Mastergrad i matematikkdidaktikk

Masteroppgave

Hallgrim Barlaup

Kva er best kjøp?

Eit kvalitativ studie av korleis elevar møter ei open, kontekstbasert oppgåve om samanlikning av proporsjonale forhold

Trondheim, mai 2011

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Hallgrim Barlaup

Kva er best kjøp?

Eit kvalitativ studie av korleis elevar møter ei open, kontekstbasert oppgåve om samanlikning av proporsjonale forhold

What is the best buy?

A qualitative research about how pupils meet an open task with comparison about proportional relations

Masteroppgave, Mastergrad i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2011

Spesialiseringsretning:	Master i matematikkdidaktikk
Veileder:	Ole Enge

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

1. Innhald

1. Innleiing

1.1 Bakgrunn

I denne masteroppgåva vil eg presentere korleis ei gruppe elevar på sjuande trinn møter ei open oppgåve med samanlikning av proporsjonale forhold. Nohda skildrar ei open oppgåve som ein instruksjon kor elevane sitt arbeid med matematikken er ope for varierte tilnærmingar til løysingar av problemet (Nohda, 1991, s. 33). Å la elevane arbeide med ei slik oppgåve opnar opp for diskusjon om dei ulike tilnærminga elevane kjem med, og ei utforsking for å finne likskapar og ulikskapar. Fordi eg ynskjer å i størst mogleg grad sjå korleis elevane møter eit problem når dei ikkje verte gjeve noko algoritme for løysing, og diskutere deira tilnærmingar er opne oppgåve eit naturleg val. Noko også Nohda stadfester (Nohda, 1991, s. 34).

I fjor vår skreiv eg ei oppgåve om Regula de tri, og vart inspirert til å sjå korleis elevane kunne løyse oppgåver utan at dei fekk presentert regelen. Sjølv om regelen forsvann i norsk skule på sekstitalet, er arven etter denne enno i bruk som regelen kryssmultiplikasjon. Men som bl.a. Brekke har påpeika synest ikkje elevane å vite når dei kan bruke metoden, heller ikkje korleis den verkar (Brekke 2001:71). Eg ynskjer å sjå korleis elevane sitt møte med proporsjonalitet kan gje grobotn for forståing av metoden, og for proporsjonalt resonnement. Proporsjonalt resonnement er eit særs viktig tema i skulen, men det er fyrst i den seinare tida at det er vorte forska på korleis elevane utviklar dette, eventuelle kvifor dei ikkje gjer det

1.2 Proporsjonalt resonnement

"Proportional reasoning "is of such great importance that it merits whatever time and effort must be expended to assure it's carefully development." (NCTM 1989:82)

Det var ikkje utan grunn at Regula de tri var noko av det viktigaste ein lærde i skulen, faktisk så viktig at den var eit eige mål i fleire læreplanar. Den kunne brukast for å løyse alle typar problem kor tre var kjende og ein ynskte å finne den fjerde. Men den vart presentert, i lærebøker og mykje truleg og av lærarane, som ein ferdig regel som elevane skulle hugse og bruke. Lamon hevdar at med å fokusere på bruk av regelen, framføre forståing, påverkar ein ikkje berre ein persons haldningar til matematikk, men og motivasjon for læring. (Lamon 2005:xiii)

Det er skreve og forska mykje på proporsjonalt resonnement, kvifor det er så vanskeleg, kvar elevane går feil og mykje om korleis ein tidleg kan hjelpe elevane til å utvikle dette. Eit fellestrekk som engasjerer forskarane, er at om elevane er trygge med å resonnere proporsjonalt har dei også meir moglegheit til å møte eit problem på fleire måtar. Gjennom å gje dei ei open oppgåve, vil ikkje elevane berre sjå at det er fleire måtar å løyse problemet på, men dei vil og kunne diskutere dei ulike tilnærmingane. Eg ynskjer å sjå på korleis ein kan ta utgangspunkt i dei tilnærmingane som elevane brukar, korleis elevane diskuterar desse for å forsøkje å finne korleis dei resonnerar og vidare korleis ein kan hjelpe dei vidare til å resonnere proporsjonalt på ein trygg måte.

1.3 Forskingsspørsmål

Mitt fokus gjennom heile oppgåva er korleis elevane sitt møte med ei open oppgåve med samanlikning av proporsjonale forhold kan syne teikn på proporsjonalt resonnement, og korleis ein kan bruke dette for å hjelpe dei til å vidareutvikle sine strategiar. Målet er at elevane skal utvikle ein evne til å tenkje kring eit problem som set dei i stand til å løyse oppgåva på ein fleksibel måte, samt bli trygg på det dei gjer. Slik kan dei utvikle ein modell som dei kan ta med seg vidare og tilpasse til det enkelte problem dei møter, og frigjere seg mykje strev med å hugse ei mengd formlar. Gjennom å diskutere med medelevar får elevane sett ord på sine tankar, og øvast i å argumentere for sin framgangsmåte. Dei får og innsyn i ulike framgangsmåtar slik at dei får moglegheita til å revurdere og validere sin eigen. Men slike oppgåver har og sine manglar. Av det eg har lese verkar samanlikning av proporsjonale forhold å vere vanskelegare for elevane, enn vanlege 4-talsproblem, som Regula di tri kan brukast for å løyse. Dette av di det er noko uklårt for elevane når og om dei har funne ei løysing på problemet.

Difor har eg velt å følgjande forskingsspørsmål:

Korleis løyser elevane ei open, kontekstbasert oppgåve om samanlikning av proporsjonale forhold?

Eit naturleg underspørsmål er korleis ein kan ta utgangspunkt i elevane sine løysingar for vidare arbeid mot proporsjonalt resonnement.

1.4 Metode for innsamling av data

Eg ville gå inn i ein 7 klasse for innsamling av data til prosjektet mitt. Eg tok kontakt med fleire skuler, men den klassen eg var i var den kor eg fekk mest tid med elevane. Det at klassa, i følgje læraren, var ein aktiv klasse som tok imot dei fleste nye utfordringar var og noko som gjorde at eg velde denne klassa. Eg ynska mellomtrinnet, av di eg har ein hypotese om at det er der elevane mest truleg kjem med eigne innspel, 7 trinn var mest ynskjeleg av di eg ville at dei skulle ha erfaring med brøkoppgåver, slik at dette var ein innfallsvinkel dei kunne velje i møte med mine oppgåver. Eg fylgde eit tredagars opplegg, utvikla nettopp for å støtte utviklinga av proporsjonalt resonnement hjå elevane. I dette opplegget var det nettopp lagt opp til diskusjonar i små grupper og i klassen, så det falt godt saman med kva eg ynska å forske på.

Mitt studie er kvalitativt. " I kvalitativ forskning blir virkeligheten skapt eller konstruert av personene som deltar i studien." (Postholm, 2010, s. 34). Som kvalitativ forskar veit eg at mi forsking er påverka av mine eigne, subjektive teoriar, og difor kjem eg til å leggje fram mine perspektiv og meiningar for å syne korleis dei har påverka forskingsarbeidet. (Postholm, 2010, s. 21). Sidan eg vil sjå korleis elevane møter mine oppgåver, og korleis dei syner si forståing i møte med denne, er mitt studium eit fenomenologisk studie. Eit slikt fortolkande studium er prega av deltakarane i den sosiale konteksten, og korleis det pregar dei. Deltakarene i mitt studium får kunnskap i diskusjon med medelevar, og denne kunnskapen formast i interaksjon mellom elevane. I analysekapitlet vil eg analysere elevane sine tilnærmingar for å løyse oppgåvene, og analysere desse ut frå omgrep frå teorikapitlet. Som analysemetode har seg støtta meg på teknikken frå *grounded theory*, på norsk kalla *grunngjeve teori*. Eg har sett på korleis elevane forklarar sine tilnærmingar, og utvikla forskjellige kategoriar ut frå desse tilnærmingane.

1.5 Teori

Sidan mi forsking handlar om proporsjonalt resonnement vil eg utdjupe dette i teorikapitlet, kor eg og kjem til å avklare omgrep som tal linjer, ratar, forholdstabell, strategi, opne oppgåver og kontekst. Sidan mitt fokus er på korleis elevane løyser oppgåva, og diskuterar denne vil eg og avklåre mitt syn på læring, sosialkonstruktivisme, og omgrep som språk, meditert læring og distribuert kunnskap. Men hovudtynga i teorikapitlet vil liggje på proporsjonalt resonnement, kor eg kjem særleg til å bruke Susan Lamon sitt arbeid som utgangspunkt.

2. 2.Teori

I dette kapitlet vil eg presentere teorien og avklare omgrep eg vil bruke i analysen. Sidan eg ser på korleis elevane møter opne, kontekstbaserte oppgåver om samanlikning av proporsjonale forhold vil eg presentere kva eg legg i dette. Medan elevane arbeidde var det lagt opp til diskusjon og samhandling, og eg vil difor først ta utgangspunkt i sosialkonstruktivistisk syn på læring, og då særleg distribuert læring. Avslutningsvis vil eg vise til teoriar som er spesifikke for å leggje til rette for utvikling av proporsjonalt resonnement.

2.1 Læringsteori

I sosiokulturelle læringsteoriar er ramma for læring det som skapar ynsket om læring, ein må oppleve det som viktig å lære. Då gjeld det å skape interaksjonsformer og miljø kor den enkelte opplever seg akseptert, å bli verdsett både som ein som kan noko og som kan bidra til andre (Dysthe, 2001, s. 40). Det å formulere si gryande fagforståing i ord, dele denne med andre, få reaksjonar og kunne drøfte det ein forstår og ikkje forstår er viktig for læring. Slik kan ein seie at meining, kunnskap og forståing blir skapt gjennom interaksjon. Og her kjem vi til sosialkonstruktivismen kor språk og diskurs er vektlagt sidan det er gjennom språkleg samhandling at meining blir konstruert og læring kan skje (Dysthe, 2001, s. 61). Gjennom å samtale med andre får ein tilbakemelding på sin tankegang ved at andre stadfester den eller dei uttrykker usemd, kritiserer den eller korrigerer den. Slik er tilbakemeldinga essensiell for all kunnskap (Ernest, Udatert, s. 9).

2.1.1 Sosial konstruktivisme

Sosialkonstruktivismen skildrar danning av kunnskap i eit sosialt samspel som ein syklus gjennom fire prosessar. Dei er offentliggjering (*publication*), tilpassing til felles kunnskap *conventionalisation*), tileigning av ny kunnskap (*appropriation*) og omdanning til eigen kunnskap (*transformation*) (Ernest, 2006, s. 6). Gjennom at elevane utvekslar sin individuelle kunnskap i ein sosial setting, vert kunnskapen til den enkelte utfordra og ny kunnskap konstruert. Ein søkjer å sjå korleis andre tenkjer stemmer overeins med sin eigen tanke, og sjå korleis ein kan få andre sitt bidrag til å passe med sitt eige (Jaworski, 1994, s. 17,22 & 25) I eit sosial konstruktivistisk læringsmiljø er elevane forventa å forklare til andre korleis dei tenkjer, og engasjere seg i diskusjonen med å komme med antakingar, argumentere for desse og forsøke å prøve dei. Dei er forventa å forklare og forsvare deira resonnement, å lytte for å forsøke å forstå andres forklaringar. Sosialkonstruktivismen legg vekt på at kommunikasjon er å bidra med eigen kunnskap og lytte til andre, og kor ueinigheiter er ein styrke for å danne refleksjon over eiga kunnskap. Om svaret elevane finn ikkje er det same, så vil ein i eit slikt læringsmiljø forsøke å finne kjelda til skilnaden (Zack & Graves, 2001, s. 236 & 256).

2.1.2 Distribuert og meiningsfull læring

Med å forvente at elevane skal verbalisere korleis dei har løyst eit gjeve problem, kan ein påverke prosessen dei brukar for å løyse problemet eller liknande problem (Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008, s. 1487). Weber med fleire hevdar at diskusjon opnar opp for at elevane får teste sine idear gjennom tilbakemeldinga dei får frå andre. Dei argumenterar for at gjennom å høyre andre sine idear kan elevane ta i bruk desse i sitt eige arbeid. Dei får klårgjere korleis dei tenkjer, både for seg sjølv og andre, med å setje ord på sine idear og slik byggje ein djupare forståing av nøkkelomgrep. Slik kan diskusjon oppmuntre elevane til å ta ei meir reflekterande haldning til deira matematiske resonnement, og hjelpe dei til å kommunisere matematisk når dei argumenterar (Weber, Maher, Powell, & Lee, 2008, s. 247-248). Vidare foreslår Weber med fleire at eit læringsmiljø kor elevane sitt bidrag vert oppmuntra og ikkje vurdert, kor ein oppmuntrar elevane til å bruke fornufta si og dei sjølv er dei som avgjer kva som gjev meining, og kor utvida tid er gjeve for utforsking og diskusjon, vil invitere elevane til å delta og utfordre kvarandre sine argument. Slik kan ein opne opp for at det argumentasjonen blir subjekt for debatt, og ikkje den som argumenterar (Weber, m.fl., 2008, s. 260). I eit slikt miljø er det ein genuin kommunikasjon mellom lærar og elev, kor læraren forsøkjer å forstå og bruke elevane sine idear i undervisninga (Wood, Cobb, & Yackel, 1995, s. 406)

Sosial konstruktivisme er ein grein av konstruktivismen, som seier at elevane må danne sin eigen kunnskap. Dei må oppdage den så å seie. I oppdagande læring er godt tilpassa objekt, bilete, diagram eller grafar det som inneheld kjelda til matematikk (Wood, m.fl., 1995, s. 404). Om ein lærar underviser elevane i noko som dei kunne oppdaga sjølve, vert eleven hindra i å tenkje ut og slik forstå det fullstendig (Jaworski, 1994, s. 15). Den viktige læringa skjer når eleven arbeider med eit problem som om læraren ikkje var tilstades, altså når eleven sine handlingar ikkje avhenger av læraren (Miyakawa & Winsløw, 2009, s. 205). Lamon påstår at sjølv om resultat er det same, er skilnaden den at barn som har vore engasjerte i resonneringa også har utvikla strategisk planlegging, forståing for tal og sjølvtillit i å bruke deira eigne hovud for å løyse problem (Lamon, 2005, s. 100).

2.1.3 Omgrep og forståing

For å skildre læring på ein meiningsfull måte, seier vi at elevane "dannar koplingar" ettersom dei utviklar forståing mellom eller kring omgrep eller emnar (Clark, Berenson, & Cavey, 2003, s. 301). Elevane får omgrepskunnskap som kan bli lært som eit samankopla nettverk av kunnskap, kor dei kopla forholda er like framtredande som dei enkelte delane av informasjon (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3). Vi snakkar om to nivå kor forhold mellom delar av matematisk kunnskap kan bli kopla saman. På primærnivået koplast informasjonen saman på same abstraksjonsnivå, forholdet vert verande innanfor same kontekst. På refleksjonsnivået er forholda som vert danna mindre bunde til spesielle kontekstar. Dei vert ofte danna gjennom å kjenne att liknande kjerneeigenskapar i delar av informasjon som på overflata ser ulikt ut. Forholda føregår på eit høgare abstraksjonsnivå, gjennom at dei bind saman eigenskapane til tilsynelatande forskjellige delar av kunnskap. Å danne desse koplingane krev ein prosess av å ta eit steg tilbake og reflektere over informasjonen som er kopla saman. Problem som er strukturelle like har problempresentasjonar med nokre omgrepsmessige element til felles. Koplinga mellom strategien og relaterte omgrep knytar saman strategien, gjennom dei felles element, til mange problempresentasjonar. Generaliserte strategiar fjernar nauda for å lære forskjellige prosedyrar for kvar enkelt oppgåve, og slikt redusere talet på prosedyrar som må bli lært (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 5,13 & 14). Proporsjonalt resonnement er ei slik kopling som gjer elevane i stand til å sjå dei samanfallande eigenskapane i oppgåver dei møter.

2.2 Opne og kontekstbaserte oppgåver

Skal elevane kunne diskutere deira ulike strategiar, krev det at oppgåvene dei får er av ein slik karakter at elevane kan utvikle og taka i bruk eigne strategiar for løysing av problemet. Dei må vere gjeve i ein kontekst som elevane opplever som reell, slik at det blir meiningsfullt å løyse oppgåva. Eg vil her presentere kva eg legg i opne oppgåver, og korleis konteksten verkar inn på løysinga av dei.

2.2.1 Opne oppgåver

Opne oppgåver er definert som ein instruksjon kor samhandlinga mellom elevar og oppgåva er open for varierte tilnærmingar for å løyse eit problem, som det ikkje er noko føreskrive måte å løyse (Nohda, 1991, s. 33-34). Shimada foreslår at ei slik tilnærming involverar å gje elevane problem med få vilkår som tillet fleire formuleringar av elevane og som ikkje krev noko utanfor det repertoaret dei allereie har utvikla (Shimada, 1997, s. 9). Det er ein måte å arbeide på som tillett elevane å sjølve velje deira eigne tilnærmingar når dei løyser oppgåvene. Det gjer det mogleg å utforske strategiar på ein måte kor dei føler seg trygge, og tillet vidare utdjuping av problemløysingsprosessen. Dette inkluderar at elevane kan vise til tilnærminga dei har nytta, eller korleis dei har resonnert. Slik kan ein få eit ganske rikt bilete av elevane sin kunnskap (Moskal & Magone, 2002, s. 121). I prosessen med å løyse opne oppgåver er ulike tilnærmingar både forventa og akseptert og slik kan kvar enkelt elev bli engasjert i oppgåveløysinga. Elevane si aktivitet er open, men det inkluderer at elevane skal kunne demonstrere si tilnærming eller forklare korleis dei har resonnert, sjølv om dei kan kome med forskjellige argument for å støtte si tilnærming. Det at ei oppgåve er open ligg altså i prosessen, metoden for å kome til svaret, og ikkje i sjølve svaret (Miyakawa & Winsløw, 2009, s. 209).

Eg bruker omgrepet tilnærming om korleis elevane tenkjer om å løyse eit problem, og strategi for korleis elevane har løyst eit problem. Elevane har altså først utvikla ein strategi når den førar fram til eit svar, og dei kan forklare korleis dei har resonnert. Van den Heuvel-Panhuizen argumenterar for at aktivitetar kor elevane får danne sine eigne strategiar produserer ikkje berre ein strategi, men ei kjede av strategiar av di nye uttrykk kjem fram (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003, s. 13,29-30). Ein får nye perspektiv og sjå nye måtar å løyse problem på og slik eit høgare nivå av forståing, samstundes som ein grip tidlegare uttrykk av strategien Poenget med ei slik økt er at elevane utviklar og uttrykkjer strategiar for å løyse problemet og reflekterar på deira eigne idear med å søkje å forstå andre sine idear (Miyakawa & Winsløw, 2009, s. 216)

Målet med å introdusere ei open oppgåve er å fremme dei kreative aktivitetane hjå elevane og samstundes den matematiske tenkinga som under problemløysinga. Med andre ord, både elevaktivitet og matematisk tenking må få gjeve fritt spelerom (Nohda, 1991, s. 32). Elevane må få bruke og teste deira matematiske kunnskap, gjennom hovudsakeleg to prosessar: prosessen kor nokre vilkår og hypotesar frå eit ”verkeleg” problem er formulert matematisk og prosessen av generalisering og systematisering etter å ha løyst problem. Å løyse ei open oppgåve kan vere særleg nyttig for utforsking sidan det involverar å tolke eit kontekstbasert rikt problem, og danne ei matematisk løysing som oppfordrar til dei passande strukturelle relasjonane. Læraren si rolle blir å lytte til elevane og hjelpe dei til å klårgjere den strukturelle relasjonen i tilnærminga deira (Dixon, 2005, s. 379 & 386).

2.2.2 Kontekst

For å kunne gje den rette støtte i læringsprosessen til elevane, må oppgåvene vere slik at det er naturleg for elevane å nytte tilnærmingar som har sitt opphav i realistiske, tenkelege kontekstar. På den andre sida må strategiane dei utviklar også vere fleksible nok til å brukast på eit meir avansert og generelt nivå (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003, s. 13). Ein av dei mest truverdige og vanlege kontekstar kor vi møter proporsjonalitet er gjennom handel og ulike tilbod. Schliemann og Carraher hevdar at mange ikkje får nytta strategiane dei har utvikla i kontekstar utanfor skulen, når proporsjonale oppgåver i skulen verkar å vere annleis frå korleis dei vanlegvis er i dagleglivet (Schliemann & Carraher, 1992, s. 68-69). Difor er det viktig at oppgåvene elevane får må vere slik at dei oppfordrar elevane til å bli verande i konteksten, noko som gjer at dei kan bruke meir av den intuitive resonneringa si, og slik auke sjansen for at fleire vil lukkast i løysing av oppgåva (Clark, m.fl., 2003, s. 311). Vidare må konteksten i oppgåva vere utfordrande nok til å utfordre elevane til først å utvirke den og så søkje ei løysing. Det er ein hypotese at ein diskusjon om konteksten kan lære elevane å førestille seg oppgåva multiplikativt, altså å danne ein proporsjonal strategi (Misailidou & Williams, 2003, s. 327). Det å lære matematikk krev at ein og lærar å bruke det kulturelle matematiske språket, formata og metodane. For å kunne bruke desse matematiske verkty effektivt når ein løyser problem, må ein lære å identifisere dei matematiske elementa i konteksten (Fuson & Abrahamson, 2005, s. 213).

2.3 Proporsjonalitet

2.3.1 Proporsjonalitet

Den mest vanlege måten å presentere proporsjonalitet i matematikken, er eit spesielt tilfelle av avhengigheita mellom to variablar x og y, nemleg når vi har $y=kx$ for ein konstant k. Anten vi snakkar om funksjonar eller variablar, så tenkjer vi ofte på eit ordna forhold mellom eit “input” og eit ”utkomme”, som gjer at vi kallar dette for ein dynamisk definisjon av proporsjonalitet.

Proporsjonalitet kan også finnast att i geometrien kor to polygonar er kalla like om dei har like mange vinklar som er enkeltvis like og sidene kring vinkelen er like. Samanliknar ein t.d. to rektangel kor det eine har sidene 3 og 5, det andre 5 og 7 vil ein finne at dei ikkje er like sidan sidene ikkje er proporsjonale. Det minste felles multiplum til 3 og 5 er femten, og gjer vi kortsidene like store, altså femten, finn vi at langsidene vert høveleg 25 og 21. Dette er også del av Euklid sin definisjon som seier at om *(a,b)* og *(c,d)* er proporsjonale, så har vi for kvart heiltal *m* og *n* at ma=nc→mb=nd. I dette dømet er ma=nc men mb≠nd, som gjer at rektangla ikkje er porporsjonale. (Miyakawa & Winsløw, 2009, s. 201,202 & 211). For denne oppgåva er det denne statiske definisjonen av proporsjonalitet eg kjem til å halde meg til.

2.3.2 Ulike proporsjonale oppgåver

Ben-Chaim med fleire hevdar at proporsjonale problem i lærebøker og liknande kan delast opp i tre kategoriar.

a) Samanlikne to delar av ein heil, som i ”forholdet av jenter til gutar i ein klasse er 15 til 10), eller ” eit segment er delt inn i det gylne snitt”.
b) Samanlikne storleik av forskjellige deler med ein interessant kopling, som i ”mil per liter”, eller ”folk per kvadratkilometer”, eller ”kilogram per kubikkmeter”, eller ”einskapspris.” Desse samanlikningane er ikkje generelt kalla forhold, men ratar, eller tettleik.
c) Samanlikne storleikar mellom to deler som er omgrepsmessig forbunde, men ikkje naturlig lært som delar av ein felles eining, slik som i ”forholdet mellom sidene hjå to trekantar er 2 til 1”. Desse samanlikningane er av og til referert til som skalering og dei inkluderar spørsmål av auke og minking i liknande transformasjonar..

Medan det i litteraturen er rapportert tre typar oppgåver for å vurdere proporsjonalt resonnement:

1) Manglande verdi problem, kor ein har tre kjende og oppgåva er å finne den fjerde ukjende.

2) Numeriske samanlikningsoppgåver, kor to fullstendige forhold er gjeve og eit numerisk svar ikkje er forlanga, men forholdet skal samanliknast.
3) Kvalitative hypotesar og samanliknings problem som krev samanlikning uavhengig av spesielle numeriske verdiar (Ben-Chaim, James, William, Catherine, & Jane, 1998, s. 249-250).

Eg kjem til å trekkje inn element frå alle desse tre oppgåvetypane men fokuset kjem til å vere på numeriske samanlikningsoppgåver. Slike samanlikningsoppgåver krev at elevane forstår meininga med proporsjonar. Ei slik oppgåva kan vere at dei får vite at ein har to glas med kuler, kor det eine har 10 totalt, med 7 raude og 3 blå. I det andre glaset er det 30 totalt, og 19 raude og 11 blå. Oppgåva er å finne kva glas ein bør velje for å ha størst sjanse for å trekkje ei raud kule. Singer og Resnick konstaterer at når elevane løyser slike oppgåver er deira representasjonar generelt danna på deler, i dette tilfellet mengda kuler i ein farge. Dei vil heller danne ein manglande del enn å danne ein manglande heilskap. Difor er ofte numeriske samanlikningsoppgåver det elevar finn vanskelegast. Dette kan tyde på at dei kjenner større behov for å ha begge mengder tilgjengeleg enn å ha ein heil mengde tilgjengeleg. Dei påstår likevel at det er enklare å bruke del-heil som resonnement for å løyse problem når heile mengda er kjend og lik (Singer & Resnick, 1992, s. 240 & 244).

2.3.3 Ratar og proporsjonar

Lamon seier at av alle emnar i skulepensum, kan ein hevde at brøker, ratar og proporsjonar er det mest langtrekkelege når det gjeld utvikling, det vanskelegaste å undervise, det matematiske mest komplekse, det kognitivt mest utfordrande, det viktigaste for å oppnå suksess i høgare matematikk og forsking, og noko av det mest interessante for forsking. Vidare sei ho at elevar som studerar forhold og ratar som deira første tolking av rasjonale tal utviklar ein sterk oppfatning av likskap og av proporsjonalt resonnement generelt (Lamon, 2007, s. 629 & 659). Det er sagt at ein rate ikkje er noko anna enn eit spesielt tilfelle for brøk. Vidare er ein vanleg skilnad at ein brøk presenterar ein del av ein heil, medan ein rate representerar ”ein mengde samanlikna med ein anna mengde” (Clark, m.fl., 2003, s. 298-299). Og dette er kjenneteiknet på ein rate kor overeinstemmande element alltid føreheld seg til kvarandre i eit konstant forhold, uavhengig av kor mykje av den originale eininga ein har samla. Lamon hevdar at ein ser eit forhold når ein ser to mengder i ei multiplikativ samanlikning. Eit forhold blir til ein rate når ein person er i stand til å sjå at forholdet kan brukast utanom den spesielle situasjonen kor det vart betrakta og kan tenkje om det som ein karakteristikk av ein heil klasse med varierande mengder (Lamon, 2007, s. 634-635). Ho argumenterar vidare for at ein eleven syner proporsjonalt resonnement når han/ho kan syne forståing av likskapen av passande skalerings forhold og invariansen av det fungerande forholdet mellom to mengder, uavhengig om eleven kan representere desse forholda symbolsk (Lamon, 1993, s. 45).

2.4 Proporsjonalt resonnement

Lamon hevdar at proporsjonalt resonnement spelar ei så viktig rolle i elevars matematiske utvikling at det dannar eit vasskilje, er ein hjørnestein i høgare matematikk og dekkjer alle grunnleggjande omgrep (Lamon, 1993, s. 41). Eg vil i dette kapitlet presentere kva eg legg i proporsjonalt resonnement med å støtte meg til kva forskarar seier om temaet. Dette kjem eg til å bruke i analysen for å vurdere om elevane syner proporsjonalt resonnement.

2.4.1 Proporsjonalt resonnement

Proporsjonalt resonnement referer til det å oppdage, uttrykkje og analysere proporsjonale forhold for så å forklare og argumentere for kva ein gjort. Resonneringa ligg i at ein brukar sunn fornuft, god vurdering, og tankefulle tilnærmingar til å løyse problem, heller enn å trekkje ut tala frå ei tekstoppgåve og blindt bruke lærde algoritmar og reglar (Lamon, 2005, s. 4). Hines og McMahon foreslår at resonnementet er proporsjonalt når det er basert på multiplikative forhold, uavhengig av kva strategi ein vel for å representere ein situasjon eller løyse eit problem (Hines & McMahon, 2005, s. 88). Lamon påpeikar at proporsjonalt resonnement er evna til å skilje ut eit multiplikativt forhold mellom to mengder like så mykje som evna til å utvide det same forholdet til andre par av mengder. Ho seier vidare resonneringa med proporsjonalt resonnement inneheld å kjenne att den konstante raten mellom element av same form og å kjenne att det funksjonelle forholdet mellom målings einingar (Lamon, 2007, s. 638). Vidare sei ho at det å forstå proporsjonalitet er å kjenne att gyldige og ugyldige omformingar av matematiske uttrykk, dei som bevarar forholdet mellom to mengder i tilfellet når mengdene er direkte proporsjonale, eller produktet av mengdene i tilfellet når mengdene har eit omvendt proporsjonalt forhold (Lamon, 2005, s. 7).

Vi skil mellom numerisk proporsjonalt resonnement, som involverer eksplisitte utrekningar, og intuitiv proporsjonal resonnement, som involverer vurdering og kvardagskunnskap.

Numerisk proporsjonalt resonnement er berre mogleg når numeriske verdiar er gjeven, eller når det er mogleg å konkludere med numeriske verdiar og så bruke dei for å løyse oppgåva (Ahl, Colleen, & James, 1992, s. 82-83). Ein elev si resonnering utviklar seg frå intuitiv til additativ, når elevane byrjar å fokusere på skilnaden mellom verdiar for variablar. Vidare utviklar det additative resonnementet seg til mellomsteg, kor elevane bruker repetert addisjon for å løyse proporsjonale problem. Elevane sin resonnering veks frå mellomsteg til det som vert referert til som forhold, når dei brukar eit konstant forhold for å gjere multiplikative samanlikningar i proporsjonale situasjonar (Hines & McMahon, 2005, s. 89). Anghileri hevdar at dobling og halvering er ein strategi elevane brukar uformelt, og at dette kan danne grobotn for å løyse vanskelegare multiplikasjonsstykke (Anghileri, 2006, kap 6). Lamon konkluderar med at ein elev som resonnerer proporsjonalt er i stand til å skilje mellom additive og multiplikative situasjonar og omforme det til eit matematisk utrykk som er passande (Lamon, 2005, s. 7).

2.4.2 Å leggje til rette for utvikling av proporsjonalt resonnement

Eit av dei mest vanlege hinder for barn i møter med proporsjonale oppgåver er å gripe til den additive modell i staden for den multiplikative (Fantini & Gherpelli, 2008, s. 282). Boyer med fleire argumenterar for at elevar har vanskar når dei søkjer numerisk ekvivalens framfor å løyse problemet på grunnlag av proporsjonal likskap. Altså at dei samanliknar talet på mengder framfor å sjå på proporsjonale relasjonar. Vanskane elevar har i møte med proporsjonale forhold kjem når den kunnskapen dei har tileigna seg om å telje for å samanlikne storleikar kjem i vegen for deira intuitive, nære visuelle samanlikning gjennom proporsjonale resonnerings prosessar (Boyer, m.fl., 2008, s. 1478-1488).

Lamon argumenterar for at elevar tilsynelatande ikkje kan byrje å forstå dei funksjonelle og trinnvise forholda rotfesta i ein proporsjon innan dei først ser den multiplikative naturen til situasjonar som involverar ratar og proporsjonar (Lamon, 1993, s. 58). Ho seier at det er kritisk at elevar ser nauda for relative samanlikningar som kjem fram i problema vi gjev dei slik at dei situasjonane kan verke som referentar. Elevane treng ikkje berre å kjenne att den relative samanlikninga som eit alternativ til deira additive syn på verda, men også for å utvikle kriterium for å vurdere kva tilnærming som er passande i ein gjeven situasjon (Lamon, 1993). Ho hevdar vidare at noko som skil dei som resonnerer proporsjonalt frå dei som ikkje gjer det, er at dei byggjer og bruker samansette deler når konteksten foreslår at det er meir effektivt å bruke det enn å bruke enkle deler (Lamon, 2007, s. 644).

Schliemann og Carraher foreslår at i byrjinga kan proporsjonalt resonnement utviklast i ei avgrensa mengd kontekstar om eit spesielt emne. Under dei rett forhold kan likskapar og relasjonar verte avslørt og overføring og generalisering bli mogleg. Denne attkjenninga kan så fungere som ei bru for å overføre prosedyrar til ukjende kontekstar (Schliemann & Carraher, 1992, s. 61 & 70). Om ein då har ein instruksjon som oppmuntrar elevkonstruksjon av proporsjonal tenking kan ein hjelpe elevar å finne den mest effektive strategien for seg sjølve. Medan elevar løyser problem observerar dei mønstre og forhold; dei dannar hypotesar, testar desse, verbaliserer og generaliserar desse mønstra og forholda. Med å utvikle proporsjonal tenking gjennom problembaserte undersøkingar som oppmuntrar til personleg konstruksjon av fleksible tilnærmingar til slik oppgåver, kan elevane finne og danne fornuftige og effektive strategiar til dei gjevne oppgåvene (Ben-Chaim, m.fl., 1998, s. 248 & 263). Med å sjølve oppdage strategiane får elevane eit plutseleg utbrot av forståing, dei ikkje berre brukar strategiane for første gong, men forstår også kvifor den verkar og kva type problem den kan løyse (Siegler & Jenkins, 1989, kap 1).

2.5 Strategi for løysing av proporsjonale problem

I dette kapitlet vil eg klårgjere kva eg legg i omgrepet strategi, og kva som skil det frå ein prosedyre og ei tilnærming.

2.5.1 Avklaring av omgrepet strategi

Siegler og Jenkins definerar ein strategi som ein kvar prosedyre som ikkje er obligatorisk og retta mot eit mål. Det at ein strategi ikkje er obligatorisk er det som skil den frå ein prosedyre, som i motsetnad til ein strategi kan framstå som einaste vegen til eit mål (Siegler & Jenkins, 1989, kap 1). Gjennom heile denne oppgåva vil eg bruke strategi om elevkonstruksjonar, og prosedyre om algoritmar som ein lærar i skulen. Siegler og Jenkins argumenterar vidare for at nye strategiar ikkje oppstår i eit tomrom, men vert konstruert på grunnlag av tidligare strategiar. Ein har ikkje fullt ut konstruert ein strategi før ein kan utvide den til heile viddet av situasjonar kor ein slik strategi er nyttig (Siegler & Jenkins, 1989, kap 1). Om ein strategi for ei oppgåve er så kompleks at det overlastar minnet, vil eleven anten syne reknefeil i bruken av strategien eller gå tilbake til ein enklare strategi med mindre krav for minnet (Moore, Dixon, & Haines, 1991, s. 457).

I faget matematikkens historie skrev eg eit essay om den mest kjende prosedyren som byggjer på proporsjonal tenking i møte med proporsjonale problem, såkalla tretals problem. Regula de tri er bygd på eigenskapen av ekvivalente ratar og er berre bruka for å finne den ukjende verdien. Gjeve t.d. to ekvivalente ratar, a/b og c/x, så finn vi at x=(ad)/c. Slik kryss-multiplikasjon kan bli utvikla med å faktorisere innanfor multiplikasjonstabellen og sjå at dei same fire faktorane er i begge diagonalar. Derfor er produktet av dei to diagonalane i ein forholdstabell identisk, til dømes øvre venstre hjørne x nedre høgre = øvre høgre x nedre venstre.

2.5.2 Elevar sine forklaringar av strategiar

Misailidou og Williams deler elevane sine forklaringar av sine strategiar i fire kategoriar som er relevant for å vurdere utviklinga av deira resonnement (Misailidou & Williams, 2004, s. 323). Den første kategorien er numerisk forklaring kor elevane forklarar det dei har gjort for å finne svaret numerisk utan å grunne det ut frå konteksten. Den andre kategorien er å tilstrekkelige forklaringar som ikkje er multiplikative førestillingar av oppgåva. Forklaringa er definert som tilstrekkelig når eleven koplar det dei har gjort numerisk til kontekstbasert data. Eleven si førestilling av oppgåvekonteksten er definert som ”ikkje- multiplikativ” når det hindrar konstruksjonen av proporsjonale relasjonar. Ein tredje kategori er passande forklaringar og premultiplikative forklaringar. Elevane har grepe oppgåva premultiplikativt når dei kan tenkje relasjonelt om mengder, men enno ikkje proporsjonalt. Det vil seie at jo meir saft ein har i ei blanding, dess sterkare vert blandinga. Den siste kategorien er passande forklaringar som eit resultat av at elevane har grepe oppgåva multiplikativt (Misailidou & Williams, 2004).

I dette avsnittet vil eg vise til kva forskarar har skreve om kor elevar går feil og kvifor. Misailidou og Williams seier at svakare elevar gjerne resonnerer feil, medan sterke elevar heller byggje opp strategien på ein feil måte i oppgåver med vanskelege mengder (Misailidou & Williams, 2003, s. 355). Den mest bruka strategien som ikkje er korrekt i forhold til forhold og proporsjonar er den additive. I denne strategien er relasjonane innanfor forholda utrekna med å trekkje den eine frå den andre, og så er skilnaden bruka på det neste forholdet (Misailidou & Williams, 2003, s. 346). Eit døme er løysing av problem av typen: ”Knut vil måle rommet sitt lyseblått og blandar 6 liter blåmåling med 3 liter kvitmåling for å få riktig farge. Kari tykte rommet til Knut vart så fint at ho vil måle i same farge. Ho finn ut at ho treng 7 liter kvitmåling til sitt rom. Kor mange liter blå måling treng ho om farga skal vere den same?" Sidan skilnaden i blandingsforholdet til Knut er 3 liter vil altså Kari trenge 10 liter blått om ein bruker den additive strategien med å halde fast på skilnaden. Held ein fast på ein konstant sum vil ho trenge 2 liter blått sidan den totale mengda måling er 9 liter. Slik kan ein seie at elevane har "tilstrekkelege" forklaringar, med at dei har funne eit ikkje multiplikativt forhold som dei overfører til neste forhold. Ei slik forklaring høyrer til under den andre kategorien av forklaringar. Misailidou og Williams trekkjer fram at elevar som bruker ein slik strategi kan lære å resonnere proporsjonalt gjennom diskusjon i små "konflikt" grupper. Altså grupper kor tilnærmingane til ei løysing ikkje er i overeinstemming (Misailidou & Williams, 2003, s. 327). Vidare har vi at elevar kan bruke ein strategi eg kallar "å byggje opp" feil. Det involverar at dei brukar ein multiplikativ strategi på problem som ikkje inneheld heiltal og så brukar ein strategien med å ein konstant skilnad for å handtere resten (Misailidou & Williams, 2003, s. 352). Om vi går tilbake til dømet med måling igjen, så vil det seie at ein ser at 6 er det dobbelte av 3, og difor treng ein 12 liter blått om ein brukar 6 liter kvit måling. Og sidan 6+1=7, resonnerar ein med at 12+1=13. Som tidlegare nemnt er det gjerne sterke elevar som tek i bruk denne metoden og dette tydar på at dette kan vere ein metode elevane fell tilbake på når dei handterar vanskelege problem numerisk eller kontekstuelt. Denne metoden er altså ei blanding av multiplikative og additive strategiar, og finn seg slik sett midt mellom to stadium av utvikling, jamfør det eg har skreve tidlegare. Lamon argumenterar for at elevar brukar denne intuitive strategien spontant, og den vil verke i mange situasjonar. Det er likevel eit spørsmål om elevane ser multiplikative relasjonar når dei held fast på å bruke additive strategiar som gjev korrekte svar (Lamon, 2005, s. 100). Ein anna multiplikativ strategi elevane brukar feil er når elevane anten doblar eller halverar, og dette ikkje passer, eit av tala i problemet for å finne svaret. (Misailidou & Williams, 2003, s. 352). Dette heng saman med kva eg har skreve tidlegare om at dobling og halvering er ein naturleg strategi for elevane.

2.5.3 Innanfor og mellomstrategi

Eg vil her presentere to strategiar elevar gjerne brukar, og som heng saman med proporsjonalt resonnement, innanfor og mellomstrategiane. Innanforstrategien er og kalla skaleringstilnærminga. Den fokuserar på endringane mellom same variabel eller rommet vi målar. I ei slik tilnæring samanliknar ein elev kor mange einingar som vart kjøpt i eit tilfelle med kor mange som vart kjøpt i det andre tilfellet, til dømes kor mange gongar meir 24 smultringar er enn 6. Den grunnleggande ideen er at prisen skal vere direkte relatert til mengda einingar ein kjøper. Denne strategien har fordelen av at den bevarar meininga til relasjonane som er involvert i problemet (Schliemann & Carraher, 1992, s. 52 & 57). Lamon viser til at elev brukar denne strategien når han eller ho set opp ei likning mellom to indre forhold og brukar likskapen av skalaroperasjonar for å finne den ukjende (Lamon, 1994, s. 95).

Mellomstrategien, og kalla den funksjonelle tilnærminga, er bygga på forholda mellom variablane. Altså korleis ein variabel varierar som ein funksjon av andre variablar (Schliemann & Carraher, 1992, s. 52). Går vi tilbake til dømet med måling igjen spør vi etter kva vi må gange 3 med for å få 7 og gangar 6 med det vi får og finn svaret. Lamon viser til at ein elev brukar mellomstrategien når han eller ho set opp ei likning med to ytre eller måler opp det som er mellom to forhold og grunner dette med det funksjonelle forholdet mellom målingane for å finne den ukjende (Lamon, 1994, s. 96). Tvete seier at om elevane kunne oppnå ei god forståing og ein sikker praktisering av desse to strategiane så ville dei ha to metodar for å løyse eitkvart 4-talsproblem, og spesielt dei situasjonane kor eit av tala er lik 1, som svarar til dei vanlige multiplikasjons- og divisjonstekstoppgåver (Tvete, 2006, s. 49).

2.6 Å hjelpe elevane å oppdage, utvikle og klårgjere sine strategiar

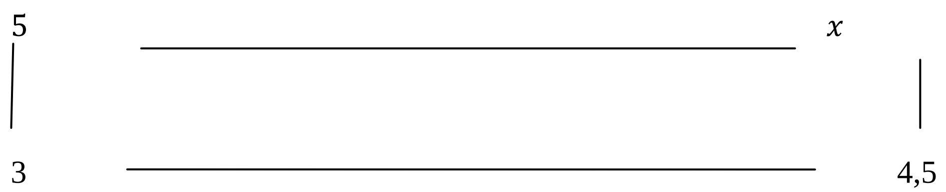
Brekke seier at det er ikkje på det reknetekniske sida problemet ligg hjå elevane Han seier at det som er vanskeleg for elevane er å kjenne att dei proporsjonale samanhengane for så å kunne uttrykkje desse i ein modell (Brekke, 2001, s. 71). I dette kapitlet vil eg vise tilnærmingar forskarar har skreve om for å hjelpe elevane til nettopp dette.

2.6.1 Unitizing

Unitizing referar til prosessen av å konstruere ein mengde i deler når ein tenkjer på ei vare (Lamon, 2002, s. 80). Til dømes vil 24 Cola gje ganske ulike bilete. Nokre vil kanskje tenkje på 24 enkle flasker, andre 4 sekspakningar eller 6 firepakningar, 2 med 12 eller 3 med åtte i kvar. Det er dette Lamon skildrar som unitizing, noko ho seier er ein subjektiv prosess (Lamon, 2005, s. 78). Ho hevdar at barn deler opp informasjon dei møter til vanleg i delar som er enkle for dei å tenkje kring. Ho argumenterar vidare for at ein bør bruke deira vidd i måtar å dele på for å fremje fleksibilitet og nytte for eigen kunnskap, jamfør det eg har skreve tidlegare under læringsteori. Ho foreslår at ein bør oppmuntre til fleksibel gruppering sidan barn brukar unitizing før dei lærer å gå vegen om ein. Ein av styrkane til unitizing er at det byggjer på målingsomgrep som barn kjenner att. Vidare hevdar Lamon at å bruke unitizing for å resonnere opp eller ned erstattar behovet for reglar for å danne fellesbrøk like så mykje som å redusere til mindre brøkar. Slik kan ein leggje eit grunnlag for proporsjonalt resonnement. Unitizing fremjar ein brøk som eit tal, det vil seie at mengda er konstant, uavhengig av storleiken på delen (Lamon, 2002, s. 79-81). Eg brukar omgrepet *unitizing* til å gjelde både det å finne ein felles faktor for samanlikning, eller eit felles multiplum. Vidare samanliknar Lamon ein elev som kan tenkje fleksibelt med ein som berre kan gjere ting på ein måte. Ho argumenterar for at om vi ynskjer at elevane skal utvikle deira evne til å resonnere, framfor å blindt bruke ein lærd algoritme, nyttar det ikkje øve dei i å finne prisen for ein eining. Ein som tenkjer fleksibelt kan velje eller tilpasse den beste strategien å gjere ting på. Ho viser til at for elevar kan utvikle fleksibilitet i situasjonar som ved samanlikning av proporsjonale forhold, må ein oppmuntre å finne fleire strategiar og diskutere kva strategiar som er enklare, raskare og meir fornuftig (Lamon, 2005, s. 80-81)

2.6.2 Doble Tal linjer

Bruk av doble tal linjer er noko som fleire har kome med som ein mogleg veg å gå for at elevane skal skjøne kva dei gjer i kryssmultiplikasjon og forstå det proporsjonale samanhengane i det dei gjer. Når ein bruker doble tal linjer får ein eit visuelt bilete av det konstante forholdet mellom tala, sidan det mest ser ut som eit rektangel kor kvart hjørne har ein verdi. I ein slik modell er forholdet horisontalt og vertikalt konstant. Lat oss gå tilbake til dømet med samanlikning av rektangla, men no med to formlike kor kortsida er 4,5 og langsida ukjend. Vi set opp:



Vi kan altså anten finne forholdet mellom sidene 3 og 5 og så bruke dette forholdet mellom 4,5 og x. Eller vi kan finne forholdet mellom kortsidene, mellom 3 og 4,5 og bruke dette på forholdet mellom 5 og x. Eller vi kan gå til dømet med måling. Brukar vi då innanforstrategien finn vi først forholdet mellom talet på kvite målingsboksar og overførar dette til boksane med blå måling. Eller så finn vi forholdet mellom målingane, og brukar dette for å finne x. I dette dømet er det enklast å bruke mellomstrategien, sidan det inneberar dobling.

For at elevane skal kunne bruke doble tal linjer effektivt, treng dei å forstå omgrepet linjeform. Altså at blandinga blir den same kva mykje måling vi har til å byrje med, så lenge forholdet er det same (Moore, m.fl., 1991, s. 444). Ein anna fordel med eit slikt arbeid er at elevane vil finne likeverdige brøker, noko som kan gjere dei trygge i å handtere brøk sidan dei øvast i likskap og orden. Det siste er at vidda av praktisk bruk av doble tal linjer er vidstrakt (Smith, 2002, s. 9).

2.6.3 Forholdstabell

Ein anna framstillingsmåte som minner mykje om doble tal linjer, og kan hjelpe elevane til å resonnere proporsjonalt er ein forholdstabell. Ein forholdstabell er vertikale eller horisontale format som syner resultatet av repetert samordna auking av eit grunnleggande forhold (Fuson & Abrahamson, 2005, s. 216). Då bruker ein brøkane a/b og c/d for å avgjere om (a,b) og (c,d) er proporsjonale. Igjen er dette ein framstillingsmåte som er enklast å bruke når ein har tre kjende og skal finne ein ukjend, men den er og høgst anvendeleg når ein skal samanlikne forhold. Tabellen er slik

a	c
b	d

Ut frå ein slik tabell kan ein finne ein proporsjon frå kva som helst rad og kolonne i tabellen. Ein brukar tabellen for å framheve forholdet mellom mengdene som er involvert for å identifisere samanhengande par (Fantini & Gherpelli, 2008, s. 283). Ut frå tabellen kan ein finne ein ukjend med å tenkje over kva rad og kva kolonne som dannar den proporsjonen. Då er den ukjende ei tom celle, og ein har berre tre verdiar inni tabellen, og så set ein opp forholdet på utsida av tabellen. Då har ein seks tilnærmingar som gjev ei løysing for kvar tabell. Ein kan finne forholdet mellom a og b og bruke det på c og d eller ein kan finne forholdet mellom a og c og bruke det på b og d. Med båe desse tilnærmingane kan ein gå begge veger, sidan det ikkje speler noko rolle kor vi byrjar. Ein kan og bruke kryssmultiplikasjon med å bruke diagonalen og ha forskjellige tomme celler for å sjå at denne strukturen tillet ein til å finne ein ukjend med å multiplisere dei to kjende tala på ein diagonal og dividere med det talet som er på same diagonal som det ukjende. Multiplikasjonstabell er allereie mykje bruka for å syne produkta av faktorane 1 til 10. Ein kan danne ein forholdstabell med å bruke eit grunnleggande forhold frå desse tala med å setje trekkje ut to kolonnar frå multiplikasjonstabellen og setje dei saman. For barn som forstår strukturen av multiplikasjonstabellen som kolonnar danna med gjenteken addisjon av same tal, kan det å danne ein forholdstabell med to kolonnar frå multiplikasjonstabellen forenkle forståing av forholdstabellen (Fuson & Abrahamson, 2005, s. 219 & 231).

Lamon seier at ein strategi ikkje kan bli lært bort direkte. Ein slik forholdstabell er elevane sine individuelle konstruksjonar som hjelper dei å hugse deira personlege tanke. Men når læraren modellerar effektive prosessar eller elevane diskuterar deira strategiar i klassen kan andre sjå fordelen av snarvegar og hopp og innlemme nokre av desse strategiane i deira eige arbeid, jamfør det eg har skreve om syn på kunnskap i sosial konstruktivismen. Alle tilnærmingar for å lære forhold og proporsjonar treng å hjelpe elevane til å bruke og forstå forholdstabell og andre format for å representere og løyse proporsjonar (Lamon, 2005, s. 105). Fuson og Abrahamson seier at dei to strategiane, innanfor og mellom, grunna i ein forholdstabell eller doble tal linjer er generelle nok til å bli bruka med alle tal som har eit algebraisk uttrykk. Om ein løyser det same problemet på alle tre måtar kan ein sjå forholdet mellom multiplikasjons- og divisjonstuttrykk i kvar strategi (Fuson & Abrahamson, 2005, s. 231). Sjølv om ein opnar opp for at elevane får danne sine strategiar sjølve må elevane få vere i læringsmiljø kor heilskapen i problem, aktivitet, kontekst, diskusjon og stimulering og tydeleg rolle hjå læraren er til stades for at dette skal skje (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003, s. 16).

3. 3. Metode

I dette kapitlet vil eg presentere metodane eg har bruke i mi forsking. Eg har gjennomført eit *kvalitativt kasusstudium* med sosial- fenomenologisk tilnærming, kor eg fylgde nokre elevar gjennom fleire oppgåver dei gjennomførte med proporsjonalitet. Eg samla inn data ved hjelp av videoobservasjon og lydopptak. Som analyse har eg støtta meg på analysemetoden i *grunngjeve teori* (Cohen, Manion, & Morrison, 2007b; Postholm, 2010) og *tjukke skildringar.*

3.1 Skulen, elevane og læraren

Eg har vore på ein norsk 1-10 skule, kor eg var inne i 7. klasse og gjennomførte eit matematikkopplegg med 5 forskjellige aktivitetar over ein periode på 2 veker. Skulen har ein klasse per trinn, med om lag 17 elevar i snitt. Skulen er ikkje ein praksisskule, og er difor ikkje vande med studentgrupper. Skulen har ekstra oppfølging av elevar som treng det, som får tettare oppfølging av ekstralærar. Elevane er vande med at det er ein lærar som underviser i klasserommet.

Eg var i klasserommet om hausten i veke 40 og 42. Elevane hadde haustferie i mellom desse to vekene. Elevane hadde ikkje arbeidd med proporsjonalitet som tema tidligare, men som læraren påpeika hadde dei kunnskapen dei trong til å løyse oppgåvene dei møtte. Eg valde å fylgje ei gruppe på 9 elevar, dei har fått dekknamna Rut, Peter, Jakob, Johannes, Andreas, Rakel, Lea, Ruben og Benjamin. Dette er ein noko gjennomsnitteleg gruppe, kor nokre er ganske sterke i matematikk og har stor tru på seg sjølve, andre noko svakare og gjev lettare opp, nokre er veldig aktive og sterke munnleg, medan andre er meir stille. Læraren har mykje erfaring og undervisar også 10 klasse ved den same skulen. Ho har fått pseudonymet Elisabet.

Datainnsamlinga består av video og lydopptak frå timane, samt det skriftlege materialet som elevane leverte inn. Første dag gjekk eg ikring og filma elevane, ettersom dei forklarte korleis dei gjekk fram. Sidan eg ikkje hadde tillating til å filme Benjamin, har eg ikkje med noko opptak kor andletet hans synast. Den andre dagen sette eg saman klassa på ein slik måte at kamera berre var vendt mot fokusgruppa, med elevar eg hadde tillating til å filme i bakgrunnen. Resten av klassa kan høyrast, men ikkje sjåast på opptaket. Videoopptaka har vorte transkribert, nokre gonger med støtte frå lydopptak. Transkripsjonen vart gjort på nynorsk for å gjere utsegna lettare å forstå, samt å styrke dei i å vere anonyme. Dette var viktig for meg, sidan fleire av elevane ikkje har norske foreldre, og svakare språk.

3.2 Gjennomføring

Formålet med studiet er å undersøkje korleis ei gruppe elevar møter opne, kontekstbaserte, oppgåver med samanlikning av proporsjonale forhold. Vidare korleis ein kan bruke desse erfaringane i vidare arbeid for å leie elevane inn i proporsjonalt resonnement. For å kunne svare på dette spørsmålet gjekk eg gjennom undersøkinga i fleire fasar. Først fann eg oppgåver som samsvarte med mitt forskingsspørsmål, for å kunne finne data som kunne gje svar på mi undersøking. Så fann eg ut kva trinn eg ynskja å gå inn for å samle data til mi forsking. Eg valde 7 trinn sidan det er eit år kor overgangen til proporsjonal resonnement er mogleg. Singer og Resnick argumenterar for at elevane på dette trinnet tenkjer relasjonelt kring oppgåver med proporsjonar, men dei har enno ikkje meistra å sjå dei multiplikative forholda som er naudsynt for å forstå proporsjonalitet (Singer & Resnick, 1992, s. 234). Før elevane fekk oppgåvene gjekk eg og læraren gjennom korleis vi kunne setje saman klassa i par. Ut frå kva tilnærmingar desse elevane hadde til oppgåvene, velde eg ut kva par som skulle setjast saman i grupper på 4 elevar. Fokusgruppa vart velt ut av di dei hadde dei mest vanlege tilnærmingane, samt at dei var munnleg aktive. Til slutt fekk mine fokuselevar gjennomføre ei tilleggsoppgåve med etterfølgjande intervju. Eg valde gruppeintervju, fordi elevane hadde felles erfaringar slik at dei kunne hjelpe kvarandre med å skildre desse.

3.3 Om val av metode

Eg velde kasusstudium fordi kasusstudium undersøkjer det komplekse samspelet med hendingar og menneskelege relasjonar og andre faktorar i eit unikt tilfelle. Eg ville sjå korleis elevane møtte ei kontekstbasert, open, oppgåve om samanlikning av proporsjonale forhold. Dette fell naturleg saman med eit kasusstudium, for, som Cohen påpeiker, ynskjer eit kasusstudium å skildre korleis det er å vere i ein spesiell situasjon. Å fange opp deltakarene sine erfaringar, tankar ikring og kjensler for ein situasjon (Cohen, Manion, & Morrison, 2007a, s. 253 & 254).

Eit kasusstudium er definert som utforsking av eit bunde system, som både er bunden av tid og sted. Det vil seie ei undersøking av menneskelege og sosiale prosessar i deira naturlege setting. Eg ynskjer med studiet å la lesaren ta del i noko som kan vere til hjelp for å utvikle ein tankereiskap for utvikling av ein lærar sin praksis i klasserommet. Dette er noko Postholm kallar for indre kasusstudie (Postholm, 2010, s. 50 & 52). I kvalitativ forsking prøver ein å forstå heilskapen i det ein observerer. Ein ser på fenomenet som eit kompleks system meir enn samansettinga av enkeltdelar. For å kunne forstå og tolke det ein observer, er skildring og forståing av elevane sitt sosiale miljø og heile konteksten naudsynt (Vedeler, 2000, s. 71).

3.3.1 Kvalitativ metode

I tråd med kva Postholm skriv var mi rolle som forskar klårt kvalitativ av di det vart oppretta eit nært forhold av samarbeid mellom meg og dei personane som sto i fokus for forskinga. Elevane sitt arbeid, sine resonneringar og utsegn var det som var i fokus, og dette er og eit kjenneteikn på kvalitativ forsking. At deltakarane er dei som skapar røynda. Og sidan eg ser på korleis elevane utviklar meining i ein sosial interaksjon, ved å diskutere sine eigne tilnærmingar til oppgåva, har studiet ei sosial- fenomenologisk tilnærming. (Postholm, 2010, s. 34,41 & 42). For at elevane skal utvikle meining, er det viktig at elevane oppfattar konteksten oppgåva er sett inn i. Mercer påpeiker nettopp at kontekst er det elevane finn relevant. Han seier vidare at elevar gjennomfører undervisningsaktivitetar med å bruke det dei veit til å danne meining i kva dei er spurde om å gjere (Mercer, 1992, s. 32).

Innanfor tradisjonane av forsking som ser på menneskjer, er det den fortolkande tradisjonen som samstemmer best med mi forsking. Innanfor denne tradisjonen er forskaren oppteken av å forstå personane sine handlingar, og få tak i deira perspektiv. Ein prøver å observere utan å gripe inn. Til tross for at eg var deltakande observatør, er det tolkinga av data som er det viktigaste innanfor fortolkande teori.(Postholm, 2010, s. 75) Og det er nettopp det eg forskar på, korleis elevane møter oppgåvene eg gav dei.

3.3.2 Metode for datainnsamling

Observasjon som datainnsamling vil seie at ein ynskjer å sjå kva menneskjer gjer i ulike settingar og situasjonar. Ein registrerer personar og grupper si åtferd i den konteksten som dei er i. Eg observerte korleis elevane si åtferd i møte med forskjellige matematikkoppgåver, og då særleg kva språk dei bruka seg imellom, og ovanfor meg som lærar.

Eg valde å ha ein deltakande observasjon i mi datainnsamling. Dette innebar at eg blanda meg inn i situasjonar, og spurte elevane etter deira forklaringar. Stod dei fast stilte eg spørsmål for å utdjupe kva dei tenkte og slik få dei tilbake på sporet dei hadde. Slik fekk eg ei rolle som både lærar og forskar samstundes. Eg valde denne observasjonsmetoden av di eg hadde lest mykje om proporsjonalitet og var ikkje så bunde av opplegget som læraren ville ha vore. Ein anna grunn var og at læraren i samtale i forkant uttrykte at ho ikkje trudde elevane kunne komme fram til noko anna form for løysing enn å gå om ein.

I mi datainnsamling bruka eg både video og opptak av lyd. Ei ulempe med båe er at noko av fokuset til elevane kan rettast mot kamera eller lydopptakaren. Allikevel har båe så store fordelar at eg valde å bruke dei. Det innebar at eg kunne gå til ei anna gruppe og likevel få data frå fokusgruppa, og nettopp fordi det var deira tilnærmingar eg var interessert i var dette ei stor fordel. Når elevane pratar om matematikk, kan deira åtferd og fakter vere støtte det dei seier. Elevane skulle og presentere si tilnærming som ein plakat, og denne presentasjonen ville eg ha tak i, og difor valde eg å bruke video.

3.4 Data

Data eg samla inn består av video- og lydopptak, elevarbeid, eigne notat og tilbakemelding frå læraren. Det eg har av data som eg har teke utgangspunkt i under analysen, er henta frå dei to første øktene til elevane i møte med oppgåvene eg gav dei. I den første økta fekk elevane om lag 45 min å arbeide av di noko tid gjekk med på å presentere meg som forskar og opplegget elevane skulle gjennom. I den andre økta, som var på totalt 45 min av di elevane fekk gå tidlegare den dagen, fekk elevane 15 min til diskusjon i grupper før eg styrte dei inn på ein diskusjon i heil klasse. Denne gjekk føre seg i om lag 20 min. Dei resterande 10 minutta gjekk til å gjere klart i forkant av diskusjon og rydding før elevane fekk gå heim. I tillegg ligg eit intervju med elevane om deira erfaringar med opplegget til grunn for analysen. Sidan eg ville sjå korleis elevane møter ei open, kontekstbasert, oppgåve med samanlikning av proporsjonale forhold, er det naturleg å ta med dei to øktene. Intervjuet er med for å la elevane sjølve komme med sine tankar.

3.5 Analysemetode

I mi oppgåve hadde eg mykje som tilsynelatande kunne verke likt. Difor trong eg ein reiskap for å finne noko konkret som band datamaterialet mitt saman, og som kunne syne samanheng i resonnementet eg syna å spore hjå elevane. Sjølv om mi forsking ikkje er " grounded theory" (Cohen, m.fl., 2007b), på norsk grunngjeve teori, så velde eg å bruke ein teknikk for å arbeide mitt datamaterialet som støtter seg på denne, for å analysere mi oppgåve. I tillegg til grunngjeve teori, har eg analysert ved hjelp av tjukke skildringar (Postholm, 2010, s. 51). Eg skal no gå nærare inn på som ligg i omgrepa grunngjeve teori og tjukke skildringar slik eg har bruka det i mi oppgåve.

3.5.1 Grunngjeve teori (grounded theory)

Grunngjeve teori er ein eigen metodeteori som kor teorien heller spring ut frå data enn omvendt. I dette ligg det at forskaren ikkje startar forskinga si forsøka sine med ein teori i tankane, men at han heller skal starte med forskingsområdet sitt og late teorien komme fram frå datamaterialet. Framfor at ein definerar teorien på førehand og testar denne let ein altså teorien bryte fram ut frå materialet ein samlar og analyserer. Dette går føre seg i ein induktiv prosess kor alt er heilskapeleg og kor mønstre i datamaterialet kjem fram av seg sjølve heller enn at forskaren mønstrar dei (Cohen, m.fl., 2007b, s. 490 & 491). Postholm seier at ein reindyrka grunngjeve teori er fullstendig induktiv, noko som inneberar at forskaren prøver å legge til side eigne subjektive, individuelle teoriar, for slik å la datamaterialet tale for seg sjølve utan at forskarens eigne perspektiv påverkar teorien som utviklast på grunnlag av materialet. Sjølv om det å legge heilt til side sine eigne, individuelle teoriar i praksis er umogleg argumenterer ho for at ein slik framgangsmåte kan hjelpe forskaren til å vere medviten om sine eigne fordommar, synspunkt og antakingar angåande fenomenet det forskas på slik at forskaren kan møte det med eit så ope sinn som mogleg (Postholm, 2010, s. 87).

Grunngjeve teori er ein heil metodeteori som skildrar korleis ein kan samle inn data, og analysere disse. Og nettopp analysemetoden er det eg har teke i bruk, og som difor er mest sentral. Analysestrategiane i grunngjeve teori har vore meg til stor hjelp som reiskapar for analyse og til å forstå det eg har av data. Postholm hevdar at ein kan bruke analysemetoden innanfor grunngjeve teori i alle kvalitative studiar kor koding og kategorisering av datamaterialet blir vesentleg i arbeidet med analysen (Postholm, 2010, s. 87-88)

Det eg har teke i bruk frå grunngjeve teoris analyse av data, er kategoriseringa. Ein finn teoriar i datamaterialet ved hjelp av kategoriseringsprosessen. Postholm seier at forskarens oppgåve er å finne hendingar, handlingar og uttalingar som liknar kvarandre. Desse samlar ein innanfor ein og same kategori, slik at det som passar saman blir putta i ein kategori som ein representasjon for eit einsarta materiale (Postholm, 2010, s. 97). Ho viser til at den eininga som er utgangspunktet for å danne kategori må sørgje for relevant informasjon til studiet og inspirere lesaren til å tenkje ut over den informasjonsdelen som kan stå åleine. Ein slik eining må vere den minste informasjonsdelen som kan stå åleine. Det medfører at det er mogleg å tolke den i fråvær av anna informasjon enn forståinga av konteksten som undersøkinga har funne stad. I prosessen med å kategorisere søkjer ein etter mønstre i datamaterialet, ein variabel som står for det meste av datamaterialet. Ho seier vidare at det viktigaste er å gje ein kategori eit namn, slik at forskaren kan hugse det, tenkje kring det og byrje å utvikle kategorien analytisk. Kategoriane kan få namn ut frå forskarens teoribakgrunn, men og ut frå ord og uttrykk forskingsdeltakarane sjølv brukar (Postholm, 2010, s. 87-88). Eg har valt å kategorisere for å kunne samanlikne tilnærmingane til elevane, både når dei arbeide i par og i grupper.

Det er datamaterialet som er grunnlaget for kategoriseringa, som skal syne koplingar mellom delar ein analyserar. Postholm viser til at analyse som er tufta på koding og kategorisering kallast for deskriptiv analyse. I ein slik analyse blir datamaterialet redusert, slik at lesaren lettare kan få oversikt og forstå datamaterialet. Det er viktig å merkje seg at forskaren gjerne går fram og tilbake i kodingsprosessen, og kategoriserar på nytt att. I grunngjeve teori består kodinga av tre fasar, open koding, aksial koding og selektiv koding (Postholm, 2010, s. 88). Cohen m.fl. foreslår at kodar kan vere skildrande og kan i inkludere situasjonskodar; perspektiv elevane har, måtar å tenkje på kring eit objekt, prosesskodar, aktivitetskodar, hending kodar, strategi kodar, relasjon og sosiale kodar, metode kodar (Cohen, m.fl., 2007b, s. 478).

Open koding involverar utforsking av data og identifisering av deler for analyse for å kode meining, kjensler, handlingar, hendingar og frametter. I denne fasen bryt ein materialet ned i små bitar som ein gjennom nøye gjennomgang samanliknar for ulikskapar og likskapar. Materialet vert gjeve eit namn, ein kode (Cohen, m.fl., 2007b, s. 493). I denne prosessen stiller ein seg opne spørsmål og samanliknar dei ulike delane av datamaterialet. Spørsmåla kan vere kor, kva, korleis, kvifor og liknande. Så snart dei ulike fenomen er identifisert i datamaterialet, kan forskaren byrje å gruppere omgrepa som dei er klassifisert under. Dette bør gjerast for å redusere talet på einingar som forskaren må jobbe vidare med. Den prosessen som består i å samle grupper av omgrep som ser ut til å dekkje dei same fenomen, kallast kategorisering (Postholm, 2010, s. 88).

Aksial koding er den delen kor ein søkjer å danne koplingar mellom kategoriane og kodane. Ein set dei ulike kategoriane i samanheng med kvarandre (Cohen, m.fl., 2007b, s. 493-494). I denne prosessen blir kategoriar relatert til sine underkategoriar slik at forklaringane av fenomenet blir meir presis og fullstendig. Målet er å spesifisere ein kategori eller eit fenomen ved hjelp av ulike forhold som skapar dei. Kategorien står som nemnt for eit fenomen eller ein eining som mest talar for seg sjølve. Ein underkategori står ikkje for fenomenet, men søkjer å svare på spørsmål om når, kvifor, og under kva forhold kategorien dukka opp. I den aksiale kodinga vil kva som er kategoriar og underkategoriar kome fram, medan ein heile tida stiller spørsmål for å finne samanheng og relasjon mellom kategoriane (Postholm, 2010, s. 89-90)

I *selektiv koding* vert ein kjernekode identifisert. Vidare blir forholdet mellom kjernekoda og andre kodar gjort tydelege og kodeskjemaet samanlikna med eksisterande teori. Denne kjernekoda står for det meste av datamaterialet og kor hovudfokuset er lagt (Cohen, m.fl., 2007b, s. 493-494). På ein overdriven måte består kjernekoda av alle analyseprodukta samla i nokre få ord. Den forbind alle andre kategoriar slik at ein heilskap vert danna. I denne prosessen søkjer ein å skildre og syne korleis alle kategoriane er bunde saman med kjernekoda. Ein søkjer å forklare strategiar, kontekst og konsekvensar som har vorte identifisert i den aksiale kodinga.

3.5.2 Tjukke skildringar

Sidan eg ynskja å sjå korleis elevane uttrykte meining og kva opplevingar dei hadde av møte med oppgåvene er det viktig å forsøkje å presentere forskingsdeltakarane sine oppfatningar. Då kan lesaren erfare ein samanheng mellom eigen situasjon og situasjonen. Når ein går i djupna på situasjonen som er fokus for analyse og forsøkjer å skildre det så nært røynda som mogleg bruker ein gjerne tjukke skildringar (Postholm, 2010, s. 51). Slike tjukke skildringar er gjerne rike på detaljar, nyansar og variasjonar.

I kvalitative studie brukar ein *tjukke skildringar* for at lesaren skal kunne kjenne seg att i situasjonen, for å kunne tolke og analysere det som skildras. For meg har det vore viktig å sjå korleis elevane forklarar sin tilnærming, og korleis dei har søkt å finne ulikskapar og likskap i tilnærmingane til kvarandre i gruppediskusjon. *Tjukke skildringar* er gjerne farga av forskaren, og består difor av ein grad av tolking. Dette vil særleg gjeldane i mi analyse kor eg søkjer å finne kva elevane legg i ytringane sine. *Tjukke skildringar* og ordrette gjengevne sitat er kjenneteikn ved alle kvalitative studiar og vil vere ein viktig del av mi analyse.

4. 4. Analyse

I dette kapitlet presenter eg mine data og ein analyse av desse. Innleiingsvis visast det korleis eg samla inn data. Eg fylgde eit undervisningsopplegg utvikla av Fosnot, organisert i form av individuelt, par og gruppearbeid, og diskusjon i heil klasse. Eg valte å følgje dette opplegget av di både oppgåva og opplegget gjorde det mogleg å svare på mitt forskingsspørsmål. For nærare analyse har eg valt å ta utgangspunkt i elevane sine ytringar i dei forskjellige fasane av situasjonen. Eg har sett på korleis elevane skriftleg og munnleg forklarar sine tilnærmingar for å finne ei løysing av oppgåva. Språk og strategiar har eg kategorisert ved hjelp av grunngjeve teori (Cohen, m.fl., 2007b, s. 493). Dei endelege kategoriane har eg bruka for å samanlikne elevane sine tilnærmingar som grobotn for proporsjonalt resonnement. Desse kategoriane vil eg gå grundig gjennom. Vidare diskuterar eg korleis elevane syner spirande proporsjonalt resonnement og forståing kring forhold. Avslutningsvis vil eg vise korleis ein kan leggje til rette for at elevane får utvikla sine strategiar.

4.1 Data

Datamaterialet eg har teke utgangspunkt i, er henta frå 7 trinn på ein norsk barneskule. Elevane arbeida med kontekstbaserte, opne oppgåver kor dei skulle samanlikne proporsjonale forhold. Elevane eg har velt å taka med i analysen er ei gruppe på 9 elever, kor 3 også vert sett saman i gruppe for diskusjon, sjå kapitel 3, under delkapitlet om elevane. Dei 9 er velt ut på grunnlag av deira ytringar som er verd å analysere, dei 3 i fokusgruppa er velt ut av ulike omsyn. Elevane har fått pseudonyma Rut, Johannes, Jakop, Peter, Andreas, Rakel, Lea, Ruben og Benjamin. Når eg satt saman elevar i gruppe, var det på grunnlag av strategiane dei hadde bruka, slik at det var ulike strategiar som var grunnlag for diskusjon. Sidan det var fleire elevar eg diverre ikkje fekk lov til å filme, velde eg å filme Rut, Jakob og Johannes. Dette av di dei i følgje læraren var engasjerte og munnleg aktive, og av di den andre gruppa eg hadde moglegheit til å fylgje, med Ruben, Rakel og Lea bestod av to aktive gutar, og ei jente som berre hadde budd i Noreg i 2 månader. Av dei fem første var alle utanom Jakob og saman som gruppe den siste økta kor elevane arbeidde med ei anna oppgåve. Denne siste økta vart avslutta med eit gruppeintervju kor elevane fekk uttrykke sine erfaringar om opplegget. Verken den avsluttande økta eller intervju vil vere ein del av analysen, men eg vil vise til ytringar frå intervjuet under konklusjonen for å støtte det eg legg fram i analysen.

Den første dagen fekk elevane utdelt oppgåva, og vart sett saman i par for å løyse oppgåva. Elevane skulle finne ut kva butikk som ha best tilbod på kattemat og så lage ein plakat som synte korleis dei hadde gått fram. Den andre dagen vart elevane sett saman i grupper på fire ut frå kva tilnærming dei hadde bruka, og økta vart avslutta med ein diskusjon i heil klasse om strategiane elevane hadde funne. Transkripsjonane er merka under kategoriane. I fortsettinga av diskusjonen i fokusgruppa kjem diskusjonen i heil klasse, og ytringane vil vere nummeret ut frå dette.

4.2 A priori analyse

Før eg gjekk inn i klasserommet hadde eg lese meg opp på kva proporsjonale oppgåver er for noko. Eg valte å fylgje eit opplegg utforma av Catherine Twomey Fosnot som ho har laga for å støtte utviklinga av viktige idear relatert til proporsjonal resonnement, brøk, og likeverdigheit (Fosnot & Jacob, 2007, s. 13). Oppgåva er lagt ved som vedlegg. Eg valte å fylgje dette opplegget framfor å bruke tid på utvikle eigne oppgåver når eg såg at dette kunne gje med svar på mitt forskingsspørsmål. I dette opplegget skal læraren først introdusere problemet, lata elevane dele sine tankar og diskutere konteksten, og så oppmuntre elevane til å utforske kva butikk som har best tilbod. Medan elevane arbeider skal læraren gå ikring og oppmuntre for proporsjonalt resonnement og halde elevane grunna i konteksten for å kunne hjelpe dei å forstå kva tala representerar. Fosnot argumenterar for at tala i oppgåva er nøye utvalt for å støtte utviklinga av proporsjonalt resonnement. Ho påpeiker at sjølv om elevane kan dele for å finne prisen av ein boks kattemat, opnar tala opp for ein variasjon i tilnærmingar som alle er grunna på proporsjonalt resonnement. Ho skriv vidare at plakatane skal innehalde klåre presentasjonar av dei viktige idane og strategiane elevane ynskjer å presentere. Elevane må gjerast klår over at plakatane skal brukast i diskusjonar i små grupper. Dei må forklarast at dei skal dele deira arbeid med kvarandre, og undersøkje kvarandre sine tilnærmingar og strategiar. Blant anna med å stille spørsmål. Ho argumenterar vidare for at ein skal bruke ein forholdstabell for å representere elevane sitt proporsjonale resonnement, samstundes som ein oppmuntrar elevane til å reflektere over korleis ein kan bruke forholdstabellen for å finne tal som ikkje er der allereie (Fosnot & Jacob, 2007, s. 13-18).

Slik eg les det støtter Fosnot opp om korleis ein japansk undervisningstime er. Ein japansk undervisningstime i matematikk er i 5 fasar. I den første fasen, *Hatsumon*, introduserar læraren eit ope problem. Som eg har skreve tidlegare er ei open oppgåve slik at det opnar opp for at elevane kan sjølve velje sine eigne tilnærmingar. I dette ligg det at prosessen, måten å komme fram til svaret, og ikkje sjølve svaret det som gjer ei oppgåve open. Elevane si aktivitet er open men det inkluderer at elevane skal kunne demonstrere si tilnærming eller forklare korleis dei har resonnert, sjølv om dei kan kome med forskjellige argument for å støtte si tilnærming. Slik kan opne oppgåver gje eit rikt bilete om elevane sin kunnskap (Moskal & Magone, 2002). Den neste fasen i ein japansk undervisningstime er *Kikan-shido* kor elevane arbeider individuelt med problemet –medan læraren sirkulerar for å observere arbeidet og identifisere forskjellige tilnærmingar, og klårgjere problemet om naudsynt. Så går ein over til *Takuto* kor læraren spør elevane til å presentere deira løysingar eller idear for *hatsumon* for heile klassa, samstundes som han sørgjer for at forskjellige idear kjem og blir forstått av elevane. Vidare går ein over til *Neriage* som er ein diskusjon av validiteten og relevansen av dei foreslegne ideane, stort sett basert på elevane sitt bidrag, men nokre gonger også lærarens vurdering. Avslutningsfasen er *Matome* kor læraren summerar hovudpoenga frå timen, nokre gonger med å peike på eller omformulere dei beste eller nye metodane som vart funne. Poenget med ein slik time er at elevane utviklar og uttrykkjer forskjellige strategiar for å løyse problemet og reflekterer kring deira eigne idear med å søkje å forstå ideane til dei andre (Miyakawa & Winsløw, 2009).

Dixon argumenterar for at å løyse ei open oppgåve som involverar å tolke eit kontekstbasert rikt problem kan vere særleg nyttig (Dixon, 2005). Og som eg har skreve tidlegare er nettopp handel ein av dei mest truverdige kontekstar kor vi møtar proporsjonalitet nettopp i handel gjennom tilbod. Og med å diskutere konteksten før elevane får setje i gang med å løyse oppgåva, aukar ein og sjansen for at dei både kan bruke meir av den intuitive resonneringa si, samt at ein opnar opp for at elevane kan førestille seg oppgåva multiplikativt.

I følgje sosialkonstruktivismen skjer læring i ein sosial prosess, jamfør kva eg har skreve i teorikapitlet. Som eg har skreve opnar oppgåver kor elevane både er forventa å offentleg uttrykkje si tenking, forklare og forsvare sitt resonnement, opp for at læring kan skje. Gjennom at elevane får lytte til kvarandre sine tilnæringar, blir deira eigne tilnærmingar klårare for dei sjølve, samstundes som dei vert utfordra over si eiga tenking og kan endre sin eigen kunnskap. Med å sjølve oppdage strategiane får elevane eit plutseleg utbrot av forståing, dei ikkje berre brukar strategiane for første gong, men forstår også kvifor den verkar og kva type problem den kan løyse (Siegler & Jenkins, 1989, Kap 1). Altså opnar dette opplegget ikkje berre opp for at elevane får utvikle eigne strategiar, det gjer og at dei må diskutere det for kvarandre og kunne presentere det for kvarandre. Slik kan ein få eit bilete om læring har skjedd. Ben-Chaim m.fl. hevdar at instruksjon som oppmuntrar elevkonstruksjon av proporsjonal tenking kan hjelpe elevar å finne den mest effektive strategien for seg sjølve. Medan elevar løyser problem observerar dei mønstre og forhold; dei dannar hypotesar, testar desse, verbaliserer og generaliserar desse mønstra og forholda (Ben-Chaim, m.fl., 1998, s. 248 & 263)

Som eg har skreve tidlegare så argumenter Lamon for at ein ser eit forhold når ein ser to mengder i ei multiplikativ samanlikning (Lamon, 2007). Fosnot skriv i si vegleiing til opplegget at ein forholdstabell kan vere med å syne elevane sitt proporsjonale resonnement, og då særleg for å finne eit ukjend tal (Fosnot & Jacob, 2007, s. 21-22). Korleis ein kan bruke ein forholdstabell er skildra i 2.6.3. under forholdstabell. Dette er og noko Lamon argumenterer for, at ein slik tabell kan vere til hjelp for å syne elevane sin tanke. Ho argumenterar og for at læraren kan hjelpe elevane til å modellere effektive prosessar (Lamon, 2005). Mellom og innanforstrategi kan vere ein slik effektiv prosess. Sjølv om det er noko unaturleg å spørje kor mange gongar meir er 20 enn 12 kan ein spørje kor mange gongar meir 60 er enn desse to. Eller ein kan finne ut kor mykje 30 boksar kostar (som er 12 gange to og ein halv, eller 20 gange ein og ein halv). Den siste tilnærminga Fosnot viser til at ein kan bruke er unitizing. I staden for å gå vegen om ein, kan ein dele opp varane i mengder på fire, sidan både 12 og 20 kan delast på fire. Då finn ein at hjå Bob kostar 4 boksar 5 dollar, medan ein hjå Maria får 4 boksar for 4,6 dollar.

4.3 Kategorisering

Medan eg var i kring og observerte korleis elevane arbeidde la eg merkje til at elevane ikkje hadde problem med å finne eit svar, men hadde derimot vanskar med å finne ut om svaret deira var valid og formulere ein matematisk strategi. Som og Brekke hevder, er det ikkje det reknetekniske som er vanskeleg for elevane, men å kjenne att dei proporsjonale samanhengane for så å uttrykkje desse i ein modell (Brekke, 2001). Likevel var det høg aktivitet, og elevane kunne forklare kva dei hadde gjort når ein spurde dei om det. Under økta den andre dagen kom det og fram at elevane hadde vanskar med å sjå kva andre hadde gjort samanlikna med dei sjølve.

Eg ynskja å finne ein reiskap som kunne hjelpe meg til å syne både ulikskapar og liksskap mellom det elevane gjor, og valte å støtte meg på *grounded theory* (Cohen, m.fl., 2007b). Denne metodiske tilnærminga let heller datamaterialet tale for seg sjølve, utan at forskaren med sin subjektive overtyding, påverkar teorien (Postholm, 2010). I praksis tyder det at ein prøver å møte materialet med eit så ope sinn som mogleg. Denne metoden har eg skildra nærare i kapitel 3.5.1 under analysemetode. Reiskapen eg bruka for å syne likskap og ulikskap i kva elevane gjorde er ein kategorisering av dei *tilnærmingane* elevane bruka. Eg gjekk nøye gjennom transkripsjonane for å kunne utdjupe det innsamla skrive datamaterialet eg hadde. Alle matematiske ord som omhandla proporsjon, forhold eller ratar vart tydeleg merka. Dette skulle så brukast for å samanlikne tilnærmingane til elevane og sjå korleis klassa resonnerte ved bruk av ein forholdstabell. Eg delte opp i kategoriar for å kunne sjå på skilnadane i strategiane til elevane. Eg kan aldri vite om elevane sjølv forstår kvifor deira strategi er ein strategi som førar fram til ei løysing på oppgåva, og må difor støtte meg til antakingar. Antakingane tek utgangspunkt i korleis elevane forklarar sine strategiar, altså korleis dei forklarar og uttrykkjer seg. For å styrkje mine antakingar vil eg vise til teori og tilsvarande forskarfunn i andre studium.

Eg byrja med å kode materialet mitt, både den transkriberte teksta og det skriftlege frå elevane, ut frå 9 ulike kodar. Målet var å skape ei oversikt for meg sjølve, og sette ytringane inn i ein samanheng, og i forhold til kvarandre. I utgangspunktet vart det teke omsyn til kva eg fann viktig då. Til dømes, er ord som syner usikkerheit og at eg stiller leiande spørsmål mykje likt. Eg stilte gjerne leiande spørsmål. Elevane er gjerne vande med at læraren er den som validerar utsegn, og bekreftar om eleven er usikre. Eit anna døme er proporsjonar, ratar, forhold og multiplikative strukturar som alle omhandlar proporsjonalt resonnement. Etter å ha lese meir teori fornya eg kodane, og fokuserte meir direkte på det elevane sa som kunne kodast innanfor variabelen *proporsjonalt resonnement*. Eg samla alle liknande ytringar i kategoriar, og desse fekk så eige namn. Namnsettinga gjorde det enklare å systematisere ytringane, og til slutt var alle ytringar plassert i kvar sin kategori.

Dei første kategoriane eg sette opp var *proporsjonar, diskusjon, konstruktivisme, oppdagande læring og usikkerheit*. Etter å ha lese vidare om temaet, og sett fokus på korleis elevar møter oppgåva eg gav dei, endra eg kategoriane til *intuitiv strategi*, *multiplikative strategiar og distribuert læring*. Eg fann at *diskusjon, konstruktivisme* og *oppdagande læring* alle var såpass like at eg valde å slå saman dei til *distribuert læring*. *Usikkerheit* var ein kategori kor eg samla alle ytringar kor elevane viste at dei var usikre, og kor eg som lærar hadde stilt leiande spørsmål. Men sidan elevane var i fokus valde eg å setje ytringar som synte at dei var usikre i diskusjon med medelevar under distribuert læring. Synte dei at dei var usikre ovanfor meg valte eg å kategorisere dette under kva strategi dei forsøkte å forklare, Kategoriane eg til slutt enda opp med er følgjande:

- *Intuitiv strategiar*
- *Multiplikative strategiar*
- *Distribuert læring*

Vidare i analysen vil eg gå nærare inn på dei forskjellige kategoriane.

4.3.1 Intuitiv strategiar

Den første kategorien, *intuitiv strategiar*, tek utgangspunkt i elevane sine tilnærmingar som dei brukar utan å sjå etter multiplikative samanhenger. Fosnot sjølv og seier at ein ikkje skal oppmuntre elevane til å dele, sidan det er noko dei gjerne vil gjere av seg sjølve. (Fosnot & Jacob, 2007, s. 14). Som eg har skreve i teorikapitlet går elevane frå intuitiv, til additiv og til multiplikativ resonnering, og nettopp difor er det ganske vanleg at den mest vanlege strategien elevane brukar er den additive. Ved bruk av ein slik strategi kan ein resonnere feil på to ulike måtar. Sidan differansen mellom pris og talet på boksar er det same i begge butikkane, er det ingen skilnad. Eg hadde mest venta meg at nokon vil argumentere for at nettopp fordi differansen er konstant må Maria sitt tilbod vere det beste sidan den gjer mindre utslag hjå henne. Sagt med andre ord at tre er ein større del av 12 enn av 20. Vidare kunne ein vente at sidan differansen hjå både pris og talet på boksar er det same, 8, så er det ingen skilnad. Men etter å ha gått gjennom alt materialet har eg ikkje funne noko spor av slikt resonnement, eller argumentasjon.

Ein kan sjå strategien med å gå vegen om ein som eit mellomstadium av additiv og multiplikativ strategi. Dei har altså ein tilstrekkeleg numerisk forklaring, men har ikkje ei multiplikativ førestilling av oppgåva, og har difor ikkje eit proporsjonalt resonnement. Lamom konstaterar at noko av skilnaden mellom dei som resonnerer proporsjonalt frå dei som ikkje gjer det, er at dei byggjar og brukar samansette deler bruker samansette deler når konteksten foreslår at det er meir effektivt å bruke det enn å bruke enkle deler (Lamon, 2007).

Under kjem to døme, eit frå den første og eit frå den andre økta, kor elevane går om ein og kan forklare numerisk kva dei har gjort, men ikkje har fått fatt i ei multiplikativ førestilling av oppgåva. Det første dømet er Peter og ein medelev som forklarar meg korleis dei har funne fram til svaret. Dei har då fått arbeidd med oppgåva i om lag eit kvarter før eg kjem bort til dei. Forklaringa og strategien deira har eg merka med **feite bokstavar**. Det andre dømet er frå neste økt kor elevane er sett saman i grupper. Her tek eg med eit utdrag frå diskusjonen mellom Rut, Johannes og Jakob. Eg vil taka med korleis Johannes og Jakob forklarar Rut korleis dei fann fram til løysinga.

1.	Peter:	Når vi tek liksom 15 boksar for 12 (*peiker på tala han har skreve i boka)*
2.	Meg:	Mhm
3.	Peter:	Så **deler vi 15 på 12 og får prisen**. Same
4.	Meg:	Prisen på?
5.	Peter:	**Vi dele 15 dollar på 12 boksar og då får vi 1,25 dollar** (*stopper opp og ser til meg etter stadfesting)*
6.	Meg:	Som er prisen for
7.	Peter:	**For en boks**
8.	Medelev:	**Per stk**
9.	Meg:	Mhm, riktig
10.	Peter:	Og så gjer vi det same på den andre
11.	Medelev:	Gjor vi det same på den (*peiker for å syne)*
12.	Elev:	(*Forsett utan å la seg forstyrre)* Maria sel 20 boksar med kattemat for 23 dollar, medan Bob sel 12 boksar for 15 dollar. **Billigaste er Maria som sel for 1,15 pr boks**

Denne forklaringa var den mest vanlege blant elevane i mi forsking. Ein ser her at dei brukar tydeleg kva dei har lært i skulen, med å dele mengda med varer på pris, for å finne prisen per eining. Noko desse to også har skreve som forklaring til kva dei har gjort på sin plakat. Som vi ser i ytring 3 er det og det Peter sei, at då får dei *prisen*. Eg må spørje to gonger før han svarar at det er prisen for ein boks. Vi ser at Peter forklarar godt korleis han kom fram til svaret, med å vise til ei numerisk forklaring, men har ikkje grepe oppgåva multiplikativt. I staden held dei seg til einingar og samanliknar desse to (ytring 10 & 11)

20.	Jakob:	Sjå her! På Bob's best buys, 12 kattebokser kosta for 15 kroner, dollar. Og vi tok for å finne ut **kor mykje ein boks koste**, **så tok vi 15 delt på 12.** Som vart 1,25 dollar. (*vekslar mellom å sjå på plakaten og Rut)*
21.	Johannes:	(*Til Rut)*1 dollar og 25 cent
22.	Jakob:	Ja. 1 dollar og 25 cent
23.	Johannes:	Og så, ein anna reknemåte**. Det var 15 delt på 12, er lik 1, 25**. Ganga dette med 8 er lik 10 + 15 er lik 25. **Delt på 20, er lik 1,25**.
24.	Jakob:	Og då gjentek eg dette her.
25.	Johannes:	(*Ser ned på plakaten medan han forklarar).* Og så er det min tur på

Maria sitt tilbod. Maria's pet emperium. 20 katteboksar, kostar 23 dollar. Så vi, for å finne ut kor mykje ein kosta, **så tok vi 23 delt på 20. Er lik 1,15,** altså 1 dollar og 15 cents. Marias kattemat er billigare enn Bobs kattemat. **Marias kattemat er 10 cent billigare enn Bobs kattemat**. (*Ser opp og adresserer til Rut)* Din tur!

Det er to ting eg ynskjer å trekkje fram frå denne transkripsjonen her. Vi ser her at Jakob og Johannes har gått frem slik som Petter og gjorde. Til skilnad frå Petter byrjar Jakob med å seie at dei ynska å finne ut kor mykje ein boks kostar før han forklarar korleis dei gjekk fram. Men dei seier ikkje at Maria har det beste tilbodet, derimot at ein boks er 10 cent billigare enn hjå Bob, noko som jo berre er sant i tilfellet når vi samanliknar pris per boks. Då er det vanskeleg å skjønne om det er eit godt tilbod eller ikkje. Eg skal kome tilbake til korleis Johannes meir grip tak i tilbodsdelen under 4.3.3, under *distribuert læring.* Det andre vi skal leggje merkje til er ytring 23. Eg vil analysere denne ytringa åleine seinare under 4.6 om proporsjonalt resonnement.

Den siste intuitive strategien eg vil trekkje frem å byggje opp. Diverre fekk eg ikkje lov til å filme desse to elevane som nytta denne strategien, slik at eg ikkje har noko transkripsjon av kva dei sa eller ytra. Difor er analysen basert på det skriftelege arbeidet dei har gjort, både utrekningar og plakaten kor dei presenterte sin strategi. Desse to elevane bruka heile 3 strategiar for å finne svaret utan hjelp frå meg. Dei fann først prisen for ein boks, som hjå dei andre, så laga dei tabell kor dei hadde sett saman prisen på to og to boksar til dei hadde 20 boksar i begge butikkane. Den første strategien er altså å gå om ein, den andre å samanlikne prisen på eit ulikt tal av boksar, blant anna 4 som er minste felles faktor i talet på boksar hjå begge butikkane, den tredje er å gange prisen på ein boks for å få same talet på boksar i begge butikkane, noko eg vil kome tilbake til i 4.3.2 om *multiplikative strukturar*. Som eg har skreve tidlegare om *unitizing* deler barn opp informasjon dei møter til vanleg i delar som er enkle for dei å tenkje kring. Lamon foreslår at ein bør oppmuntre til fleksibel gruppering sidan barn brukar unitizing før dei lærer å gå vegen om ein (Lamon, 2005). Det er verd å merkje seg at desse to finn først til slutt kor mykje ein boks kostar hjå Maria, og då mest for å kontrollere at svaret deira er gyldig. Elevane lagde tabell, men dei kunne bruka unitizing for å finne svaret direkte. Sidan 4 er minste felles faktor båe i 12 og 20, kan ein dele prisen på høvesvis 3 og 4, og finne at det hjå Bob kostar 5 $, medan det kostar 4,6 $ hjå Maria og slik finne at Maria har det beste tilbodet. Men likevel har elevane bruka unitizing med å dele opp i to og to boksar.

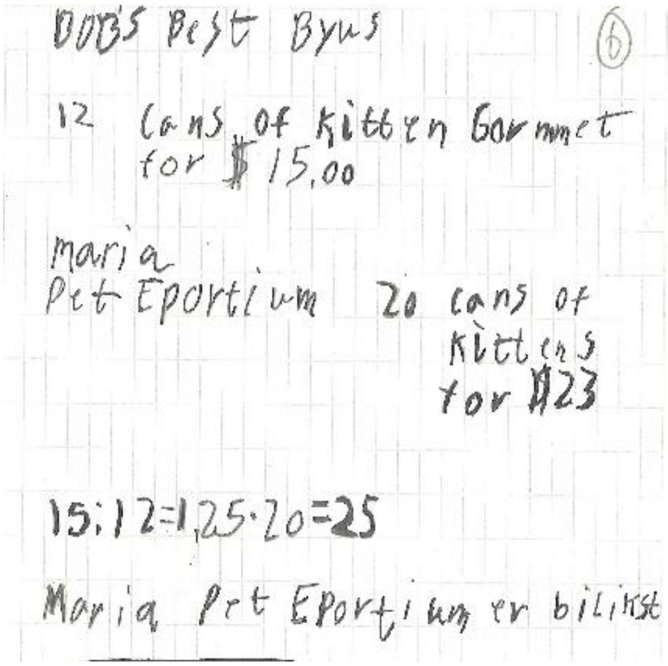
Eg har likevel plassert det under *intuitive strategiar* sidan dei ikkje viser til den multiplikative samanhengen i sin argumentasjon.

4.3.2 Multiplikative strategiar

Multiplikative strategiar er strategiar kor elevane har bruka multiplikasjon for å samanlikne tilboda. Altså har ytringar og tilnærmingar som har hamna i denne kategorien basert seg på multiplikative samanhengar. Ein strategi eg fann var å samanlikne prisen av same kvantitet med å finne felles faktor eller felles multiplikativ eining. Som eg vil syne fann eg ulike variantar av denne strategien. At elevane ikkje fann eining per pris er svært forståeleg, då dette alternativet er at ein for 57,5 $ får 50 boksar hjå Maria og 46 hjå Bob, eller at ein for 28,75 $ får 25 og 23 boksar. Forklaringar innan for desse strategiane kan, som eg har skreve i teorikapitlet, delast i to kategoriar. I den eine kategorien har elevane passande forklaringar, og har grepe oppgåva premultiplikativt, men ikkje proporsjonalt. Til dømes vil det å byggje opp ein tabell med mindre mengder boksar vere ei slik forklaring. Om vi flytter det over til handel så vil ei slik forklaring vere at ein skjøner at tilbodet gjer større utslag jo meir vi kjøper. Den andre kategorien for desse strategiane, er passande forklaringar av di elevane har grepe oppgåva multiplikativt (Misailidou & Williams, 2004). Til dømes vil det vere å vise til kor mykje 30 boksar kostar i båe butikkane, og argumentere for kven som har det beste tilbodet ut frå dette.

Som eg har vist til der viser det seg at barn oftare dannar seg ein manglande del i del- heile problem enn dei dannar seg ein manglande heilskap i del- del problem. I oppgåva eg gav elevane er det ikkje noko manglande del, men vi har sett at elevane dannar seg ein manglande del med å gå om ein. Men i motsetnad til kva andre forskarar har funne, meiner eg å sjå at elevane danna ein manglande heilskap i dette problemet. Til dømes har vi sett at dei fann ut kor mykje 20 boksar kosta i begge butikkane for å kunne samanlikne prisen. Og dette fell saman med kva Singer og Resnick seier med at når det er enklare å bruke del-heil som resonnement for å løyse problem når heile mengda er kjend og lik (Singer & Resnick, 1992).

Eg vil vise til to transkripsjonar frå økta, kor den eine er transkribert og den andre tek utgangspunkt i det skriftlege materialet. Det skriftlege materialeteg har teke utgangspunkt i, under, er frå to gutar som har funne ein effektiv strategi for å kunne samanlikne prisen på 20 boksar. Også desse gutane hadde eg ikkje tillating til å filme, og difor har eg måtte basere meg på eigne notat teke rett etter økta. Igjen er det som førte til kategoriseringa utheva.



1. Meg: Kva har de gjort her?
2. Ruben: Vi har funne at Maria var billegast
3. Meg: Jaha. Korleis gjekk de fram då?
4. Ruben: Vi fann først kor mykje ein boks kosta hjå Bob. Då delte vi 15, som var prisen, på 12 boksar og fekk 1,25 dollar. Så ganga vi dette **med 20 for å finne kor mykje 20 boksar kosta og det var 25.**

Her ser vi den første forklaringa som byggjer på proporsjonalt resonnement. Dei har funne eit forhold som dei overførar vidare til neste forhold, nemleg forholdet mellom pris og boksar. Med å taka utgangspunkt i at ein boks kostar 1.25 dollar så bevarar ein dette forholdet same kor mange boksar ein ynskjer å finne. Schliemann og Carraher hevdar at denne strategien bevarar meininga til relasjonane som er involvert i problemet, nemleg pris i forhold til boksar (Schliemann & Carraher, 1992). Denne strategien er kalla mellomstrategien og byggjer på forholdet mellom variablane. Altså at prisen endrar seg når vi endrar talet på boksar, ein finn forholdet mellom pris og boksar og brukar dette for å finne ei ny mengde boksar til ein ny pris. Lamon argumenterar for at ein elev brukar denne strategien når han eller ho set opp ei likning med to ytre eller måler det som er mellom to forhold og grunner dette med det funksjonelle forholdet mellom målingane for å finne den ukjende (Lamon, 1994). I dette dømet er dei ytre forholda til dømes 15 dollar for 12 boksar, og 25 for 20, og forholdet mellom desse to variablane er altså då 1,25 hjå Bob. Sjølv om elevane ikkje set opp ei likning slik Lamon skildrar, vil eg hevde dei brukar denne strategien. Dette fordi dei har funne det som er mellom to forhold, pris per boks, og brukar så det funksjonelle forholdet mellom målingar, altså talet på boksar vi ynskjer å vite prisen på for å finne den ukjende, tilhøyrande prisen.

Den andre situasjonen eg vil vise til er henta frå den første økta. Her er det to jenter som har arbeidd saman, men berre den eine som er munnleg aktiv når eg kjem bort til dei og spør kva dei har gjort. Ho er og den einaste som har produsert noko skrifteleg materiale når eg kjem bort. Her har eg merka det som gjer at desse ytringane høyrer til i denne kategorien.

21. Meg: Ja, kva var det som vart billigast?
(*Rakel peiker ned på arket og tilbodsplakaten til Maria og seier at ho har det billegaste tilbodet)*
22. Meg: Kvifor det?
23. Rakel: Fordi der *(peikar på tilbodsplakaten til Maria)* er det **69 for 60 boksar**, og der (*peikar på plakaten til Bob)* er det **75 for 60 boksar**.
24. Meg: Kan du forklare det til Lea, korleis du har tenkt og gjort?

(*Rakel går i gang med skrive på arket at 60=12 x 5 = 20 x 3. Ho forklarar så at ho tek prisen i butikkane og gangar 23 med 3 og 15 med 5. Lea fylgjer med og skriv så av utrekningane til Rakel)*

25. Meg: Kvifor har du ganga 23 med 3 og 15 med 5?
26. Rakel: Æh, det er fordi 20 gangar 3 er 60. Og 12 gangar 5 er også 60. Og difor gangar eg 23 med 3 og 15 med 5.

Dette er den tydeligaste argumentasjonen som byggjer på proporsjonalt resonnement medan elevane arbeidar i par frå datamaterialet eg har. Eg skal kome tilbake til ein grundig analyse av korleis dette syner proporsjonalt resonnement i 4.6, men no skal vi sjå på kva strategi Rakel har funne. Eg skriv Rakel av di Lea ikkje deltok, men berre skreiv av. Som Lamon påpeika er det å forstå proporsjonalitet det å kjenne att gyldige og ugyldige omformingar av matematiske uttrykk. Dette vil seie å blant anna å bevare forholdet mellom to mengder når mengdene er proporsjonale (Lamon, 2005). Desse to brukar den såkalla innanforstrategien, eller skaleringstilnærminga. Her ser vi på endringar når vi held oss til boksar, ein søkjer då å finne kor mange gongar meir 60 er enn 12, og brukar så dette forholdet for å finne prisen. Som Lamon viser til brukar ein elev denne strategien når han eller ho set opp ei likning mellom to indre forhold og brukar likskapen av skalaroperasjonar for å finne den ukjende

(Lamon, 1994). Rakel set heller ikkje opp noko likning, men ho finn forholdet mellom talet på boksar og brukar dette forholdet for å finne prisen.

4.3.3 Distribuert læring

I denne kategorien har eg samla ytringar frå diskusjonen andre økta som syner at elevane gjennom diskusjon får respons på deira ytringar og gjennom det utvidar si tenking. Jamfør det eg har skreve om sosialkonstruktivismen sitt syn på læring gjennom at elevane ytrar si tenking, tilpassar denne til felles kunnskap, tileignar seg ny kunnskap og omdannar til eigen kunnskap, vil eg her vise til der eg meiner at akkurat dette skjer (Ernest, 2006). Eg vil korleis elevane gjennom å diskutere det dei har funne, får utforda deira kunnskap og ny kunnskap blir konstruert. Ikkje berre kan det elevane har gjort bli tydelegare for dei sjølve med at dei må forklare for andre, men dei får og tilbakemelding som kan endre kunnskapen, og utvide deira forståing (Weber, m.fl., 2008). Med å diskutere og samanlikne strategiar får elevane omgrepskunnskap med at dei koplar saman matematisk kunnskap, dei oppdagar samanhengar i noko som kan synast ulikt, til dømes at både multiplikasjon og divisjon kan brukast i strategiar for å finne det beste tilbodet (Hiebert & Lefevre, 1986).

Eg vil gå tilbake til diskusjonen mellom Rut, Johannes og Jakob. Innleiingsvis går vi til når Rut skal forklare gutane korleis ho og Andreas (som var sjuk denne dagen), har gått fram for å finne ei løysing på oppgåva. Altså fortsett diskusjonen vidare frå kva eg viste til i 4.3.1.

26. Rut:	Min tur ja. Vi starta med å sjå om 20 og 12 kunne gangast opp i same tal. Og det var jo 60. Når vi fant ut det ganga vi 23 med 3, og 15 med 5, for å finne ut kor mykje 60 boksar kosta.
27. Johannes:	23 med 3?
28. Rut:	Og så fann vi svaret.
29. Johannes:	(*Seier det høgt, verkar som han sjekkar at det Rut sei stemmer)* **12 gange 5 er lik 60, 20 gange 3 er 60**. Og kor fekk du det frå?
30. Rut:	For det var det vi gjorde, og difor er Marias billigast. For den eine var 69 og den andre var 75.
31. Jakob:	Korleis gjorde de det?
32. Rut:	Vi starta med å sjå om 20 og 12 kunne gangast opp til eit **felles** tal, og det var 60. Når vi fant ut dette, ganga vi 23 med 3 og 15 med 5 for å finne ut kor mykje 60 boksar kosta. Og så fann vi ut at svaret, at svaret er, **at Bobs koste 75 og 60 boksar hjå Maria kosta 69**. Og frå Bobs er det 75 dollar. Konklusjonen er at Marias dyrebutikk er billigare.
33. Rut:	Det er ikkje skrive på
34. Johannes:	**Så jo meir du kjøpar, jo billigare vert det!**

Ved første augekast ser det ikkje ut til at Rut endrar forklaringa si noko særleg. Likevel ser vi at ho forklarar gutane at dei fann eit *felles multiplum*, nemleg 60 boksar. Ho får tilbakemelding frå Johannes som sjekkar at det ho fortel stemmer, slik får ho stadfesting på sin tanke, og behov for å klårgjere enno meir. Når ho igjen forklarar korleis dei gjekk fram er ho sjølve meir klår over kva ho forklarar, og gutane er og med i resonneringa. Ho forklarar dei så kva pris det var for 60 boksar i dei to butikkane. Ein anna ting vi skal leggje merkje til er ytring 34. I ytring 25, sjå 4.3.1, seier Johannes at Maria sitt tilbod er 10 cent billegare enn Bob sitt tilbod, og det er den kunnskapen han tek med seg inn i diskusjonen. Etter å ha høyrt på kva Rut fortel koplar han saman det han sjølve fann ut med det Rut fann ut og finn dermed ut at jo fleire varer ein kjøper når det er tilbod, jo større utslag gjer tilbodet.

I avsnittet under kjem eg bort til elevane etter tidlegare å ha oppfordra dei til å sjå etter skilnader og likskapar i kvarandre sine strategiar.

66. Johannes:	Ja. Vi fann også ut kor mykje ein kosta.
67. Meg:	Ja
68. Johannes:	Ho fann ut kor mykje 60 kosta.
69. Meg:	Men kva som er forskjellig då?
70. Jakob:	Ho ganga, vi delte.
71. Johannes:	**Viss ho dele det på 60, nei**. (*Byrjar å rekne med kalkulator)*
72. Jakob:	**Vi delt for å finne ut kor mykje ein boks kosta, og ho ganga for å finne ut kor mykje 60 boksar kosta**.
73. Meg:	Ja, men er det noko særleg skilnad? (*Til Johannes*) Kva er du prøver å finne no?
74. Johannes:	Eg skulle berre sjekke ein ting
75. Meg:	Ja, sjekk ein gong til.
76. Johannes:	Eg skulle berre sjekke om ho hadde delt 60 på 12 boksar, **så hadde vi funne same svaret.**
77. Meg:	60 på 12, ja då fekk vi 5. Men kva om vi deler 69 på 60?
78. Johannes:	69 på 60? *(Tastar inn på kalkulatoren)*
79. Johannes:	1, 15.
80. Meg:	Høyrtes det kjent ut?
81. Johannes:	Ja, det var eit svar. Det var svaret på
82. Jakob:	Kor mykje ein boks kosta hjå Maria. *(Elev 2 driv no å skriv 75 delt på 60 på lommereknaren)*.
83. Johannes:	1, 25. Ja! Vi har funne to måtar til. Vi får til 4
84. Meg:	Kva de har funne ut no?
85. Johannes:	**At viss vi delar 75 på 60 blir det 1,25 akkurat som der** *(peiker på plakaten sin kor dei har funne svaret)*. Og **viss vi delar 69 på 60 så får vi 1,15 akkurat som der**. (*Peiker igjen på plakaten)*
86. Meg:	Så det er eigentleg akkurat det same de har gjort då?
87. Jakob:	Ja!
88. Johannes:	**Ja, berre motsatt**.
89. Meg:	Berre motsatt ja, det kan ein seie.

I byrjinga er Johannes og Jakob overtydd om at dei ulike strategiane ikkje har noko samanheng med kvarandre. Så ser vi at Johannes får eit innspel av å sjå etter samanheng og finn til slutt at ein kan finne fram til kor mykje ein boks kostar ut frå kva Rut og Andreas hadde funne. Og han seier til slutt at dei har gjort det same, berre motsatt. Her har han altså kopla saman to deler av kunnskap. For det første at ein kan finne prisen av ein boks, sjølv om ein har auka talet på boksar og dermed også prisen. For det andre har han funne ein samanheng mellom multiplikasjon og divisjon, at det er motsette operasjonar. Clark m.fl. argumenterar for at læring skjer på ein meiningsfull måte når elevane dannar slike koplingar og utviklar forståing kring omgrep eller emnar. I dette tilfellet proporsjonalitet (Clark, m.fl., 2003).

4.4 Resultat

Eg har bruka kategoriane for å syne skilnaden mellom strategiane, og vise til korleis elevar og har teke i bruk strategiane til kvarandre. Basert på det skriftlege materialet fann eg at det var totalt 7 elevar som bruka ei form for multiplikativ strategi, og 10 som bruka intuitive strategiar i den første økta. Eg har måtte teke nokre omsyn for kunne sjå ei endring i strategibruk. For det første er det berre i den første økta at eg har fått med vidda av skriftelege strategiar til heile klassa. For det andre fekk eg diverre ikkje filme eller ta lydopptak av mange av elevane som bruka intuitive strategiar. For det tredje er det berre fokusgruppa kor eg kan analysere kva som skjer medan elevane diskuterar. For det fjerde er det eg som lærar som styrer innspela avslutningsvis i andre økta.

Eg telte opp alle ytringar, ut frå kategoriane mine, og fann ein klar trend i auking i bruk av multiplikative strategiar i diskusjone, både i fokusgruppa og i heil klasse. Likevel er ikkje dette ein trend eg kan slå fast gjeld for klassa. For det første er det eg som gjekk inn i diskusjonen til fokusgruppa og utfordra dei på ny til å sjå etter ulikskapar og likskapar i sine tilnærmingar. For det andre er det eg som styrer diskusjonen i heil klasse, noko som kan ha ført til at nokre elevar melde seg ut.

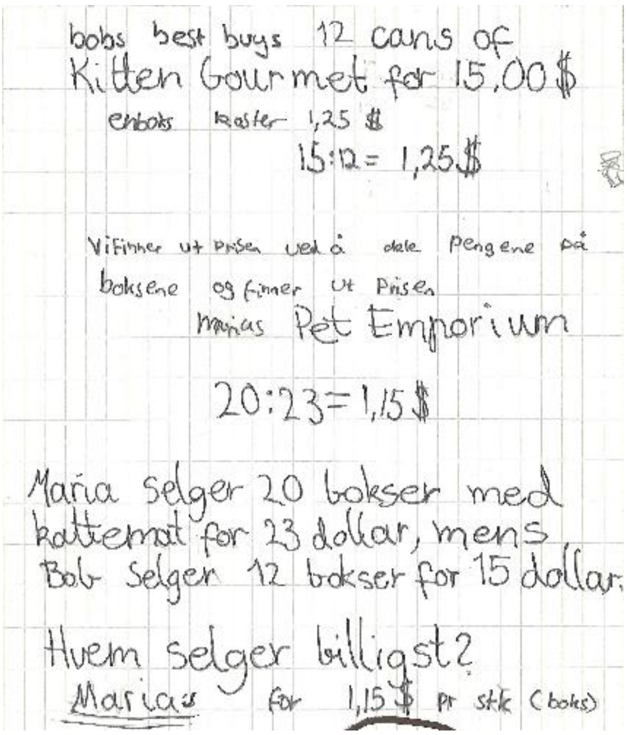
4.5 På veg mot multiplikative strategiar

Eg har no vist at det er stor skilnad i kva strategiar elevane bruka for å løyse oppgåvene i dei forskjellige fasane av opplegget dei gjennomgjekk. Eg skal i dette delkapitlet drøfte kva som kan vere grunn til ulikskapen i dei ulike fasane av opplegget. Og analysere resultatet av auking i multiplikative strategiane. Eg vil og sjå korleis dei elevane utviklar og utvidar dei ulike strategiane. Her vil Ernest sine teoriar om kunnskap vere sentralt.

4.5.1 Første fase: Elevane arbeider i par

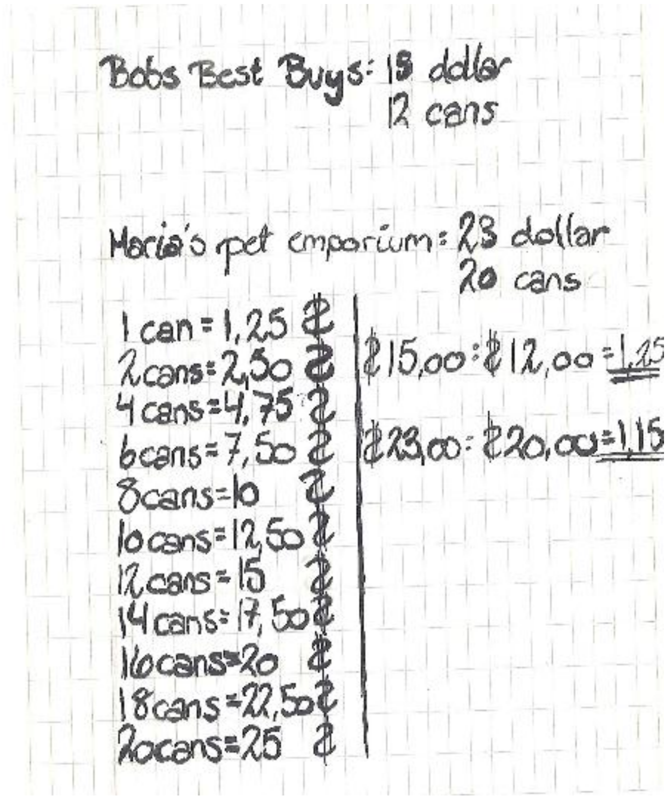
I første fase vart elevane sett saman i par og etter ein kort diskusjon kring konteksten med tilbod vart dei gjeve oppgåva. Det er veldig tydelig at elevane har grepe oppgåva, og held seg til konteksten. Dei arbeider sjølvstendig, og blir berre avbrote av meg når eg spør om dei kan forklare kva dei har gjort. Dei er tydelege i sine forklaringar på samanhengen mellom boksar og pris. I denne fasen er alle elevane aktive, det er tydeleg at opplegget fengjer, samstundes som det er spanande med noko nytt. Både det at eg var den som introduserte oppgåva, og at eg hadde med utstyr til å gjere opptak kan ha verka motiverande for elevane. Det var inntrykket eg fekk at mange av elevane ynskja å forklare for å verte filma. Slik kan ynsket etter å lukkast vere viktigare når læraren er der, og enno meir når det vert dokumentert på film.

Eg vil her vise til eit døme kor vi skal sjå korleis elevane uttrykkjer seg skriftleg utan at eg har brote inn og spurt kva dei tenkjer. Dømet er frå Peter og partnaren sitt døme, sjå under 4.3.1. Materialet eg viser til er ferdig laga før vi får situasjonen som eg har transkribert og vist til tidlegare i analysen


bobs best buys 12 cans of
Kitten Gourmet for 15,00$
enboks koster 1,25 $
15:12 = 1,25$
Vi finner ut prisen ved å dele pengene på
boksene og finner ut prisen
marias Pet Emporium
20:23 = 1,15$
Maria selger 20 bokser med
kattemat for 23 dollar, mens
Bob selger 12 bokser for 15 dollar.
Hvem selger billigst?
Marias for 1,15$ pr stk (boks)

Her ser vi at dei skriv at ”vi finner ut prisen ved å dele pengene på boksene og finner ut prisen”, som forklaring på korleis dei går fram. Etter at eg har vore hjå dei og spurt kva dei har gjort, har det skjedd ei utvikling. Som eg skreve har om i danning av kunnskap, kan ein sjå samtalen eg hadde med Peter som kjelda for tilbakemelding, i form av godkjenning, utdjuping, reaksjon, kritikk og retting (Ernest, Udatert, s. 9). Dette kan ein sjå når desse to presenterar si løysing på plakaten. Då har dei forklart at ”vi deler prisen på talet på boksar for å finne prisen for per boks”. Slik ser vi at strategien deira er presisert til å gjelde prisen for ein boks.

Det andre dømet eg vil trekkje fram er frå dei som bygde opp, sjå siste avsnitt under *intuitive strategiar*. Vi ser her at jenta har skreve at 4 boksar kostar 4,75 $. Men når ho skal skrive plakaten, kan ein sjå at ho har retta dette og skreve 5 $ dollar i staden for. Diverre er det ikkje mogleg å lese kva guten har skreve av di skrifta er for liten til det let seg syne etter scanning, men medan jenta har skreve tabell for Bob sitt tilbod, har han skreve for Maria. Vi ser at elevane har utvikla 3 strategiar, sjølv om dei brukar berre 2 for å argumentere for at Maria har best tilbod. Med å bruke tabellen kunne dei bruka fleire ulike tal på boksar for å argumentere for at Maria hadde best tilbod. Som eg har skreve kunne dei samanlikna prisen for 4 boksar i begge butikkane. Men sidan dei og har funne prisen for 12 boksar hjå Maria kunne dei samanlikne prisen med tilbodet til Bob direkte. I staden går dei heilt opp til 20 boksar hjå Bob, og finn at prisen for 20 boksar er 23 og 25 dollar, og argumenterar for at Maria sitt tilbod er best sidan det er 2 dollar billegare. Og så har dei bruka strategien med å gå om ein for å kontrollere svaret sitt.



4.5.2 Diskusjon i fokusgruppa

Som eg har vist til tidlegare kom Johannes og Jakob til diskusjonen med strategien med å gå om ein, medan Rut skulle presentere strategien om å samanlikne 60 boksar. Sjå tidlegare analyse av transkripsjonane. Men vi skal no sjå på utviklinga av strategiane. Både Johannes og Jakob er tydelege på at dei har funne prisen for ein boks, slik at dei kan samanlikne desse og slik funne at hjå Maria er ein boks 10 cent billegare enn hjå Bob. Eg har tidlegare vist til korleis Rut får tilbakemelding frå gutane og blir enno meir presis i si forklaring, samt at Johannes set seg inn i strategien til Rut og tek den i bruk sjølve. Vi kan sjå at det er ikkje store skilnadane mellom ytring 26 og 32, anna enn at ho har skifta *opp i same tal* med *opp til eit felles tal*. Noko som stemmer godt med korleis dei fann 60, nemleg med å byggje opp frå 20 til 60, og frå 12 til 60. Så argumenterar ho for at Maria hadde det beste tilbodet med å vise til at hjå hennar var 60 boksar billigast.

Så ser vi ei endring i bruk av strategien, nemleg at Johannes koplar saman det Rut har gjort med kva han har gjort og finn slik at han alltid kan finne prisen for ein boks med å prisen på talet på boksar, sjå ytring 76, 82 og 85. Her har dei skapa eit godt grunnlag for å byrje å bruke forholdstabellen, og bruke det å gå om ein inn i ein multiplikativ strategi.

4.5.3 Diskusjon i heil klasse.

I denne sekvensen fekk eg fyrst merksemda til elevane og spurde så ein elev frå kvar gruppe om dei kunne seie kva dei hadde funne på si gruppe. Eg starta med å spørje den gruppa som hadde brukt den multiplikative strategien med å finne kor mykje 20 boksar hjå Bob kostar, vidare spurde eg gruppa som hadde bruka tabell om kva dei hadde gjort. Kamera er framleis vendt mot fokusgruppa, slik at Ruben og Benjamin ikkje synast på videoen, men vi høyrer dei svakt i bakgrunnen.

103.	Ruben:	Vi har berre gjort det slik at vi fekk 20 boksar hjå Bob vi.
104.	Meg:	20 boksar hjå Bob
105.	Ruben:	Istaden for å finne kor mykje ein boks kosta hjå Maria
106.	Meg:	(*vendt til ei anna gruppe)*: De har gjort det akkurat likeins.
107.	Benjamin:	Skal eg forklare? Vi har funnet ut at kvar enkelt boks (hjå Bob) kostar 1,25.
108.	Meg:	Ja (*skriv på tavla*)
109.	Benjamin:	Så har vi tatt oppover og funnet ut at 20 boksar, hjå Bob, kostar 25 dollar. Så då fann vi ut at det kosta 2 dollar meir.

Her ser vi at Benjamin forklarar at dei har teke utgangspunkt i kor mykje ein boks kostar, og så funne ut kor mykje 20 boksar kosta hjå Bob. Eg skriv opp i ein tabell, sjå under, det elevane har sagt. Rut og Jakob får og forklare kva dei har gjort. Så får elevane i oppgåve å finne ut kor mykje 10 boksar kostar i butikkane.

Boksar	1	20	60	10
Pris hjå Maria	1,15	23	69	
Pris hjå Bob	1,25	25	75	

168.	Meg:	Enn om vi vil finne ut kor mykje 10 boksar kostar hjå Maria. Når vi veit at ein boks kostar 1,15 dollar og 20 boksar kostar 23 dollar. Kor mykje kostar då 10?
169.	Johannes:	11,5.
170.	Meg:	Ja, korleis fann du det då?
171.	Johannes:	Eg tok 1,15 ganga med 10.
172.	Meg:	Ja, det er ein fin måte å gjere det på.

Her ser vi ein prosess i kunnskapen til Johannes. Han byrja med å finne prisen for ein boks og i diskusjon med Rut har han funne fram til at dette gjeld same kva pris og talet på boksar er, så lenge dei er i eit fast forhold til kvarandre. Og som vi ser i ytring 88 oppdagar han at han og Jakob har gjort det same som Rut, berre motsett. Slik kan vi seie at han har tileigna seg ny kunnskap og gjort denne om til sin eigen, jamfør sosialkonstruktivismen. For som vi ser her brukar han det han har funne ut om å ha gjort motsatt til nettopp å gå motsatt veg av kva han sjølve og Jakob gjor i den første økta.

Vi skal sjå på nokre andre strategiar som elevane bruka i denne fasen av opplegget. I det eine dømet har elevane fått i oppgåve å finne prisen for 30 boksar, det andre 40 og det siste 48 boksar. I det først og tredje dømet er det Peter som løyser oppgåva, i det andre Benjamin.

181.	Peter:	Ja. Åh, nei nei. 37,5
182.	Meg:	Korleis tenkte du då?
183.	Peter:	Jo eg tenkte halvparten av 60
184.	Meg:	60 ja.
185.	Peter:	30 er halvparten av 60, så tenkte eg at svaret må vere halvparten av ...
186.	Meg:	Så det vi vil vite må vere halvparten av 75. Og 69 delt på to, kva var det for noko?
187.	Johannes:	34,5.

Her ser vi at Peter ikkje går om ein. I staden tek han utgangspunkt i Rut sitt bidrag og går om 60. Og han argumenterar for at sidan forholdet mellom 60 og 30 er ein halv, må forholdet mellom prisen for 60 boksar og 30 boksar og vere ein halv. Dette er den første argumentasjonen som grunner på proporsjonalt resonnement i kor andre elevar høyrer. Vi har tidlegare sett at Rakel argumenterar ved bruk av proporsjonalt resonnement i ytring 26 av dialogen mellom meg og dei to jentene, men dette er den første argumentasjonen som heile klassa får høyre. Og vi ser at Johannes fylgjer med og er den som finn kor mykje 30 boksar kostar hjå Maria. Merk at ingen av elevane brukar det dei veit om kor mykje 20 og 10 boksar kostar til å finne svaret med å bruke strategien å byggje opp, dette er noko som kan tyde på at dei har kopla at ein multiplikativ strategi er meir effektiv enn ein addidativ. I neste transkripsjon har elevane fått tenkt ei kort stund for å finne prisen av 40 boksar, og Benjamin er vorte gjeve ordet.

201.	Benjamin:	Då gangar vi prisen for 20 med 2.
202.	Meg:	Då kan vi gange prisen for 20 med 2, og då vert det?
203.	Benjamin:	25 gange 2, er 50. Og i den andre butikken blir det 23 gange 2, som er 46.

Her ser vi at Benjamin går motsett veg av Peter, nemleg med å doble i staden for å halvere, noko som jo er mest passande i og med at han veit kor mykje 20 boksar kostar. Noko han fann ut allereie den første dagen, sjå 4.3.1. Vi ser at han bruker forholdet på begge butikkane, slik at det er konstant. I det siste dømet vi skal sjå på, brukar ein elev sjølve *unitizing,* sjå 2.6.2. Elevane skal no finne ut kor mykje 48 boksar kostar.

211.	Jakob:	Vi har funne ut. Vi gange.
212.	Meg:	Jaha, så om vi ynskjer å finne kor mykje 48 boksar kostar då, kva gjer vi då?
213.	Jakob:	Då må vi taka prisen ganga 48 då.
214.	Meg:	Kan vi gjere det på ein anna måte?
215.	Jakob:	Det finst fleire måtar å gjere det på. *(Så går det litt tid før Peter rekkjer opp handa og ber om ordet)*
216.	Peter:	Skal eg gjere det på Bob's eller Marias?
217.	Meg:	Same det.
218.	Peter:	Om vi tek det på Bob's då. Då tek vi 12, for å få 48, så vi gange med 4.
219.	Meg:	Mhm.
220.	Peter	Og då tek vi berre svaret 15, gange 4. Og det vert 60.
221.	Meg:	Hjå Maria då?
222.	Peter:	Då gjer vi det same. 13,8, som er prisen for 12 boksar, gange 4.
223.	Meg:	Kva vert det?
224.	Johannes:	55,2.

Eg har teke med dette dømet av fleire grunner. I ytring 211 viser Jakob at han har skjønt at multiplikasjon er ein effektiv strategi for å finne ei løysing på problemet. Likevel viser han i ytring 213 at han framleis er bunde til å gå vegen om ein, som han har funne. Noko han sjølv ikkje presiserar. Peter derimot vel å bruke vegen om fire, han deler altså opp i noko som for han er enkelt å tenkje kring, og brukar dette for å finne svaret. Han har altså bruka innanforstrategien med å spørje kva han må gange 12 med for å få 48, og overfører dette forholdet til samanhengen mellom prisane. Og som vi ser er også Johannes med i resonneringa av di det er han som finn svaret. Som eg har vist tidlegare fann både Peter og Jakob same strategi når dei løyste oppgåva i den første økta, nemleg med å gå om ein. Og som Johannes har Jakob, i diskusjon med Rut, funne at ein gå motsatt veg med å gange det talet på boksar ein ynskjer å finne prisen på, med prisen av ein, sjå ytring 213. Det som skil Peter og Jakob, er at Peter er meir fleksibel med at han klarar å sjå problemet frå fleire innfallsvinklar , og vel den beste måten å løyse problemet på, framfor Jakob som ikkje ser behovet for å gjere ting på fleire enn ein måte.

4.6 Kva syner elevane av proporsjonalt resonnement?

Eg har no vist til korleis elevane løyser oppgåva eg gav dei, og kva ulike strategiar dei brukar og utviklar gjennom å arbeide med opne, kontekstbaserte oppgåver og diskutere dei ulike strategiane som vart nytta i klassa. Eg har vist til korleis elevar har avslørt likskapar og relasjonar og generalisert sine strategiar. Eg har vist korleis elevane dannar strategiar sjølve og synt forståing av desse. Oppgåva har ikkje inneheldt noko utanfor deira repertoar, altså noko dei ikkje har vore borte i før, men dei har sitt repertoar i utvikling av sine strategiar. Vi har sett korleis ei open oppgåve, kor elevane har presentert sin strategi og forklart korleis dei har resonnert, ikkje berre har gjort at elevane får danne sine eigne strategiar, men ei kjede av strategiar av di nye uttrykk har kome fram. Vi har sett at elevar, særskilt Peter og Johannes, som har fått sjå nye måtar å løyse problem på har både grepe tidlegare uttrykk av sin eigen strategi og fått eit høgare nivå av forståing. Høgare av di dei har funne fleire strategiar for å løyse eit problem, og slik vorte meir fleksibel, og mindre bunde til ein måte å gjere ting på. Dei har sett fordelen av snarvegar, og innlemma nokre av desse strategiane i deira eige arbeid. I dette kapitlet vil eg vise korleis elevane syner proporsjonalt resonnement i det dei gjer. Eg vil vise tilbake til situasjonane vi allereie har sett på, og diskutere korleis eg tolkar deira forståing og resonnement. Av di mange av elevane har bruka same strategiar, og i stor grad mykje av same argumentasjon og forklaring til sine tilnærmingar vil eg vise korleis Rakel, Benjamin, Johannes og Peter syner proporsjonalt resonnement. Proporsjonalt resonnement referer då til det å oppdage, uttrykkje, analysere, forklare og fremje prov som stønad til påstandar kring proporsjonale forhold (Lamon, 2005)

4.6.1 Rakel

Rakel var ein av tre som bruka strategien med å samanlikne prisen av 60 boksar. Ho var og den som kunne gje best forklaring på kvifor ho hadde bruka denne strategien, sjå ytring 23 og 26. Som eg har skreve er ein del av det å syne proporsjonalt resonnement at ein klarar å skilje ut eit multiplikativt forhold mellom to mengder. Jamfør kva Lamon argumenterar for så syner Rakel forholda i proporsjonen av di ho ser den multiplikative naturen i situasjonen. Eg har tidlegare sagt at ho bruka innanforstrategien som tilnærming, med at ho finn forholdet mellom boksane og finn prisane med å argumentere for at forholdet er same. Ho ser altså eit forhold av di ho samanliknar to mengder i ei multiplikativ samanlikning, og brukar dette forholdet til å finne ei løysing. I dette dømet at forholdet mellom talet på boksar er det same som forholdet mellom prisane til talet på boksar. Som Lamon argumenterar for syner Rakel proporsjonalt resonnement av di ho kjenner at den konstante raten mellom element av same form, og kjenner att det funksjonelle forholdet mellom det ho målar (Lamon, 2007).

4.6.2 Benjamin

Benjamin var blant dei to einaste som bruka strategien med å byggje opp, sjå 2.6.1. Han forklarar ikkje dette i ytring 109, men når vi ser kva skriftleg arbeid han har gjort kjem det klårt fram at dei har bygd opp med to og to boksar heilt til dei har fått 20 boksar. Når vi samanliknar korleis Ruben og Benjamin forklarar at dei fann 20 boksar, sjå transkripsjonane, kjem det klårt fram at Ruben har funne ein meir effektiv strategi. Når Benjamin seinare skal finne prisen for 40 boksar er det tydeleg at han har teke innover seg kva dei andre har sagt om deira måtar å løyse problemet på, og slik byrjar han å resonnere proporsjonalt. I byrjinga går han fram additivt, men vi ser at han har funne at det er snarar å bruke ein multiplikativ strategi. Av di han går bort frå si additive tilnærming, som og her hadde verka passande, men argumenterar med å bruke invarians syner han proporsjonalt resonnement. Han kunne velt å halde fast på den additive strategien med å seie at 20 + 20 = 40, og difor sagt at 23+23 er lik 46, men han argumenter altså med eit fast forhold i staden.

4.6.3 Johannes

Eg vil først analysere ytring 23 kor Johannes forklarar Rut at dei finn prisen for ein boks, og så gangar dette med 8. Her er det mi forståing av korleis Johannes resonnerer eg vil leggje fram, og det er berre antakingar. Han og Jakob kan ha kjent att at 1,25 er ein åttandedel av 10, i og med at det er ein kjend brøk, og blir ofte bruka i samanheng med prosent. Han brukar her ein additiv strategi, først finn han ut kor mykje 8 boksar kostar, og legg så saman dette med kva 12 boksar kostar. Han manglar 8 boksar hjå Bob for å få 20 boksar, og finn difor prisen av 8 boksar og legg den saman med prisen av 12. Som eg har skreve om additive strategiar er ein feil mange elevar gjer å halde fast på skilnaden, altså at sidan 20 boksar er 8 meir enn 12, må og prisen for 20 boksar vere 8 dollar dyrare enn for 12. Då hadde dei funne at tilboda var like gode. Altså har Johannes funne ein strategi som byggjer på multiplikasjon og addisjon, og som faktisk er korrekt. Men han syner likevel ikkje proporsjonalt resonnement av di han ikkje grunner funnet sitt. Han har funne kor mykje 20 boksar kostar og kunne dermed argumentert slik som Benjamin gjor med at dei er 2 dollar dyrare hjå Bob enn hjå Maria. I staden held han fast på å samanlikne prisen for ein boks i begge butikkane. Vidare ser vi ytring 85 og 88 at han utvidar sin kunnskap med å sjå at forholdet mellom pris og boks er konstant i begge butikkane, og nærmar seg slik ein multiplikativ strategi. Og i ytring 171 ser vi at Johannes har utvikla ein multiplikativ strategi med å gå om ein. Og som vi ser er det Johannes som begge fylgjer opp både hjå Peter og Benjamin og brukar deira strategi for å finne kor mykje 30 og 40 boksar kostar. Slik byrjar han å resonnere proporsjonalt, med at han går bort frå å bruke enkle delar og heller går over til meir samansette delar. Men, Johannes satt og med kalkulator når

Peter og Benjamin la fram sine løysingar, så han kan ha berre slått inn det eg har spurt om, sjå til dømes ytring 186.

4.6.4 Peter

Peter og byrjar med å dele pris på boksar for å kunne samanlikne prisen av ein boks. Gjennom at eg modellerte effektive prosessar på tavla, ut frå elevane sine forklaringar, og at elevane fekk diskutere deira strategiar i klassa har han sett fordelen av snarvegar og hopp og innlemmar desse strategiane i sitt eige arbeid. Slik kan ein seie at læring har skjedd ut frå eit sosialkonstruktivistisk syn. Og likeins som Rakel syner proporsjonalt resonnement syner og Peter det med at han kjenner den konstante raten mellom boksane og prisen og brukar denne uavhengig av kor mange boksar han skal finne. Han ser altså at forholdet kan brukast utanfor det enkelte tilfellet kor han fann det og klarar å tenkje kring det som ein karakteristikk av ein heil klasse med varierande mengder (Lamon, 2007). Han brukar først halvering som ein multiplikativ strategi, før han brukar unitizing med å sjå at 12 er ein fjerdedel av 48. Vi ser altså at han gjennom å konstruere tenkinga si sjølve har funne den mest effektive strategien. Som Lamon hevder, syner Peter proporsjonalt resonnement av di han syner ei forståing av likskapen av å passande skaleringsforhold, som å gå om ein, eller doble, eller finne eit multiplikativt forhold mellom to mengder (Lamon, 1993). Legg merkje til at Jakob foreslår at vi kan gå vegen om ein, med å gange prisen av ein boks med 48 boksar før Peter kjem med sitt forslag om å gange 12 med 4. Han veit allereie at 12 boksar kostar 15 $ hjå Bob og brukar kva klassa fann at 12 boksar kostar hjå Maria for å finne fram til prisen for 48 boksar. Slik brukar han konteksten i den gjevne oppgåva for å finne ein effektiv strategi for løysing av problemet. Slik ser vi at Peter har synt ei utvikling frå å gå om ein til å resonnere proporsjonalt. For som eg tidlegare har vist hevdar Lamon at det som skil dei som resonnerer proporsjonalt frå dei som ikkje gjer det, er akkurat at det at dei byggjer og brukar samansette deler når konteksten foreslår at det er meir effektivt å bruke det enn gå om ein (Lamon, 2007).

5. 5. Avslutning

Føremålet med denne oppgåva var å sjå korleis ein gruppe elevar på 7 trinn møtte ei open, kontekstbasert oppgåve om samanlikning av proporsjonale forhold. Eg ynskja å sjå korleis dei utvikla strategiar, og korleis dei forklarte desse til kvarandre. For å finne ut dette fylgde eg eit opplegg utvikla av Cathrine Fosnot, kor elevane skulle finne ut kva butikk som hadde beste tilbod på kattemat. Opplegget, og dei ulike strategiane har vorte kommentert og drøfta i analysen. Eg har vist til at det er stor skilnad i kva strategiar elevar utviklar, og i kva grad dei tileignar seg andre strategiar. Vidare har eg diskutert kvifor omfanget av multiplikative strategiar varierar i dei ulike fasane av opplegget. Eg har og gått inn i fire konkrete situasjonar kor det tyder på at elevane utviklar og endrar strategiane sine, samt at nokre av dei syner proporsjonalt resonnement. I dette kapitlet vil eg føre diskusjonen vidare kring nokre av resultata eg har funne.

Det er to ting eg kan konkludere med i mi oppgåve. Eg har funne at når elevar får arbeide med opne oppgåver med samanlikning av proporsjonale forhold, kan dei finne ulike strategiar for å løyse ei oppgåve kor dei vanlegvis ville gått om ein. Gjennom å diskutere desse med kvarandre, og lytte til kvarandre sine tilnærmingar får dei og sjå fordelen av snarvegar og hopp andre gjer og kan innlemme dette i sin eigen strategi. Slik kan dei både utvikle sin eigen strategi og ta til seg nye, noko eg har vist til i analysen. Difor er det så viktig at vi opnar opp for eit slikt arbeid, slik at lærarane og elevane sjølve ser at dei kan tenkje fleksibelt kring mengder og brøk. Eg har funne det motsette av kva læraren trudde på førehand, at elevane berre kjem til å gå om ein, med å vise til ei mengd ulike strategiar elevane tok i bruk og utvikla i møte med oppgåva eg gav dei. Det viser berre at vi må ta elevane på alvor, slik at dei kan lære seg å resonnere proporsjonalt.

Den andre eg vil trekkje frem er ulikskapen hjå elevane. Nokre vil sjå nytten av å ha ei variert mengd strategiar for å løyse ei oppgåve, medan mange vil vere nøgd så lenge sei har funne ein strategi som førar fram til svaret. Desse er diverre bunde til denne strategien, og har ikkje same fordelen av ein fleksibel tenkjer i møte med ei oppgåve med anna omformulering. Dei held seg på primærnivået av den kopla kunnskapen, med at koplinga vil halde seg innanfor same kontekst. Elevar som omdannar sin kunnskap og bind saman eigenskapar som tilsynelatande kan synast ulike, aukar sjansen for å danne ein generell strategi som dei kan nytte i møte med mange problemsituasjonar. Difor må oppgåva vere open nok til at ulike strategiar kan takast i bruk, og elevane kan danne desse koplingane. Elevane må få formulere kva dei forstår i ord, dele denne med andre, få reaksjonar og kunne drøfte det ein forstår og ikkje forstår. Dei må få lære gjennom språkleg samhandling. Eg vil vise til gruppeintervjuet eg hadde med Rut, Andreas, Johannes og Peter om opplegget dei hadde fått vere med på.

1.	Meg:	Korleis tykkjer de det er å arbeide ilag då?
2.	Johannes:	Det er bra. Då får vi høyre fleire av tankane våre. Og så tenkjer vi forskjellig, og får det saman, og så finn vi svaret mykje lettare. Sidan, når vi arbeidar saman, så tenkjer alle forskjellig
3.	Rut:	Ja
4.	Peter:	Og når vi får det saman, så er ein som er god på ein ting, og ein annan som er god på ein annan ting, og då blir det mykje enklare å finne ut
5.	Andreas:	Mhm
6.	Meg:	(til elev 3): Du er einig i det?
7.	Andreas:	hm?
8.	Meg:	Du tykkjer det er betre å arbeide saman du og?
9.	Andreas:	Ja, på grunn av når ein, liksom. Når ein arbeider saman, så er det samarbeid. Liksom at, at når du tenkjer på ein anna måte, så lærar du av den andre, og den andre lære av deg.

I teorien har eg støtta meg mykje på *sosialkonstruktivismen* sitt syn på danning av kunnskap. Dette er eit omgrep eg har vorte godt kjent med desse to åra på masterutdanninga, og lese mykje om, men eg har ikkje fått sett teorien så godt på prøve som no. Sosialkonstruktivismen har vore ei stor større i å forklare korleis diskusjon og opne oppgåver opnar opp for at læring kan skje. Det har og vore til stor hjelp for å forklare og analysere elevane sin strategibruk.

I tillegg har Lamon sine omgrep om proporsjonalt resonnement vore viktige i mi oppgåve. Dette var noko eg ynskja å lære meir om når eg byrja med denne oppgåva, og som eg hadde lese noko om i arbeidet med essayet om Regula de tri. Omgrepet har vore ein stor støtte for å kunne vurdere og analysere kva elevane har gjort. Omgrepet har gjeve meg andre omgrep for å forklare kvifor elevane eventuelt resonnerer proporsjonalt eller ikkje, og korleis dei resonnerer. Her har og Hines og McMahon si omgrep, vore sentralt for å vise til kva eg legg i utvikling mot proporsjonalt resonnement.

Eg har og hatt nytte av teori kring opne oppgåver for å forklare korleis desse opnar opp for at læring kan skje, jamfør eit sosialkonstruktivistisk syn på læring. Då har særleg Miyakawa og

Winsløw sin presentasjon av ein japansk undervisningstime vore til hjelp for å setje meg inn korleis ein arbeider med ei open oppgåve (Miyakawa & Winsløw, 2009). Her har også *strategi* vorte aktuelt, og det har fått meg til å betre forstå korleis elevar arbeider med matematikk når dei får bruke og utvikle eigne strategiar. Her har og særleg Tvete sin artikkel vore meg til hjelp i forkant og under arbeidet med oppgåva (Tvete, 2006).

Det eg har funne er relevant for skulen, elevane og læraren. Å arbeide med opne, kontekst baserte oppgåver om proporsjonalitet kan vere ein innfallsvinkel å bruke for at elevane skal utvikle proporsjonalitet. Og som det er påpeika, vil fordelen av å lære dette vere verd all den tid det tek. Når ein brukar ei slik type oppgåve er det viktig at dei byggjer på ein truverdig kontekst, er matematisk rik nok for bruk av varierte strategiar, og at det blir lagt opp til diskusjon kring desse strategiane. Om ein fylgjer den japanske undervisningsforma med at læraren vel ut dei strategiane som vert sett under debatt kan ein hjelpe elevane med refleksjonar og fokus på kva dei har lært i timen. Dette er ein undervisningsform eg sjølv ynskjer å praktisere og lære meir om.

Når eg ser tilbake på kva eg har gjort er det særleg ein ting eg skulle gjort annleis. Framfor å gjeve elevane ei ny oppgåve i den tredje økta, sjølv om den og var gjennomtenkt og gav grobotn for proporsjonalt resonnement (Fosnot & Jacob, 2007), ville eg gjeve dei ei ny oppgåve kor dei skulle finne ut kva som var det beste kjøpet. Oppgåva ville vore ”Hjå Rema kan ein kjøpe kjekspakkinga Dots som inneheld 16 kjeks for kr 16,80. Like ved står ei Oreopakke med 12 kjeks for kr 13,20. Hilde lurer på kva pakke som gjev mest kjeks for pengane, kan du hjelpe ho?”. Med å late elevane løyse ei slik oppgåve ville eg opna opp for at dei fekk bruke strategiane dei hadde utvikla i dei to første øktene, og slik undersøkt om kva val dei hadde då gjort. Ville elevane gå tilbake til å gå om ein, eller ville nokre bruka unitizing?

Ein må hugse på at det å utvikle proporsjonalt resonnement er ein langtekkeleg prosess, som ein ikkje kan rekne med å sjå ferdige resultat av etter berre nokre veker. Likevel har mine funn verdi med at dei syner at elevar er i stand til å utvikle gode strategiar for løysing av oppgåver kor dei vanlegvis ville gått om ein. Ein må og hjelpe elevane til å utvikle og uttrykkje desse strategiane matematisk. Med bruk av doble tal linjer, eller ein forholdstabell kan ein hjelpe elevane til å klårgjere for seg sjølve kva forhold dei brukar i sine strategiar. Og det er kanskje noko av det eg har lært mest om i denne oppgåva, korleis ein kan leggje til rette for at elevane kan utvikle proporsjonalt resonnement. Arbeidet med denne oppgåva har fått meg til reflektere over både korleis oppgåvene, og strukturen over ein matematikktime kan fremje læring. Eg har og lært mykje om korleis ein kan hjelpe elevane til å modellere sine strategiar, og kvifor nettopp doble tal linjer og forholdstabellar og liknande kan vere til god hjelp for dette.

6. Kjelder

Ahl, Valerie Allen, Colleen, F. Moore, & James, A. Dixon. (1992). Development of intuitive and numerical proportional reasoning. *Cognitive Development, 7*(1), 81-108. doi: Doi: 10.1016/0885-2014(92)90006-d

Anghileri, Julia. (2006). Teaching Number Sense (Vol. 2, pp. 84-105). London.

Ben-Chaim, David, James, T. Fey, William, M. Fitzgerald, Catherine, Benedetto, & Jane, Miller. (1998). Proportional Reasoning among 7th Grade Students with Different Curricular Experiences. [Article]. *Educational Studies in Mathematics, 36*(3), 247-273.

Boyer, Ty W., Levine, Susan C., & Huttenlocher, Janellen. (2008). Development of Proportional Reasoning: Where Young Children Go Wrong. [Article]. *Developmental Psychology, 44*(5), 1478-1490. doi: 10.1037/a0013110

Brekke, Gard. (2001). Videregåande opplæring. Grunnkurs. Tal og talrekning *Kartlegging av matematikkforståelse*: Læringssenteret

Clark, Matthew R., Berenson, Sarah B., & Cavey, Laurie O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 297-317. doi: Doi: 10.1016/s0732-3123(03)00023-3

Cohen, Louis, Manion, Lawrence, & Morrison, Keith. (2007a). Case studies. I Louis Cohen, Keith Morrison & Lawrence Manion (Eds.), *Research methods in education* (pp. 253-263). London: Routledge.

Cohen, Louis, Manion, Lawrence, & Morrison, Keith. (2007b). Content analysis and grounded theory. I Luouis Cohen, Lawrence Manion & Keith Morrison (Eds.), *Research methods in EDUCATION* (Vol. 6, pp. 475-495). Abingdon: Routlegde.

Dixon, James A. (2005). Mathematical problem solving: the roles of exemplar, schema, and relational representations. I Jamie I.D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical Cognition* (pp. 379-396). New York: Psychology Press

Dysthe, Olga. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I Olga Dysthe (Ed.), *Dialog, samspel og læring* (Vol. 4, pp. 33-72). Oslo: Abstrakt forlag.

Ernest, Paul. (2006). Reflections on theories of learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(1)*, 3-7.

Ernest, Paul. (Udatert). Social constructivism as a philosophy of mathematics. 1-17.

Fantini, Roberta, & Gherpelli, Loredana. (2008). Problem situations to promote proportional reasoning: solving strategies by students aged 11-14. I Bronisław Czarnocha (Ed.), *Handbook of Mathematics Teaching Research:Teaching Experiment - A Tool for Teacher-Researchers* (pp. 273-286). Kraków: Drukarnia Cyfrowa KSERKOP.

Fosnot, Catherine Twomey, & Jacob, Bill. (2007). Best buys, ratios, and rates *Contexts for Learning Mathematics*. Portsmouth: Heinemann.

Fuson, Karen C., & Abrahamson, Dor. (2005). Understanding ratio and proportion as an example of the apprehending zone and conceptual-phase problem-solving models. I Jamie I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 213-234). New York: Psychology Press.

Hiebert, James, & Lefevre, Patricia. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I James Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27): Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hines, Ellen, & McMahon, Mary T. (2005). Interpreting Middle School Students' Proportional Reasoning Strategies: Observations From Preservice Teachers. [Article]. *School Science & Mathematics, 105*(2), 88-105.

Jaworski, B. (1994). Constructivism: A philosophy of knowledge and learning *Investigating mathematics teaching. A constructivist enquiry.* (pp. 14-35). London: Falmer. Press.

Lamon, Susan J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.
Lamon, Susan J. (1994). Ratio and Proportion; Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. I Guershon & Jere Confrey Harel (Ed.), *The Development of MULTIPLICATIVE REASONING in the Learning of Mathematics* (pp. 89-122). New York: State University of New York Press.
Lamon, Susan J. (2002). Part-Whole Comparisons with Unitizing. I Bonnie Litwiller & George W. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions* (pp. 79-86). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
Lamon, Susan J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.
Lamon, Susan J. (2007). Rational numbers and proportional reasnoing: toward a theoretical framework for research. I Frank Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668): Information age publishing, NC: Charlotte.
Mercer, Neil. (1992). Culture, context and the construction of knowlegde in the classroom. I Paul Light & George Butterworth (Eds.), *Context and cognition: ways of learning and knowing* (pp. 28-36). New York: Harvester Wheatsheaf.
Misailidou, Christina, & Williams, Julian. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 335-368. doi: Doi: 10.1016/s0732-3123(03)00025-7
Misailidou, Christina, & Williams, Jullian. (2004). *Helping Children to Model Proportionally in Group Argumentation: Overcoming the "Constant Sum" Error*.
Miyakawa, Takeshi, & Winsløw, Carl. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". [Article]. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 199-218. doi: 10.1007/s10649-009-9188-y
Moore, Colleen F., Dixon, James A., & Haines, Beth A. (1991). Components of Understanding in Proportional Reasoning: A Fuzzy Set Representation of Developmental Progressions. [Article]. *Child Development, 62*(3), 441-459. doi: 10.1111/1467-8624.ep9109090172
Moskal, Barbara M, & Magone, E. Maria. (2002). Making Explicit What Students Know about Representing Fractions. I Bonnie Litwiller & George W. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions* (pp. 121-129). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
Nohda, Nobuhiko. (1991). Paradigm of the open-approach method in mathematics teaching. *ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 23*, 32-37.
Postholm, May Britt. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforl.
Schliemann, Analùcia Dias, & Carraher, David William. (1992). Proportional reasoning in and out of school. I Paul Light & George Butterworth (Eds.), *Context and cognition: ways of learning and knowing* (pp. 47-73). New York: Harvester Wheatsheaf.
Shimada, Shigeru. (1997). The Significanse of an Open-Ended approach. I Jerry P. Becker & Shigeru Shimada (Ed.), *The Open-Ended Approach: A new Proposal for Teaching Mathematics* (pp. 1-9). Reston: THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS.
Siegler, Robert S, & Jenkins, Eric. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
Singer, Janice Ann, & Resnick, Lauren B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics, 23*(3), 231-246. doi: 10.1007/bf02309531
Smith, John P. (2002). The development of Student's Knowlegde of Fractions and Ratios. I Bonnie Litwiller & George W. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions* (pp. 3-17). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
Tvete, Kjartan. (2006). "Blir det gange eller dele her, lærer? *Stifinneren, 5,* 41-54.

Van Den Heuvel-Panhuizen, Marja. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35. doi: 10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vedeler, Liv. (2000). *Observasjonsforskning i pedagogiske fag: en innføring i bruk av metoder*. Oslo: Gyldendal akademisk.

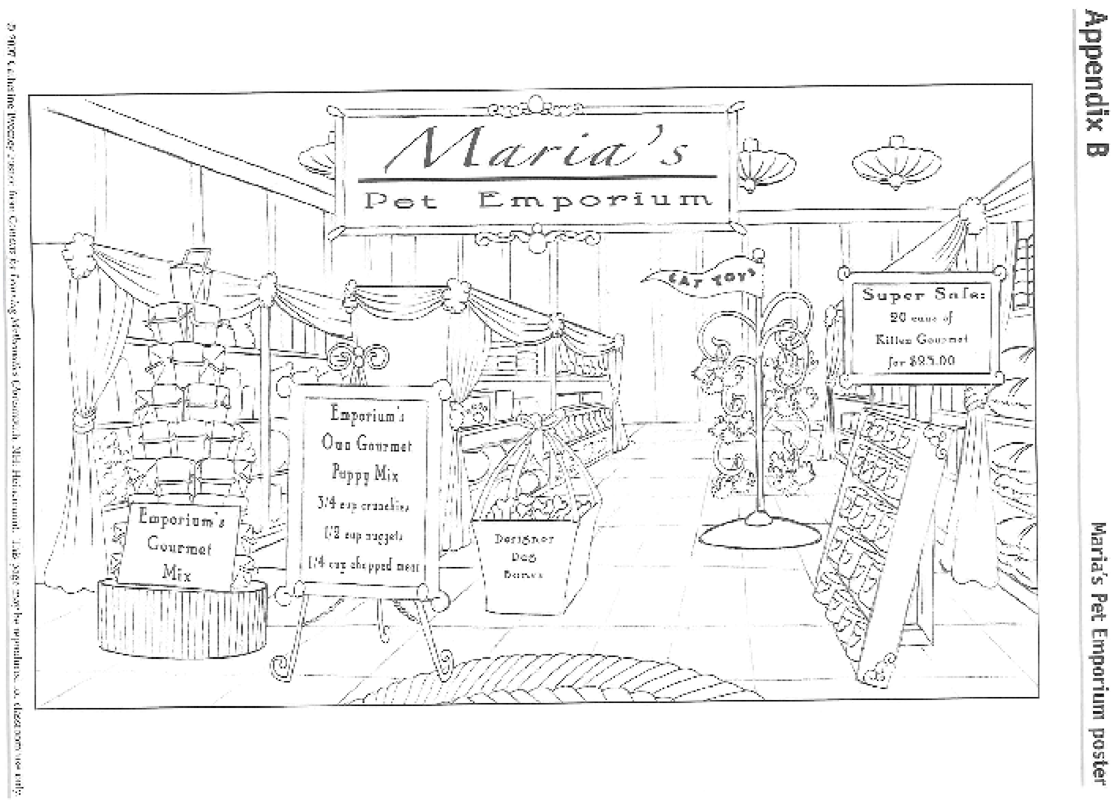
Weber, Keith, Maher, Carolyn, Powell, Arthur, & Lee, Hollylynne Stohl. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Springer Science, 68*, 247-261. doi: 10.1007/s10649-008-9114-8

Wood, Terry, Cobb, Paul, & Yackel, Erna. (1995). Reflections on Learning and Teaching Mathematics in Elementary School. I Leslie P. Steffe & Jerry Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 401-422). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Zack, Vicki, & Graves, Barbara. (2001). Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the z minus three seems pretty weird.". I C. Kieran, E. Forman & A. Sfard (Eds.), *Bridging the individual and the social: Discursive approaches to research in mathematics education.* (Vol. 46 (1-3), pp. 229-271): Educational Studies in Mathematics.

7. Vedlegg


Appendix A
Bob's Best Buys poster
BOB'S BEST BUYS
This Week Only
12 Cans of Kitten Gourmet for $15.00
BIRD SEED
Grab a Bag OR Scoop Your Own
Squeak Toy CLEARANCE
BEST BUYS, RATIOS, AND RATES
71


Appendix B
Maria's Pet Emporium poster
Maria's
Pet Emporium
CAT TOYS
Super Sale:
20 cans of Kitten Gourmet for $25.00
Emporium's Own Gourmet Puppy Mix
3/4 cup crunchies
1/2 cup nuggets
1/4 cup chopped meat
Emporium's Gourmet Mix
Designer Dog Bones