn ustrukturert og jobba, så trur æ æ ville slept det litt mer laust. Trur æ, men æ veit jo ikkje.

I Berits klasserom påvirker det faglige nivået til elevgruppa henne på den måten at elevene får kommunisere og reflektere over matematikk. Når elevene får kommunisert sine løsninger, ligger det til rette for at løsningsforslaget kan plukkes opp av andre elever, eller hvis løsningen er feil, kan det reflekteres over hvorfor løsningen var feil. En slik kultur er ett aspekt i Hiebert et al. (1997) kategorier for kjennetegn av et klasserom som tilrettelegger for forståelse. Hvis elevgruppa hadde vært mindre, mener Berit at hun ville drevet mer på med utforskende aktiviteter ettersom hun ville hatt bedre oversikt. Stor gruppe gjør at undervisningen får et mindre preg av slike aktiviteter.

4.2.3 Kollegaers påvirkning

En av grunnene til at en lærer underviser instrumentelt kan være at de andre lærerne på skolen gjør det (Skemp, 1989). Et konkret eksempel på det er en student som var utplassert på forskjellige praksisskoler (Eisenhart et al, 1993). Arne var klar på at kollegakulturer har påvirket matematikkundervisningen i hans relativt korte lærerliv.

I:	Korsen trur du at en kollegakultur på en skole e med å påvirke undervisninga?
A:	Åh... det e... det e knallviktig. Æ har vært på 2, 2 skola, der den eine hadde ingen kultur. Så æ satt aleina, med Faktor, og sku prøve å være lur. Og her kor vi, sett å kaste idea tell hverandre heile tia. Det e alfa og omega.

Arne beskrev kort to ulike miljøer som han har vært en del av. I det første miljøet var samarbeid fraværende og Arne satt med læreboken (en lærebok som han anser som instrumentelt støttende) og prøvde å skape god undervisning. I den andre kulturen opplever han at idéer utveksles og at kollegaer – og spesielt én ressurs – bidrar til å gjøre undervisningen relasjonell.

A:	Nei, og æ har jo spesielt to som æ lufter ting med, jah (<i>sier det på innpust</i>). Før æ veit at de jobbe med begrepa på en relasjonell måte eh.. og e knallflink tell det. Og vi har en eh.. en veldig god ressurs på det på skolen. Som e /
I:	Kan du utdype eh.. det at dåkker har en god ressurs på det på skolen, ka det vil si?
A:	Ja, en eh.. en lærer da. Han har avsatt tid før å drive veiledning på småtrinnet i matematikkopplæringa. Han sett i et råd som snakke om matematikk i [xxx] kommune. Så han e fantastisk å jobbe med. Og grunnen tell at æ syns han e fantastisk e at han heile tida tenke relasjonelt. Korsen vi skal bygge det opp.

Skolen har ansatt en lærer som skal drive matematisk veiledning. Arne påpekte viktigheten av det, og viktigheten av at ressursen arbeider med å skape undervisning som tilrettelegger for oppnåelse av relasjonell forståelse. I dette miljøet «kaster» de idéer etter hverandre og arbeider ifølge Arne med hvordan man skal bygge opp undervisningen for å kople relasjoner i matematikken. I Eisenhart et al. (1993) påvirket den kunnskapsrike kollegaens forslag undervisningen slik at undervisningen i

større grad la opp til begrepsforståelse, noe som også virker å være tilfelle her. Det virker som om kollegaer som er en matematikkfaglig eller matematikkdiraktisk ressurs påvirker Arne og studenten (Eisenhart et al, 1993) slik at de prøver å skape relasjonell undervisning. I Arnes første miljø var samarbeid med kollegaene fraværende, det samme med studentens fjerde utplassering der hun ikke bad kollegaen om råd (Eisenhart et al, 1993), men det blir vanskelig å si om dette fraværet av samarbeid påvirker undervisningen i retning instrumentell undervisning.

Arne fortalte videre at det ikke *bare* er slik at en kan hente idéer fra en ressurs, men at kollegaer brukes for å få reflektert rundt egne undervisningsopplegg.

A:	Det viktiaste førr mæ... det e å ha en, nån, eller fleire sparringspartnera, trur æ.
I:	Tenke du på kollega?
A:	Kollega ja.
[...]	
A:	Ja.. ehm.. så kan man komme på mange ting sjøl og eh.. men så e man jo eh.. æ e alltid bekymra førr at det e nåkka æ har oversedd eller no sånt så æ like å, å, å hive ideen opp i lufta og få han diskutert litt før man går igjennom det. Også e det jo nån gang så må man jo bære prøve det ut og så justere man etter hvert. Det jo synd førr de man har (<i>ler</i>) førr dem [<i>elevene</i>] blir jo en liten læringsarena da, men, ja.

Arne påvirkes av de kollegaene som har samme undervisningssyn som han. De kollegaene, og spesielt den matematikkdiraktiske ressursen på skolen, som arbeider med å skape relasjonell undervisning arbeider han tett med, og de utveksler idéer til undervisningen.

Berit ser på kollegaene som en viktig ressurs for undervisningen. På hennes skole tar flere kollegaer tilleggstudning i matematikk, og de blir brukt som ressurser i forhold til kartlegging av elevenes nivå og til hvordan lærerne bør legge til rette for at elevene skal få jobbe med det de har behov for.

I:	Ok. Kossen trur du at dine kollegaer bruke læreboka, e den styranes hos dem?
B:	Ja. Det trur æ.
I:	Trur du det gjeld alle på skolen?
B:	Ja, det trur æ.
[...]	
B:	Og så sku æ ønska at man hadde meire tid tell felles ilag, være ilag lærera som har matematikk sånn så æ og så den andre lærern på den andre parallellen da kunne kanskje i felleskap sette meir ilag og funne ut fornuftige ting førr å angripe vanskelige ting.

Berit peker på at læreboken er styrende, etter hennes oppfatning, hos alle lærerne på samme måte

som den er hos henne. Det kan da være vanskelig å skulle bryte den tradisjonen alene. Hun savner mer tid sammen med andre matematikklærere for å finne løsninger på hvordan en kan legge til rette for læring av tema som elevene oppfatter som vanskelige. Hun ønsker et lærerrom, eller en kultur, der idéer skapes og reflekteres over, slik at lærerne felles kan utvikle løsninger på hvordan undervisningen kan bygges opp. Hiebert et al. (1997) peker på at et klasserom som legger til rette for forståelse preges av at alle deltakerne i læringssamfunnet bidrar med sine idéer, og at alle idéene blir verdsatt uavhengig av sosial status. Slik jeg tolker det kan alle aspektene innenfor *kultur* (Hiebert et al., 1997) overføres til kulturen et kollegium bør ha, og den kulturen kan kanskje videreføres til etablering av en klasseromskultur.

I: Korsen påvirke kollegaene din undervisning?

B: Det at det er alltid hjelp å få. Man kan alltid diskutere ting. Nu blir det stort sett de på syvende, men også nå gang med de andre, selvfølgelig. Og ho som har biblioteket har jo veldig god oversikt over ka vi har av materiell. I tillegg tell at ho faktisk i år er lamme oss på syvende trinn, og har nå timen med nå enkelteleva, eleva som har enkeltvedtak i nettopp matematikk. Og dermed så har ho, ho ligg ofte foran oss. Så når ho har hadd timen med dissan elevan, før ho har det ofte etter undervisningstid, så kommer ho tell oss og sir: «nu har æ hadd med dem og det gikk sånn og sånn» og så får vi vite litt om korsen det her funka og sånn. Så det er kjempebra. Vi har et fantastisk godt kollega som er utrolig bra å være lamme.

Bibliotekaren har oversikt over konkretiseringsmaterialet på skolen og bidrar også med undervisning av elever med enkeltvedtak i matematikk. Denne ressursen ligger *foran* klassen i pensumprogresjonen og er i posisjon til å gi en evaluering og vurdering av undervisningen hun gir til elevene med enkeltvedtak. Dette vil påvirke Berits undervisning de gangene hun velger å bruke idéene bibliotekaren har. Kollegaens evne til å lage undervisningsopplegg i matematikk vil nødvendigvis påvirke Berits undervisning.

4.2.4 Lærernes kompetanses påvirkning

For at en lærer skal være i stand til drive relasjonell undervisning, må læreren selv ha relasjonell forståelse for undervisningen (Skemp, 1989). Dette vil mange si er en selvfølge. Imidlertid tror mange lærere (og elever) at instrumentell forståelse *er* forståelse i matematikk ettersom de aldri har møtt en undervisning som legger opp til å skape relasjonell forståelse. Dette medfører at enkelte lærere tror de underviser for å skape – det de kaller – forståelse for matematikk, mens de i realiteten skaper én type forståelse – instrumentell forståelse. I intervjuet med Arne kom det frem tydelige synspunkter på hvordan lærerens matematiske og matematikdidaktiske kompetanse påvirker undervisningen slik at den enten legger til rette for relasjonell eller instrumentell forståelse.

I: Vess man ikkje har forståelsen sjøl da, som enkelte ikkje har utav læreran, eh.. meine du at dem har /
 A: Mmm.
 I: ...mulighet tell å undervise relasjonelt dem?
 A: Nei, eh.. æ kan ikkje se det, nei. Eh.. så fremst dem ikkje får et opplegg presentert hos nån andre som dem bære skal gjennomføre. Men det e jo og kjempeskummelt førr får du spørsmål da.. så veit du kanskje ikkje korsen du skal angripe det.

Arne bekreftet Skemps påstand om at lærere må forstå matematikken relasjonelt hvis de skal ha mulighet til å undervise relasjonelt. Han påpekte imidlertid at det går an å utføre et undervisningsopplegg som tilrettelegger for relasjonell forståelse, men at det kan oppstå problemer hvis det dukker opp spørsmål fra elevene som krever en relasjonell forståelse hos læreren. Dette skjedde med studenten (Eisenhart et al., 1993) når det dukket opp et spørsmål om π . Studenten klarte ikke å redegjøre for π og presenterte i stedet en huskeregel for elevene. Huskereglene må pugges og kan koples til *rote learning* (Hiebert & Lefevre, 1986) og *habit learning* (Skemp, 1989), noe som leder til instrumentell forståelse. Glemmes huskeregelen er det ingen måte for elevene å finne tilbake til verdien av π . Når det kommer spørsmål fra elever må nødvendigvis en lærer kunne gi en relasjonell forklaring på det, ellers sitter eleven igjen med den instrumentelle kunnskapen, eller i verste fall ingen kunnskap. Hill et al. (2005) skriver at kompetanse som matematikklærer innebærer å forklare regler, vise representasjoner for matematiske konsepter og være i stand til å anerkjenne og forstå elevens alternative løsninger og spørsmål. Det er vanskelig å se at en lærer klarer å forklare sammenhengen i noe læreren ikke forstår selv.

På spørsmål om hvordan egen matematisk og matematikdidaktisk kunnskap påvirket kom han med interessante uttalelser.

I: Korsen påvirke din kompetanse og kunnskap din undervisning, trur du, eller korsen har den påvirka dæ?
 [...]
 A: Ja. Æ trur at eh.. det æ blir veldig trigga av det va når æ skreiv om det her instrumentell relasjonell, og fikk innsikt i det. Æ fikk min mor tell å lese oppgaven min – og ho har jo jobba i x antall år – og ho: «oj!» ja, oppdaga det, og bynnte å tenke på det og syns det va kjempeinteressant, så det trigga mæ veldig og det hadde no... etter lærerskolen... eh, så følte æ mæ ikkje klar tell å undervise. Æ følte ikkje at æ hadde lært..nåkka egentlig.
 I: Ja, ka du tenke når du, når du sir etter lærerskolen, etter fire vanlige år?
 A: Etter fire år på lærerskolen. Da tenkte æ at: «ka har æ med mæ herfra som gjør at æ kan gå ut og undervise?». Så de to åran... eh.. i [xxx] der ett år va å skrive oppgaven, men førsteåret der... der lærte æ nok, trur æ, æ har dobbelt så mye med mæ derfra som fra lærerskolen..

Arne fortalte at uten masterutdanningen i matematikdidaktikk, ville han nesten helt sikkert brukt lærebok som grunnlag for undervisningen⁴. Etter fire år på lærerskolen følte han seg ikke klar for undervisning i matematikk. Ettersom han anser at læreverket har instrumentalisme som grunnlag for læring (Mellin-Olsen, 1984), ville undervisningen hans blitt påvirket av det uten masterutdanningen.

Imidlertid påpekte han at hans egen kompetanse i matematikk har påvirket han på den måten at han, ifølge han selv, hele tiden prøver å skape undervisningssituasjoner der elevene kan utvikle sin relasjonelle forståelse⁵. Det kan tolkes slik at hans egen matematikdidaktiske kunnskap overstyrer formidlingsressursen læreboken slik at læreboken får mindre påvirkningskraft i undervisningen. I Arnes tilfelle påvirker egen faglig kompetanse undervisningen stort, ettersom undervisningen ville vært bygd opp med læreboken som forståelsesgrunnlag hvis han ikke hadde hatt den kompetansen.

- | | |
|-------|---|
| I: | Ka e det som gjør at ei matematikkundervisning bli dårlig? |
| A: | Ehh.. dårlig fagkunnskap slett og rett. Og det kan være sæ at du har bære..asså nån kan jo bære instrumentelt, ok, da kan du i hvert fall lære dem det, men det jo nån som faktisk slit med det óg. Æ va hos en praksisveileder og han sa det atte.. det va et gjeng som hadde vært der og han måtte stoppe de førr dem holdt på å... feillære dem. |
| [...] | |
| I: | Tolke æ dæ rett når æ sir at lærern e den viktigaste ressursen, eller e læreboka viktigar? |
| A: | Nei... nei den e ikkje det. |
| I: | Du skjønnen koffer æ spør førr at... tar vi bort læreboka så... den e jo.. den har jo en rolle. |
| A: | Å, den har en stor rolle, den har det, den har det. Menneh... men æ ser jo sjøl.. korsen andre læreverk gjør det. Åsså det e så viktig å utvide den horisonten man har så førr eh.. det e så fort gjort at man bære sett sæ ned og blir låst tell boka og som sagt, hadde ikkje æ hadd de to åran mine nede i [xxx] så e æ ganske sekker på at æ hadde sotte og jobba med den faktorboka. |

Arne var tydelig på at han anser fagkunnskap og didaktisk fagkunnskap som helt avgjørende for matematikkundervisningen. Han anså dårlig/lite fagkunnskap som det som gjør matematikkundervisningen dårlig. Dette bunner utfra egne opplevelser i utdanningsløpet hans. Hill et al. (2005) bekrefter dette med motsatt vinkling; god matematisk kunnskap og god matematikdidaktisk kunnskap har positiv påvirkning på elevers prestasjoner. Hiebert et al. (1997) peker på lærerens undervisningsrolle i et klasserom som en av fem aspekter som må være oppfylt i et klasserom der undervisningen har som mål å utvikle elevenes begrepsforståelse i matematikk. En lærer som kun har instrumentell forståelse kan ikke undervise relasjonelt (Skemp, 1989).

⁴ Se kapittel 4.2.1.

⁵ Sitat fra Arne i kapittel 4.2.2: «Ja, eeh, vess det går an på en grei, ordentlig og oversiktlig måte...å gjøre det relasjonelt, eller ihvertfall dela relasjonelt, så ønske æ det»

Da Berit reflekterte over påvirkningen som fagkunnskapen til læreren har, kom det frem flere synspunkter. Noe av det mest interessante var hvordan en av lærerne til Berit under lærerutdanninga påvirket hennes forståelse i matematikk.

I:	Va du fornøyd med lærerskolen?
B:	Ja med de første, de, eh, de studiepoengan. [...] Da hadde vi en fantastisk flott lærer. Hannes spesialområde va det didaktiske, i tillegg til at han va meget god i det andre også.
I:	Så han va en matematikdidaktiker?
B:	Yes! Det va kjempebra! Så det va veldig bra. I den fordypninga så hadde vi en som ikkje va så dyktig på det. Så den syns æ... æ kom mæ igjennom det og æ gjør det veldig bra, men æ syns det va verre å få tak på det.
[...]	
I:	Men han der lærern som va så god... ka va det som gjør han så god?
B:	(Pause ca 10 s) Det va at han, ja nu bynne det å bli nån år sia så æ må nu tenke. Han hadde, asså han va veldig dyktig på det didaktiske. På det her med forståelse. På det her som ligg bak. På å få oss med i tanken og viktigheta bak det at ungan må forstå ka som e bak de her tekniske operasjonan som matematikken har. Han va veldig god på å få oss med inn i det.

Det er tydelig at den ene lærerskolelæreren til Berit bidro til å fremme en god holdning til faget for Berit. Hun begrunnet lærerens dyktighet med at han fokuserte på at studentene skulle forstå det som ligger bak prosedyrene og reglene som elevene skal lære seg (Skemp, 1976; Mellin-Olsen, 1984; Hiebert & Lefevre, 1986; Hiebert et al, 1997; Hill et al., 2005). Berit trakk også frem *fagkunnskapen* til læreren og sa at han var dyktig på både det didaktiske og «det andre», der jeg tolker «det andre» som lærerens matematiske kompetanse.

I:	Kan æ spørre om, e lærern sin fagkunnskap viktig?
B:	Ja.
I:	Koffer det?
B:	(Pause ca 10 s) Vess du ikkje.. vess du ikkje har så... vess du ikkje har kunnskapa om matematikken og matematikkspråket, det e jo masse begrepa og språk i matematikken som mange sekkert ikkje skjønne og forstår. Vess du ikkje kan det, så får jo mange problemer fører at de møte så mykje sånt gjennom heile livet i matematikken. Og da må du kunne, du må vette ka det betyr. Og det ser vi jo meir og meir, iallfall ser æ det, når æ snakke med foreldran tell unga, som ikkje e lærera da, de aller fleste e jo ikkje det tell ungan som æ har i hvert fall, så sir dem det at dem har kjempeproblemer nu når dem e kommet så langt opp, i syvende f eks, fører dem forstår ikkje det. Fører det første så e det et anna språk enn det det va når de gikk på skolen, og så e det masse andre nye ting som e kommet inn som dem ikkje veit ka betyr. Så selvfølgelig har fagkompetansen tell lærern mykje å si.
I:	Trur du at en lærer som ikkje forstår matematikken, kan f eks lære ungan koffer man kan snu den bakerste brøken og gange i løsnung av divisjon med brøk? Få elean tell å forstå det?

B: Nei.

I: E du seker på det?

B: Det trur æ. Ja æ trur det, men æ trur nok det e mange lærera som driv matematikkundervisning som ikkje forstår den. Det trur æ, og gjør det sikkert kjempebra i alt det andre som har med matematikk å gjøre.

Berit var helt tydelig på at hvis læreren selv ikke har forståelsen for det temaet det undervises i, kan man heller ikke forvente at elevene skal forstå det. Fagkompetansen påvirker altså matematikkundervisningen slik at undervisningen kan bli mer instrumentell hvis læreren selv ikke har relasjonell forståelse for matematikken. Dette er i tråd med Skemp (1989) som sier at lærere må selv ha en relasjonell forståelse for matematikken hvis de skal være i stand til å undervise relasjonelt. Det er imidlertid ikke ekvivalent med at lærere med relasjonell forståelse underviser relasjonelt. Lærere som ikke har relasjonell forståelse vil nødvendigvis undervise instrumentelt, noe som bidrar til at matematikken vil bestå av memorering av isolerte kunnskapsbiter (Skemp, 1989; Hiebert & Lefevre, 1986). Dette betyr at elever som møter en instrumentell undervisningsform testes i deres evne til å memorere mest mulig, fremfor å forstå mest mulig. Berit eksemplifiserte dette selv med egne opplevelser i matematikk. For eksempel når hun skal undervise i sannsynlighet, et emne hun selv føler at hun ikke har en god forståelse i.

I: Ja. Øhh, e det nån tema i matte på grunnskolen der du meine det e umulig, eller svært vanskelig, å undervise forståelsesbasert?

B: (Pause i 5 s) Ja, det e det. Og det handle like mykje om at det e ting som æ syns e vanskelig.

I: Ja. Kan du komme på med et eksempel?

B: Æ e et matematikkenneske som like å sette og bryne mæ på ting når æ kan skrive og sånn. Da går det veldig greit. Men det e verre det her som skal få det ut og forstå. Ja og felt som æ syns e vanskelig sjøl det e sannsynlighet. Det syns æ e kjempevanskelig. Det e førr at æ plages med det sjøl og fordi æ hadde det ikkje som fag sjøl.

[...]

B: Æ hadde det ikkje på grunnskolen og ikkje på videregående. Så det va heilt nytt førr mæ. Det syns æ e vanskelig å undervise andre i fordi æ ikkje så veldig god i å forstå det sjøl. Og så det som vi hold på med nu faktisk, det her med forholdsregning. Det syns æ e vanskelig å få dem tell å skjønne. Det blir så lite konkret, det blir så, nei ikkje konkret blir kanskje feil å si. Æ syns bære det e vanskelig. Æ veit ikkje heilt.

Berit synes det er vanskelig å undervise i matematiske emner, hun ifølge seg selv, ikke har god forståelse i. Hun sa selv at en lærer som ikke har forståelse for matematikken, ikke kan få en elev til å forstå hvorfor man kan «snu brøken og gange» i arbeid med divisjon med brøk, og det er ikke utenkelig at det for en lærer uten tilstrekkelig forståelse for sannsynlighetsregning, vil være vanskelig å forklare hvorfor man for eksempel multipliserer

sannsynligheten for mynt med seg selv når man skal finne ut sannsynligheten for å få to mynt på rad.

Lærerens matematiske forståelse påvirker ifølge fokuslærerne undervisningen i retning instrumentell tilnærming hvis læreren ikke har relasjonell forståelse selv. Begge fokuslærerne trakk frem opplevelser fra studiene der lærerne vektla forståelse i matematikkfaget som motiverende og lærerike. Dette ville neppe vært like lærerikt hvis lærerne på de respektive studiene ikke innehadde kunnskaper. I Arnes tilfelle sa han rett ut at uten fagkunnskapen fra masterutdanningen, ville han i langt større grad basert seg på læreboken. For hans del påvirker fagkunnskapen han slik at han analyserer om undervisningen legger til rette for relasjonell forståelse, og han er bevisst på når han underviser relasjonelt og når han underviser instrumentelt.

4.2.5 Oppsummering av faktorer som påvirker matematikkundervisningen

Begge fokuslærerne har interaksjon med læreboken i forhold til undervisning i matematikk. Arne fortalte at han var mer bundet til lærebok i starten av sin yrkeskarriere, men at han beveget seg bort fra dem etter hvert som han ble mer kjent med innholdet i dem. Arne begrunnet dette med at masterutdanningen i matematikkdiraktikk har påvirket hans syn på matematikkundervisning. Ifølge han selv, ville han uten masterutdanningen «99 % sikkert» brukt læreboken til formidlingen.

Berit fortalte at læreboken svært ofte er styrende for hennes matematikkundervisning og matematikkundervisningen på trinnet. Den brukes til å sjekke hva elevene skal ha prøver i og hun henter vesentlige oppgaver i forhold til det. Hun bruker også oppgavene i læreboken som en del av forberedelsene til timene, slik at hun kan se hva det er elevene skal gå gjennom. Hun påpekte at det ville tatt svært mye tid hvis hun skulle drevet matematikk uten bok. Når oppgavene tilpasses prøvene foreslått av læreverket, blir undervisningsformen påvirket av den type forståelse læreboken legger opp til.

For Arnes del kan rammefaktoren *tid* prege matematikkundervisningen. Når K-06 (Utdanningsdirektoratet, 2010) og lærebøker legger opp til et undervisningsløp for 38 uker i året, mens lærerne i realiteten har 34 uker, fører det til at man må tenke nøye over hva man bruker tiden sin til i timene. Mangel på tid og pensumpress kan være problematisk hvis elevene skal få nok tid til å forstå matematikken relasjonelt. Arne sa at han i enkelte tilfeller legger til rette for at noen elever skal oppnå instrumentell forståelse, slik at de iallfall skal kunne det til eksamen. Tidspress vil kunne lede til at lærere baserer seg på læreboken, mente Arne, og hvis læreren ikke har redskaper i form av kompetanse, vil tidsmangel lede mot lærebokstyrt undervisning.

Berit fortalte at rammefaktorer som antall elever og elevenes nivå påvirker matematikkundervisningen både positivt og negativt. Hun opplever at hennes nåværende klasse har et høyt faglig nivå og hun drar nytte av at elevene forklarer for hverandre. Elevene drar også nytte av hverandre når de forklarer sine strategier i plenum. Antall elever påvirker måten hun driver undervisning på. Når alle i klassen er til stede – eller at hun har en stor gruppe – minsker sjansen for at hun forbereder undersøkende aktiviteter, ettersom det blir vanskelig å holde oversikt i litt mer løse aktiviteter.

Arne opplever at kollegaer kan påvirke måten man underviser og tenker matematikk på. Han fortalte at på skolen hans har de en person som er ansatt som matematisk veileder på småtrinnet. Ifølge Arne arbeider denne ressursen med å bygge opp matematikken relasjonelt, og det er grunnen til at Arne liker å samarbeide med han. I tillegg sitter matematikkollegaer sammen og lufter idéer med hverandre, slik at de kan få innspill og korreksjoner i forhold til egen undervisning.

Læreboken er styrende hos Berits kollegaer. Da kan det være vanskelig å bryte ut av den kulturen alene. Berit sa kollegaene påvirker henne positivt fordi det alltid er hjelp å få og ting kan diskuteres. I tillegg har hun en kollega som har ansvaret for biblioteket som tar ut en gruppe elever fra Berits klasse. Kollegaen ligger litt foran Berit i pensum og utveksler erfaringer om undervisningen med Berit.

Begge fokuslærerne var tydelige på at det ikke er mulig å drive relasjonell undervisning uten å ha relasjonell forståelse i matematikken selv. Arne mente at uten masterutdanning i matematikdidaktikk, hadde han brukt læreboken som grunnlag for undervisningen, og elevenes muligheter for å forstå matematikken ville komme an på hvilken lærebok elevene hadde. Ifølge Arne er det på grunn av hans matematikdidaktiske kompetanse at han prøver å skape undervisningssituasjoner som legger til rette for at elevene skal kunne utvikle relasjonell forståelse. Han sa til slutt også at fagkompetansen til lærerne er viktigere enn læreboken ettersom fagkompetansen i hans tilfelle overstyrer innholdet i læreboken.

Berit trakk frem høyskolelæreren sin som et eksempel på en god lærer og forklarer det med at han var svært dyktig både på det matematikdidaktiske og på matematikken. Berit fortalte at hun mener at det er ting i matematikken i grunnskolen som er svært vanskelig, eller umulig, å undervise forståelsesbasert. Hun medga at det handler om at det er emner hun synes er vanskelig å forstå selv.

5 Diskusjon

For å forsøke å finne svar på forskningsspørsmålene mine, vil jeg i dette kapitlet diskutere observasjonen av undervisningen og intervjuene med fokuslærerne. I den første delen diskuterer jeg undervisningen i lys av teori som beskriver kjennetegn på relasjonell og instrumentell undervisning. I den andre delen diskuterer jeg faktorer som fokuslærerne opplever påvirker matematikkundervisningen, og hvordan én faktor kan styre hvordan en annen faktor påvirker.

5.1 Observasjonen av lærernes undervisning

Som det kom frem i analysen var Arne bevisst på å repetere matematikken som ligger til grunn for løsning av kvadratiske likninger. Fokuseringen på at det må skapes representasjoner for forkunnskapen, og at forkunnskapen trekkes inn i læringskonteksten – eller repeteres – mener jeg er viktig i arbeidet med å utvikle elevenes relasjonelle forståelse i matematikk. I denne opplærings situasjonen gav Arne elevene en oppgave i å tegne 4×3 , der de måtte finne arealet av et rektangel som ikke kunne måles. Der diskuterte han med elevene hvorfor alle sider kan kalles x i et kvadrat, og de undersøkte samtidig sidelengdene til et kvadrat med oppgitt areal. I denne samtalesekvensen med elevene koplet Arne på:

- Multiplikasjonstabellen.
- Areal og algebra.
- Rektangel og kvadrat.
- Kvadrattall og kvadratrot

Alle disse matematiske temaene, kanskje med unntak av rektangel, er det viktig å ha begrepskunnskaper (Hiebert & Lefevre, 1986) om hvis man skal oppnå en relasjonell forståelse av kvadratiske likninger. En annen forkunnskap som egentlig hører med på den lista er forståelse av likhetstegnet, men som vi så i analysen ble det arbeidet med i en senere økt. Videre brukte han tegningen av x^2 i arbeidet med å løse en kvadratisk likning.

I hendelse 2 gav Arne blant annet elevene i oppgave å undersøke om påstanden « $X = -5$ » er det samme som « $-X = 5$ ». Denne oppgaven kan løses på flere forskjellige måter og skulle i tillegg være en samarbeidsoppgave. Flere av aspektene i Hiebert et al. (1997) oppfylles. De varierte kontekstene for likhetstegnet i hendelse 2 gir elevene mulighet til å skape flere referenter (Røsseland, 2011) i forhold til utviklingen av forståelsen for det begrepet.

Ifølge Blomhøj (1994) kjennetegnes tradisjonell matematikkundervisning blant annet ved at:

- Læreren gjennomgår lærebokens instruksjon
- At læreren gir oppgaver som elevene har fått redskaper til å løse.
- At elevsvar er korte og ikke forklarende.
- At elevenes læring bedømmes alene ut ifra om de kan regne oppgavene som er gitt.

Hiebert et al. (1997) skriver at for å tilrettelegge for at elevene skal kunne utvikle forståelse for både matematikk og prosedyrer, er det viktig at det skapes et læringsmiljø som tilrettelegger for refleksjon. Der det arbeides individuelt *og* med andre. Der refleksjonen rundt oppgaver løftes opp i plenum. Dette henger igjen sammen med de fire andre aspektene, og kanskje spesielt *oppgavetyperne* (Hiebert et al., 1997).

På bakgrunn av analysen ligger nok Arnes undervisning nærmere relasjonell undervisning enn instrumentell undervisning. En tradisjonell undervisning – som kan relateres til instrumentell undervisning – i eksemplet med løsning av kvadratiske likninger, ville ifølge Blomhøj (1994) basert seg på at læreren instruerer lærebokens budskap. Dette var ikke tilfelle med Arnes undervisning. Eksempelet med påstanden « $X = -5$ » er det samme som « $-X = 5$ », er heller ikke i tråd med Blomhøjs (1994) definisjon av tradisjonell undervisning. Hiebert og Lefevre (1986) sier at i utviklingen av begrepskunnskap skal informasjon settes i relasjon til annen informasjon. Ny kunnskap skal koples til gammel kunnskap, og undervisningen av kvadratiske likninger er et godt eksempel på hvordan multiplikasjon og areal av kvadrater kan koples opp mot løsning av likninger. Undervisningen her fremmer etter mitt syn i større grad relasjonell forståelse og begrepskunnskap, enn instrumentalisme og prosedyrekunnskap, ettersom det stimuleres til at flere kunnskapsbiter skal settes sammen i et større kunnskapsnett (Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1976; Mellin-Olsen, 1984).

I hendelse 3, som omhandler Berits første økt om forholdsregning, har undervisningen et mer instrumentelt enn relasjonelt preg. Grunnen til at jeg mener det er slik er at alle eksemplene som ble vist i denne økta baserte seg på å finne en ukjent side i rektangelet. Berit underviser for å gi elevene redskaper (Blomhøj, 1994), som de skal bruke senere i arbeidet med lekseoppgavene, som er i samme kontekst. Hun er svært nøye i gjennomgangen av de ulike eksemplene og gir forklaringer på hvordan man kan finne den ukjente siden i et rektangel. En undervisning som ofte preges av at eksemplene er i samme kontekst kan føre til at kunnskapen blir svært bundet opp mot konteksten, og at den blir lite anvendbar i nye kontekster (Hiebert & Lefevre, 1986) og kan relateres til *habit*

learning (Skemp, 1989). En slik type læring baserer seg på at kunnskapen kommer hvis elevene følger godt nok med på det læreren sier og gjør (Hiebert et al., 1997). I denne undervisningsøkten tok Berit heller ikke tak i elevenes tanker og refleksjoner.

I intervjuet kom det frem at Berit hadde tenkt at elevene skulle gjøre en aktivitet med centikuber som introduksjon til forholdsregning. Når det viste seg at de var utlånt, baserte hun seg på læreboken. Mangel på formidlingsressursen *centikuber* hadde i dette tilfellet stor påvirkning på matematikkundervisningen. Berit var misfornøyd med denne økta, og hun mente at elevene antakeligvis ikke hadde noe særlig utbytte av den, ettersom de hadde problemer med å relatere seg til oppgavene. Hendelse 3 er imidlertid svært interessant uansett om ikke timen var tiltenkt på den måten, fordi den viser hvilken at undervisningen i dette tilfellet ble mer instrumentell når formidlingsressursene manglet og at det ikke var nok tid til å lage et nytt opplegg.

I Berits andre time om forholdsregning har det skjedd endringer i hennes lærerrolle. Hun tar tak i elevenes spørsmål og refleksjoner på en helt annen måte enn det hun gjorde i den første timen. Berit stilte spørsmål som:

- Hvorfor?
- Hvordan kom du frem til dette?
- Hvordan tenkte du?

Slike spørsmål, både individuelt og i plenum, stimulerer til refleksjon og matematisk tenking. De matematiske idéene til elevene blir drøftet og reflektert over. I motsetning til i hendelse 3, der det kan tolkes som at Berit var ute etter riktig svar fra elevene, fikk elevene i denne timen muligheten til å høre hvordan andre elever tenkte når de løste oppgaver. I hendelse 3 viser samtalen mellom Berit og elevene i eksempel 2, eksempel 3, eksempel 4 og eksempel 5 at Berit i mye større grad fokuserer på at elevene skal avgi det riktige svaret enn hun gjør i hendelse 4. Denne forandringen i tilnærmingen til elevenes utsagn stimulerer i større grad en kultur der menneskene i kulturen skal forholde seg til hverandre, og der elevene i kulturen utvikler matematisk forståelse sammen (Hiebert et al., 1997). Det ble også vektlagt at det ikke bare var én måte å komme frem til løsningene på flaggoppgavene, men alle forslag ble behandlet med respekt. Selv om Berit i innledningen til hendelse 4 presenterte en huskeregel for hvordan man skulle sette opp forholdet mellom 2 sider, noe som kan knyttes til *habit learning* og pugg (Skemp, 1989; Hiebert & Lefevre, 1986), og at Berit nøye gjennomgikk lærebokens instruksjoner (Blomhøj, 1994), hadde hendelse 4 flere elementer som kan stimulere til relasjonell forståelse (Skemp, 1976; Hiebert et al., 1997) enn

det ble observert i hendelse 3. Hiebert et al. (1997) argumenterer for at det imidlertid ikke er nok å endre ett aspekt for å skape et matematisk klasserom som tilrettelegger for at elevene skal utvikle deres relasjonelle forståelse. Alle aspektene må sees som en del av en helhet.

I Arnes undervisning kan man i større grad trekke paralleller til Hiebert et al. (1997) sine fem aspekter som kjennetegner klasserom som stimulerer til at elevene skal utvikle forståelse for matematikken, enn i Berits undervisning. I Berits undervisning kan man i større grad trekke paralleller til Blomhøjs (1994) definisjoner på tradisjonell undervisning og *habit learning* (Skemp, 1989), enn man kan i Arnes undervisning. Som man kan tolke ut fra analysen presenterer også Berit huskereglene for elevene, noe som koples til *habit learning* og pugg (Skemp, 1989; Hiebert & Lefevre, 1986). I Arnes undervisning fant jeg ett eksempel på det. Det var da han sa «flytt og bytt», noe som er en huskeregel for at et tall skal flytte til andre siden av likhetstegnet og at fortegnet skal byttes.

5.2 Faktorer som påvirker matematikkundervisningen

En forskjell i undervisningen til Arne og Berit er hvordan læreboken ble brukt. Berit brukte læreboken som grunnlag for egen instruksjon og demonstrering, og i tillegg brukte hun den som en kilde til oppgaver. Johansson (2006) fant ut at lærerne stort sett brukte oppgaver og eksempler fra læreboken når de underviste, noe som stemmer med måten Berit underviste på. Rezats (2012) beskrivelser av bruk av lærebøker samsvarer med Berits bruk av læreboken som *en* av to måter som lærebøker i hovedsak brukes på. Arne brukte læreboken som en ressurs der han kunne hente oppgaver; dette mener Rezat (2012) er den andre måten læreboken brukes på. Hvordan læreboken brukes påvirker naturligvis lærebokens påvirkningskraft i undervisningen, noe jeg vil diskutere i neste delkapittel.

5.2.1 Hvordan påvirker formidlingsressurser lærernes matematikkundervisning?

Både Arne og Berit påpeker at læreboken påvirker dem i undervisningen. For Arnes del påvirket den mer før, men vurderinger av hvilken forståelse læreboken legger til rette for har gjort at han har beveget seg mer og mer bort fra å bruke den som en kilde til instruksjon, og at læreboken per dags dato stort sett kun brukes som en mulig kilde til oppgaver. Jamieson-Proctor og Byrne (2008) mener at bruken av læreboken i matematikkundervisning påvirkes av lærernes faglige vurderinger av den. Arne vurderer skolens nåværende læreverk som en kilde til instrumentell forståelse, og hans matematiske overbevisninger gjør at han ikke bruker læreboken instruksjoner når han underviser. Det han imidlertid påpeker er at han bruker lærebokens tema som basis for hva det skal undervises i, noe Johansson (2006) i sin studie oppdaget at lærerne gjorde.

Arnes begrunnelse for hvorfor han har beveget seg bort fra læreboken som en guide til instruksjon, er masterutdanningen i matematikdidaktikk. Han mener at uten masterutdanningen, ville han nesten garantert brukt læreboken basis for undervisningen på tavla. Han forteller at han oppdaget at læreboken ikke la til rette i for å drive undervisningen relasjonelt, og ville ifølge han selv ikke vært i stand til å oppdage det uten masterutdanningen. Det er ifølge han utdanningen som gjør at den forståelsen aktivitetene og instruksjonen læreboken legger til rette for, ikke overstyrer hans egen overbevisning om hvilken forståelse undervisningen bør legge opp til. Arnes matematikdidaktiske kompetanse tillater ikke å la læreboken bestemme undervisningen, men er i stedet en hjelpekilde som veileder han i hans søken etter å tilrettelegge undervisningen slik at den legger til rette for oppnåelse av relasjonell forståelse. Læreboken har først og fremst påvirkningskraft i forhold til *hvilke* temaer det skal undervises i, ikke *hvordan* det skal undervises i temaene.

Berits omgang med læreboken samsvarer mer med Rezats (2012) beskrivelser om at lærerne planlegger undervisningen utfra hvordan læreboken legger opp instruksjonen. Hun forteller at hun ofte tar utgangspunkt i hva de skal kunne til prøvene og former undervisningen i forhold til dem. Læreboken påvirker henne på den måten at hun ser over hvilke oppgaver elevene skal gjøre, slik at hun er sikker på at hun har forstått det selv. Hun påpeker også at det å bruke læreboken gjør det mye enklere enn om hun skulle drevet matematikk uten bok, ettersom det ville tatt mye tid. Johansson (2008) skriver at læreboken er hovedkilden til hvordan ulike temaer i matematikk undervises, noe som stemte med hvordan Berit underviste om forholdsregning. Mangelen på tilgjengelige konkrete gjorde at den første økten med forholdsregning ikke kunne gjøres slik Berit hadde tenkt. Mangel på formidlingsressursen *konkreter* påvirket, ifølge Berit, undervisningen i stor grad ettersom hun hadde tenkt å ha et aktivitetsbasert undervisningsopplegg.

For Berits del påvirket tilgjengelighetsgraden av konkrete undervisningen slik at den ble basert på læreboken. I den observerte perioden var læreboken sterkt førende for hvordan undervisningen ble gjennomført. I hendelse 4 hadde all undervisning på tavle utgangspunkt i oppgaver som stod i læreboken. I hendelse 3 baserte alle eksemplene på tavla seg på samme oppgavekontekst som læreboken. Læreboken har, som Berit selv sier, en stor rolle i undervisningen, noe som medfører at den type forståelse som læreboken legger opp til får stor påvirkning for hvilken matematisk forståelse undervisningen legger opp til.

5.2.2 Hvordan påvirker rammefaktorene lærernes matematikundervisning?

Som vi kunne lese i analysekapitlet, påpeker Arne at rammefaktoren *tid* påvirker

matematikkundervisningen slik at hvis det er mangel på den, kan undervisningen få et mer instrumentelt preg enn hvis det ikke hadde vært mangel på den. Eksamen påvirker også Arne ettersom at han selv sier han bruker instrumentell undervisning som en siste utvei i arbeidet med enkelte elever. Han forklarer det med at de må kunne stoffet, og at det er bedre at de kan det instrumentelt enn ikke i det hele tatt. Berit ser på elevgruppa som hun har fått tildelt som en faglig ressurs, ettersom hun bruker elever til å forklare matematiske begreper og løsningsmetoder for hverandre.

Hun sier også at antall elever hun har i klassen påvirker måten hun underviser på, fordi hun har som mål å vie tid til alle. Når antallet er høyt sier Berit at det minsker sjansen for at klassen får drive med utforskende aktiviteter i matematikk. Hvis vi setter antall helt på «spissen», er det ikke vanskelig å tenke seg hvorfor antallet spiller en rolle for henne. Hvis Berit for eksempel bare hadde hatt fem elever i klassen, ville det med svært stor sannsynlighet vært mye enklere å drive aktivitetsbasert matematikkundervisning, enn det er når hun har 27 elever. Med få elever har man selvsagt en langt bedre oversikt over elevenes fokus enn om man har når man har 27. Det er ifølge Berit lettere å fange opp elever som «melder seg ut» når de er få enn når de er mange. Hiebert et al. (1997) argumenterer for at elevene må *delta* i de aktivitetene som gis og bidra med matematiske idéer i klasserommet for at alle skal ha mulighet til å forstå matematikken. Når elevantallet blir høyt blir det vanskeligere å holde oversikt over deltakelsen.

Arne, som hele tiden prøvde å søke relasjonelle undervisningstilnærminger, erkjente at han pga eksamen underviste instrumentelt som en siste løsning i arbeidet med et matematisk tema. Når han i tillegg oppgir manglende tid, pga at fire uker av skoleåret «spises» opp av andre ting, blir nødvendigvis antall matematikktimer avsatt til å arbeide med læreplanens respektive tema redusert. Pga at studenten i Eisenhart et al. (1993) hadde fokus på å dekke læreplanmålene, ble tid som kunne vært brukt til begrepsutvikling, brukt til iallfall å gi elevene prosedyrekunnskaper i målene. Frykt for ikke å dekke læreplanmålene ledet til stor pensumgjennomgang på kort tid. Dette er vel egentlig ikke veldig rart eller overraskende. De aller fleste lærerne ønsker at elevene sine skal lykkes i skolearbeidet. Hvis noen prosedyrekunnskaper kan gi dem den følelsen, er det ifølge Skemp (1976) viktig ikke å undervurdere den selvtilliten elever kan oppnå av å lære seg noen regler som fører til riktig svar. I prosedyrer er det mindre kunnskap involvert og i dens egen kontekst er de mange ganger mye enklere å forstå (Skemp, 1976). Hvis en elev én måned før eksamen i 10. klasse fortsatt sliter med forståelsen av regning med *vei, fart og tid*, vil det være nødvendig for en lærer å drøfte med seg selv om hvilken matematisk tilnærming som vil være gunstig for eleven; i kort og lengre perspektiv. Ved å jobbe med begrepene, kan det ta for lang tid å forstå (Skemp, 1976), og i tillegg kan tiden gå på bekostning av andre tema der det var behov for repetisjon. Imidlertid vil det å forstå

sammenhengen mellom begrepene kunne gjøre at kunnskapen blir iboende i eleven

5.2.3 Hvordan påvirker kollegaer lærernes matematikkundervisning?

Begge fokuslærerne sier de lar seg påvirke av kollegaene rundt seg. Arne påvirkes av de matematikklærerne som han arbeider tettest med og den matematiske veilederen ved skolen. Berit påvirkes av lærere som tar tilleggsutdanning og av undervisningsoppleggene til bibliotekaren som ligger litt fremfor henne i pensumprogresjonen. I Eisenhart et al. (1993) ble studenten påvirket av en kollega som studenten anså som svært kunnskapsrik. Arne sier selv at kollegaenes evne til å diskutere relasjonelle undervisningsopplegg påvirker hans undervisning. Både Arne og studenten i Eisenhart et al. (1993) påpeker at de har blitt påvirket av andre kollegaers undervisningssyn, når de selv føler at kollegaene bidrar. Ved de skolene der de ikke har hatt samme følelse, har de sittet mer for seg selv «og sku prøve å være lur». Kollegaer som de føler har kompetanse å bidra med, lytter de til. Kollegaene som tar tilleggsutdanning ved skolen til Berit blir lyttet til ved at Berit bruker dem som hjelp i forbindelse med kartlegging av ferdigheter, og som hjelp til å tilpasse undervisningsformen der det er behov.

Boalers (1997) studie om 2 skoler, som hadde ulik tilnærming til matematikkundervisningen, viser at undervisningskulturen ved en skole kan ha betydning for hvilken type kunnskap elevene tilegner seg. Kultur er et læringssamfunn (Hiebert et al., 1997), og samfunnet er definert av menneskene i samfunnet; hvordan de forholder seg til hverandre og omgås hverandre. Hvis et lærerrom preges av at lærerne diskuterer og utveksler idéer vedrørende relasjonell undervisning, stiftes det en kultur for akkurat det. Hvis lærerrom ikke diskuterer idéer og spørsmål om hvordan en kan undervise for å utvikle elevenes relasjonelle forståelse i matematikk, utvikles det heller ikke en kultur der slike tanker får fokus. Hiebert et al. (1997) sine kjennetegn på klasserom som læringssamfunn kan lett overføres til tanker om et lærerrom som et læringssamfunn:

- Undervisningsidéer er valutaen på lærerrommet. Idéer som presenteres av en deltaker kan potensielt bidra med læring for alle deltakerne, og alle idéene skal behandles med respekt og verdighet og tas på alvor, uavhengig av hvem som presenterer den.
- Lærerne skal ha valgfrihet i forhold til undervisningsmetodene de ønsker å bruke. Lærerne må få forstå sin egen metode, og ha respekt for at det finnes mange ulike undervisningsmetoder.
- Dårlig matematikkundervisning gir mulighet for refleksjon over et problem. Slik refleksjon kan alles evne til analyse og bør brukes konstruktivt.
- Vurdering av om en matematikkundervisning er god eller hensiktsmessig, avhenger om vurderingen gir matematikkdiraktisk mening, ikke hvor populær presentatøren er.

I arbeidet med at elevene skal utvikle forståelse for matematikk er det helt sentralt at læreren utvikler sin forståelse for matematikkdiraktikk. Begge fokuslærerne sier de skulle ønske at det var enda mer fagsamarbeid i matematikk blant lærerne, slik at de kan plukke opp idéer fra hverandre, reflektere over undervisningen og utvikle seg som matematikklærere. Hvis en kollegakultur skal bidra til å utvikle matematikkundervisningen og matematikkdiraktiske kunnskaper, må lærernes ledere legge til rette for at lærerne settes i situasjoner som stimulerer en slik læring, akkurat som lærerne som leder for elevene (Hiebert et al., 1997) skal tilrettelegge for situasjoner som stimulerer mental matematisk aktivitet som kan drøftes i et læringssamfunn.

Både Arne og studenten (Eisenhart et al., 1993) lar seg påvirke av kollegaer som de anser som kunnskapsrike. Berit trekker frem bibliotekaren som har oversikten over det matematiske materiellet som er på skolen. Fellestrekket for de tre kollegaene som trekkes frem er at kollegaene som *bidrar* med noe for fokuslærerne, er ifølge fokuslærerne de som påvirker dem. Arne påvirkes av de som deler samme undervisningssyn som han. Berit påvirkes av tilbakemeldinger fra bibliotekarens undervisning, men velger selv hvordan – eller om – hun skal bruke de. Det hadde vært interessant å undersøke om en kollegakultur kan forandre en matematikklærers tilnærming til undervisning, eller om matematikklærere bare tar imot den informasjonen som passer deres eget undervisningssyn og stiller seg kritisk til informasjon som ikke passer. Kanskje ligger det i menneskets natur å søke etter informasjon som passer til egne fordommer for å få en bekreftelse på at det vi mener er rett?

5.2.4 Hvordan påvirker lærernes kompetanse matematikkundervisningen?

Fokuslærerne er tydelig på at en lærer som ikke har relasjonell forståelse for matematikken, ikke er i stand til å undervise relasjonelt. Her er begge fokuslærerne på linje med Skemp (1976) som også tilføyer at det er grunn til å tro at majoriteten av lærerne ikke har relasjonell forståelse for matematikken. Det som kanskje er aller mest interessant er Arnes uttalelse om at han 99 % sikkert ville brukt læreboken som grunnlag for undervisningen hvis han ikke hadde tatt masterutdanning i matematikkdiraktikk. Dette betyr implisitt at hans matematikkdiraktiske kunnskap påvirker hans bruk av formidlingsressurser i undervisningen. Hiebert et al. (1997) argumenterer for at et klasserom som tilrettelegger for utvikling av forståelse i matematikk skal gi elevene muligheten til å reflektere og kommunisere matematikk, oppgavene må være utfordrende og interessante for elevene, og elevene må få bruke kunnskaper og ferdigheter de har til å utvikle metoder for å løse nye oppgaver. Hvis en skal basere seg helt og holdent på læreverket, stiller det da store krav til det. Ett av problemene til læreverk er at de i seg selv ikke er i stand til lede diskusjoner og refleksjoner

rundt oppgavene de gir; det må læreren gjøre. En lærer uten relasjonell forståelse for temaet som skal drøftes vil ifølge Skemp (1976) heller ikke være i stand til å drøfte forståelsen bak en formel, hvis han ikke kan det selv. Jamieson-Proctor og Byrne (2008) skriver at lærere med god fagkunnskap, og god selvtillit, baserer seg i mindre grad på læreboken enn lærere med dårligere fagkunnskap. For å oppfylle Hiebert et al. (1997) sine kjennetegn for klasserom som stimulerer til å utvikle elevenes forståelse i matematikk, kan det tenkes at de er lettere å oppfylle hvis man beveger seg lengre bort fra læreboken enn det gjøres i Johanssons (2006) funn. Imidlertid møter man utfordringen med at lærerne da må inneha relasjonell forståelse for matematikken. Spørsmål som reiser seg er:

- Hvilken matematikkforståelse ønsker vi å utvikle hos elevene, og hva slags matematikkkompetanse kreves det da av læreren?
- Hvordan skal lærerne oppnå denne kompetansen?

Fokuslærerne er også enige i at dårlige fagkunnskaper gir dårlig matematikkundervisning. Arne påpeker at det finnes matematikklærere som ikke er i stand til å gi verken relasjonell eller instrumentell undervisning, mens Berit bruker seg selv som eksempel på at det er vanskelig å gi god undervisning i emner hun ikke forstår selv. For å utvikle lærernes undervisningskompetanse i matematikk, sier begge fokuslærerne implisitt at lærerne må utvikle sin egen forståelse i matematiske emner. Det kreves da av læreren at han/hun faktisk har et ønske om å utvikle forståelsen sin. Denne forståelsen kan utvikles gjennom studier, videreutdanning og kanskje også gjennom en kollegakultur som jeg beskrev i diskusjonen om kollegapåvirkning.

6 Konklusjon og perspektivering

I dette kapitlet vil jeg svare på forskningsspørsmålene mine, komme med forslag til videre forskning og avslutte med refleksjoner rundt funnene mine.

6.1 Konklusjon

I denne studien har jeg undersøkt hvordan ulike faktorer påvirker matematikkundervisningen. For å undersøke dette har jeg observert og intervjuet to matematikklærere i grunnskolen. Min problemstilling var:

- Hvilke faktorer påvirker matematikkundervisningen til lærere som ønsker å utvikle elevenes forståelse?

Utfra denne problemstillingen utledet jeg fire forskningsspørsmål:

- Hvordan påvirker formidlingsressurser lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker rammefaktorene lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker kollegaer lærernes matematikkundervisning?
- Hvordan påvirker lærernes kompetanse matematikkundervisningen?

Hvordan påvirker formidlingsressurser lærernes matematikkundervisning?

Observasjonene og intervjuene viste at det var en forskjell i måten formidlingsressursen *læreboken* påvirket undervisningen til lærerne. Arne brukte læreboken som en kilde til oppgaver og designet egne instruksjoner. Dette førte til at læreboken hadde mindre påvirkning på Arnes undervisning enn Berits undervisning, der eksempler fra boken ble brukt til instruksjon og elevene arbeidet med oppgaver som var kontekstnær eksemplene.

Arnes matematikkdiraktiske overbevisning og hans kunnskaper om forståelse i matematikk gjør han kritisk til det læreboken presenterer, og læreboken har ingen synlig påvirkning på hvordan han underviser, men den påvirker hva han underviser i. Berit opplevde at mangel på konkrete påvirket undervisningen til å basere seg på læreboken. Hun opplever også at tidsfaktoren gjør at det krever mye å drive matematikkundervisning uten bok. I disse to tilfellene påvirker læreboken undervisningen på den måten at begge lærerne følger temaene som læreboken foreslår. I Berits tilfelle er læreboken førende for hvordan hun underviser, mens formidlingen til Arne ikke bunner ut av instruksjonen til læreboken. Dette fører til at den forståelsen læreboken legger opp til blir mer

førende hos Berit enn den gjør hos Arne.

Hvordan påvirker rammefaktorene lærernes matematikkundervisning?

At det er mindre tid til å drive undervisning enn både lærebøker og Kunnskapsløftet legger opp til, kan for Arne føre til at enkelte elever som trenger lengre tid til å forstå matematikk relasjonelt, til slutt mottar instrumentell undervisning. Dette handler om eksamen, fokus på å dekke læreplanmål og mangel på tid. Et høyt elevantall påvirker Berit slik at hun vegrer seg for å lage aktivitetsbaserte undervisningsopplegg som kan stimulere elevenes forståelse i matematikk, og hun foretrekker lærerstyrt undervisning, men at faglig dyktige elever er med på å stimulere forståelse gjennom diskusjon og refleksjon. Tidspress, læreplanmål og eksamen påvirker begge fokuslærerne i en retning som leder mot instrumentell undervisning, selv om lærerne selv ikke ønsker det.

Hvordan påvirker kollegaer lærernes matematikkundervisning?

Matematikkundervisningen påvirkes av kollegaene fokuslærerne samarbeider med. I Arnes tilfelle gjør kollegasamarbeidet at det er lettere å prøve å skape relasjonell undervisning ettersom de har en fagressurs på fagområdet, og at de jobber med begreper på en relasjonell måte. Berits kollega har oversikt over konkretiseringsmaterieell og bidrar med kunnskaper om dem. Kollegaer som fokuslærerne føler bidrar med noe, påvirker undervisningen deres. Begge opplever av kollegaer bidrar til å forbedre egen praksis.

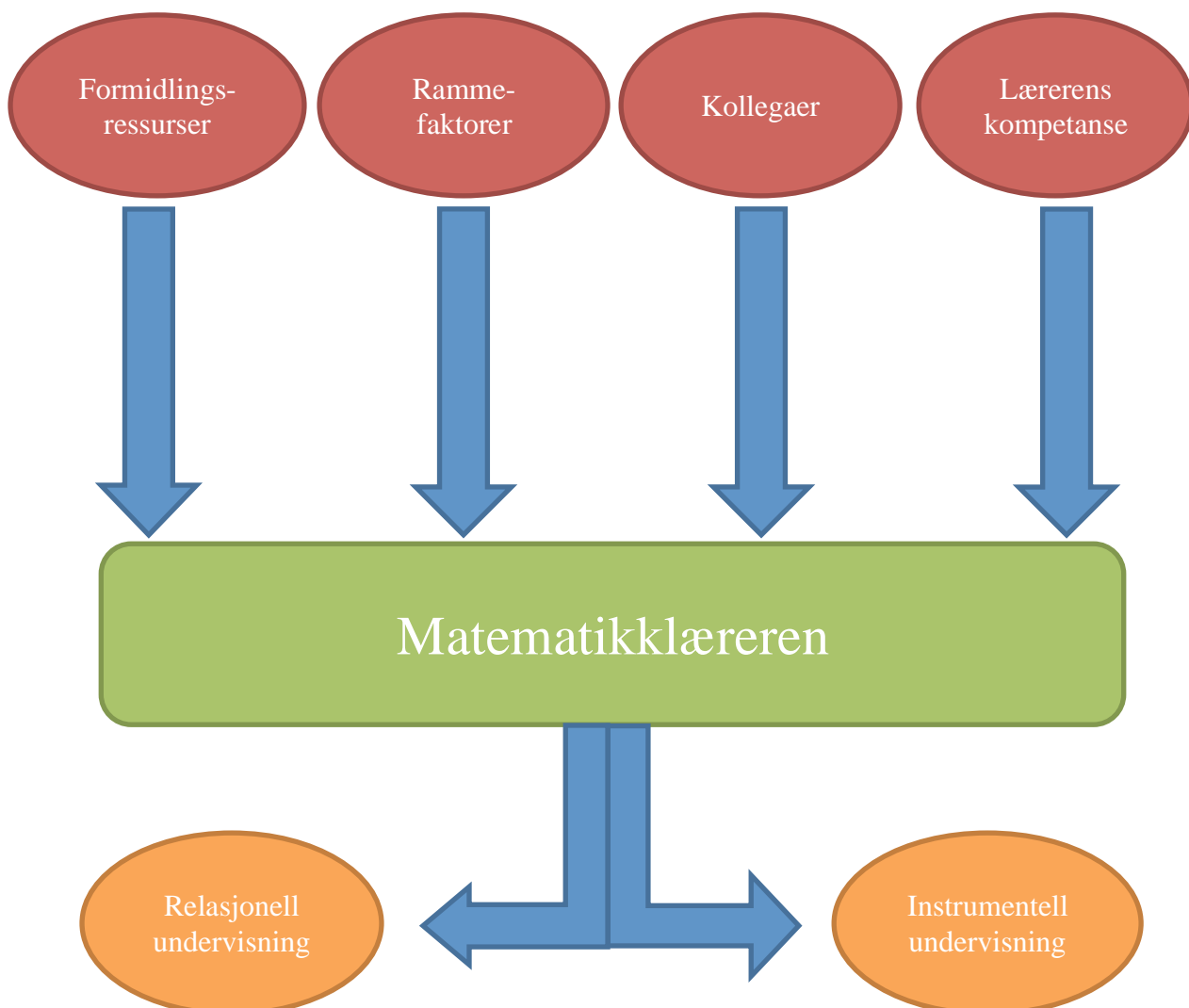
Hvordan påvirker lærerens kompetanse matematikkundervisningen?

Arnes kompetanse i matematikk påvirker bruken av formidlingsressursen *læreboken*. Uten masterutdanningen er han nesten helt sikker på at han ville basert seg på den, og den forståelsen læreboken tilrettelegger for. Ifølge fokuslærerne er det ikke mulig å undervise relasjonelt i et matematisk tema som man selv ikke har relasjonell forståelse for. Lærernes egen forståelse påvirker elevenes forståelse. Berit sier at de temaene hun har dårlig forståelse i, er det vanskelig å undervise i. Ifølge Jamieson-Proctor og Byrne (2008) fører dårlig selvtillit i et tema til at lærere baserer seg mer på læreboken. Egen matematisk forståelse har i fokuslærernes tilfelle påvirkning på hvordan matematikkundervisningen gjennomføres, og hvilken matematisk forståelse undervisningen tilrettelegger for. Kompetansen Arne fikk gjennom masterutdanningen har påvirket så mye at undervisningen ville vært helt annerledes uten den.

6.2 Perspektivering

I en kassstudie som denne er det ikke mulig å komme med noen generelle svar på hvordan de fire faktorene påvirker undervisningen i matematikk, og dette er heller ikke meningen med studien.

Hensikten er å belyse at selv om man har intensjoner om å undervise relasjonelt i matematikk, slik at elevene kan oppleve å forstå den, er det flere faktorer som påvirker – og som noen ganger er med på å hindre at undervisningen blir slik læreren i utgangspunktet ønsket. Mangel på konkrete snudde opp ned på undervisningen til Berit – fra aktiviseretbasert til lærebokstyrt. Fokus på å nå læreplanmål kan lede mot instrumentell undervisning i Arnes tilfelle. Mangel på matematikk- og matematikdidaktisk kompetanse kan lede til at undervisningen støtter seg til læreboken, noe som bekreftes i studien til Jamieson-Proctor og Byrne (2008). Lærebokens instruksjoner og tilrettelegging for forståelse i matematikk kan fargelegge hele undervisningspraksisen til lærere. Alle fire faktorene, påvirker undervisningen enten i retning en mer relasjonell tilnærming eller en mer instrumentell tilnærming. I denne studien dro rammefaktorene og lærebøkene undervisningen i retning av en instrumentell tilnærming, men det finnes flere eksempler på at kollegaer med matematikdidaktisk kompetanse, og lærernes egen matematikdidaktisk kompetanse, dro undervisningen mot en relasjonell tilnærming. Det den også viser er at de fire faktorene påvirker lærerne forskjellig.



Figur 20

Matematikdidaktikeren Arne påvirkes mindre av faktorer som kan lede han mot instrumentell undervisning, spesielt kom dette til syne når det gjelder bruken av læreboken. Det kunne vært interessant å undersøke flere lærere som var utdannet matematikdidaktikere for å se hvordan de fire faktorene påvirker deres matematikkundervisning. Er det slik at lærere med god fagkompetanse og matematikdidaktisk kompetanse ikke lar seg påvirke like mye av lærebøker og rammefaktorer som lærere med lavere utdanning? Det kunne også vært av interesse å undersøke hvordan lærere med mastergrad i matematikdidaktikk praktiserer undervisning kontra lærere med allmenn- eller grunnskolelærerutdanning. Et annet spørsmål som har reist seg gjennom denne studien er: Hvilken forståelse tilrettelegger lærebøker i matematikk for?

For å utvikle matematikkundervisningen tror jeg at det er viktig å heve kompetansenivået hos matematikklærere. Dette krever at lærere lærer mer om matematikk og matematikdidaktikk. For å hindre at lærere som ikke har relasjonell forståelse for matematikken blir lærere i matematikk, har skoleverket en jobb å gjøre. Hvis en ønsker en matematikkundervisning som tilrettelegger for relasjonell forståelse, blir det etter min mening viktig å la lærere som ikke har tilstrekkelig kompetanse slippe å undervise i matematikk. Man kan stille spørsmål om det er nødvendig at alle lærere i Norge skal ha undervisningskompetanse i matematikk, eller om vi skal spisse lærerutdanningen slik at flere lærere blir spesialister? Dette stiller selvsagt krav til administrasjonene rundt omkring på skolene, ettersom de bestemmer hvilke fag lærerne skal undervise i. For å få en skole som i større grad trener seg på å undervise relasjonelt i matematikk, mener jeg vi må ta tak i den faktoren som fokuslærerne og Skemp (1976) diskuterer; en lærer må forstå matematikk relasjonelt for å kunne undervise relasjonelt. Begge fokuslærerne har fordypning i matematikk. Likevel kom det frem i intervjuet at begge bare hadde én klasse hver i matematikk. Jeg tror at for at lærerne skal utvikle sin matematikfaglige og matematikdidaktiske forståelse, må lærerne også få undervise mye i matematikk. Lærers kompetanse i fag må bli så sterk at læreren ikke lar seg påvirke for mye av faktorer som læreren ikke kan forandre selv. Lærere kan ikke uten videre endre elevantallet i klassen sin, bytte kollegaer eller få et nytt læreverk til skolen. Slike faktorer endres over tid. Hver dag er imidlertid en mulighet til å forbedre egen kunnskap om matematikk og matematikdidaktikk, og her tror jeg lærerne må ta tak i seg selv. I idretten driver ikke utdannede fotballtrenerne med å undervise fotball tre timer i uka, for å bruke den resterende tiden av uken på å undervise i fem andre idretter. Hver idrett har sin egen treningsmetode og taktikk, og slik er det med undervisningen i skolen også. En fotballtrener blir en bedre fotballtrener hvis han/hun øver på å være fotballtrener. En matematikklærer blir en bedre matematikklærer hvis han/hun øver på å være matematikklærer. En elev som øver på å utvikle fleksibel kunnskap, blir flinkere til å løse oppgaver som krever fleksibel kunnskap (Boaler, 2002).

7 Referanser

- Alseth, B., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2008). *Multi 7A: Grunnbok*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.
- Bjørndal, C. R. P. (2012). *Det vurderende øyet: observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning (2. utg.)*. Oslo: Gyldendal akademisk.
- Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnamnaren* (21), 4, 36-45.
- Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: Teaching styles, sex and setting*. Buckingham: Open University Press.
- Boaler, J. (2002). The development of disciplinary relationships: Knowledge, practice and identity in mathematics classrooms. *For the Learning of Mathematics*, 22(1), 42–47.
- Carpenter, T., Hiebert, J., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., & Murray, H. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education (7. utg.)*. London: Routledge.
- Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8-40.
- Gilje, N., & Grimen, H. (1993) *Samfunnsvitenskapenes forutsetninger (3. utg.)*, Oslo: Universitetsforlaget.
- Hiebert, J. & Lefevre P. (1986) Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. I Hiebert J. (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*.(s. 1-27) Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371–406.
- Hjardar, E., & Pedersen, J. (2006). *Faktor 2: Grunnbok*. Oslo: Cappelen.
- Jamieson-Proctor, R., & Byrne, C. (2008). Primary teachers' beliefs about the use of mathematics textbooks. I Goos M., Brown R., & Makar K., (Red.), *Navigating Currents and Charting Directions* (Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia) (Vol. 1, s. 295-302). Brisbane: MERGA.
- Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks. A Classroom and Curricular Perspective*. Doktorgradsavhandling. Department of mathematics, Luleå University of Technology, Luleå.

- Kruuse, E. (1989). *Kvalitative forskningsmetoder i psykologi og beslægtede fag*. København: Dansk psykologisk forlag.
- Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet. En undervisningslære*. Oslo: NKI-forlaget.
- Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Reason, M. (2003). Relational, instrumental and creative understanding. *Mathematics Teaching*, 184, 5-7.
- Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. I Gueudet G., Pepin B., & Trouche L., (Red.), *From Text to 'Lived' Resources* (s. 231-245). Springer Netherlands.
- Robson, C. (2002). *Real world research: A resource for social scientists and Practitioner-researchers* (Vol. 2). Oxford: Blackwell.
- Ryen, A. (2002). *Det kvalitative intervjuet: Fra vitenskapsteori til feltarbeid*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.
- Røsseland, M. (2011). «Jeg gidder ikke bry meg mer!». *En studie av hva åtte ungdomsskoleelever mener påvirker deres læring i matematikk*. Mastergradsoppgave. Avdeling for lærerutdanning, Høgskolen i Bergen.
- Shield, M. (2000). Mathematics textbooks: Messages to students and teachers. I *Mathematics education beyond 2000* (Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Fremantle, s. 516-522). Sydney: MERGA.
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching*, 77, 20-26.
- Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge-Falmer.
- Utdanningsdirektoratet. (2010). *Læreplanen i matematikk fellesfag*. Hentet 1. mai, 2013, fra <http://www.udir.no/kl06/MAT1-03/>

Vedlegg

8.1 Transkriberingsnøkkel

..	En liten nøling.
...	Pause opptil 3 sekunder.
(Pause <i>n</i> s)	Pause <i>n</i> sekunder.
/	Personen som snakker blir avbrutt av en annen person.
...tekst	Personen som ble avbrutt fullfører setningen.
(<i>Tekst i parentes</i>)	Redegjørelse for kommunikasjon eller handling som ikke er språklig.
[xxx]	Navn fjernet av hensyn til anonymitet.
[<i>annen tekst</i>]	Nyttig informasjon knyttet til dialogen.
[...]	Unødvendig tekst fra transkripsjonen utelatt.
E ₁ , E ₂ , E ₃ osv.	Hvis forskjellige elever ytrer seg i en dialogsekvens markeres forskjellen med å gi elevene nummer.
<i>Kursiv</i>	Kursiv i teksten betyr at den som snakker legger trykk på ordet.

8.2 Samtykkeerklæring

Forespørsel om å delta i intervju i forbindelse med en masteroppgave

Jeg er masterstudent i matematikdidaktikk ved HiST av. For lærer- og tolkutdanning og holder nå på med den avsluttende masteroppgaven. Temaet for oppgaven er hvordan ressurser kan påvirke lærernes undervisning i matematikk, og jeg skal undersøke hvordan ressursene i skolen påvirker lærere som i utgangspunktet ønsker å drive relasjonell undervisning i matematikk og som har som mål å utvikle elevenes relasjonelle forståelse i faget..

For å finne ut av dette, ønsker jeg å intervju 2 lærere – 1 på barneskolen og 1 på ungdomsskolen. Spørsmålene vil dreie seg om faglig bakgrunn, hvordan skolen legger til rette for relasjonelle undervisningsmetoder, skolens utviklingsarbeid, tidsressurs, lærebøker og K-06.

Jeg vil bruke båndopptaker og ta notater mens vi snakker sammen. Intervjuet vil ta omtrent en time, og vi blir sammen enige om tid og sted.

I tillegg ønsker jeg å observere lærerne som intervjues i omtrent 3 skoleøkter. Her vil jeg bruke notater og skal bare observere læreren. Ingen elever vil bli beskrevet med noe ord.

Det er frivillig å være med og du har mulighet til å trekke deg når som helst underveis, uten å måtte begrunne dette nærmere. Dersom du trekker deg vil alle innsamlede data om deg bli anonymisert. Opplysningene vil bli behandlet konfidensielt, og ingen enkeltpersoner vil kunne gjenkjennes i den ferdige oppgaven. Opplysningene anonymiseres og opptakene slettes når oppgaven er ferdig, innen utgangen av 2013.

Dersom du har lyst å være med på intervjuet og observasjonen, er det fint om du skriver under på den vedlagte samtykkeerklæringen og sender den til meg.

Hvis det er noe du lurer på kan du ringe meg på 47050100, eller sende en e-post til bjorge.eilertsen@gmail.com. Du kan også kontakte min veileder Svein Sikko ved HiST ALT på mail: svein.sikko@hist.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD).

Med vennlig hilsen
Bjørge Eilertsen
Østenbekkveien 34 H
9403 HARSTAD

Samtykkeerklæring:

Jeg har mottatt skriftlig informasjon og er villig til å delta i studien.

Signatur Telefonnummer