Master i matematikkdidaktikk

Masteroppgave

Terje Ringheim

Intuitive løysingsstrategiar for divisjon

Ein kvalitativ studie av korleis elevar på 5.trinn løyser divisjonsoppgåver

Trondheim, november 2011

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Terje Ringheim

Intuitive løysingsstrategiar for divisjon
Ein kvalitativ studie av korleis elevar på 5.trinn løyser divisjonsoppgåver

Intuitive solution strategies for division
A qualitative study of how year 5 students solve division problems

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk
Trondheim, november 2011

Veileder:	Frode Rønning

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Innhald

1. Innleiing

1.1 Bakgrunn

”Me kan ikkje å setja opp deling, so då vert det ekstra vanskeleg. Viss me hadde kunna det…” Kyrre, elev på 5.trinn, skulle gjerne ha kunna langdivisjonsalgoritmen (Alseth, Nordberg, & Røsseland, 2008, s. 83; Weisstein, u.å.). Den har han ikkje lært, ikkje enno. So kva gjer han då?

I grunnskulen er aritmetikken kanskje den viktigaste greina av matematikken, og mykje av matematikktida på barnetrinnet vert brukt på dei fire rekneartane. Å kunna rekna er eit av dei fem hovudområda som går att i alle fag, og frå læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, u.å.) finn ein:

> Å kunne rekne i matematikk utgjer ei grunnstamme i matematikkfaget. Det handlar om problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt i praktiske, daglegdagse situasjonar og matematiske problem. For å greie det må ein kjenne godt til og meistre rekneoperasjonane, ha evne til å bruke varierte strategiar, gjere overslag og vurdere kor rimelege svara er. (Utdanningsdirektoratet, u.å.)

Som ein ser inngår både problemløysing og det å kunna meistra rekneoperasjonane i det å kunna rekna i matematikk. Elevane skal òg kunna bruka varierte strategiar, som må bety å bruka føremålstenlege strategiar for den enkelte situasjonen.

Frå eiga erfaring veit eg at skriftlege standardalgoritmar for dei fire rekneartane har stått sterkt i skulen, og desse er framleis sentrale (Alseth et al., 2008; Rasch-Halvorsen, Rangnes, & Aasen, 2007b). Eigne observasjonar viser imidlertid at desse standardalgoritmane kan vera vanskelege å forstå, og å bruka utanom skulen. Dette gjeld kanskje spesielt for divisjon. Det er ikkje tvil om at standardalgoritmane, brukt riktig, er kraftige verkty. Dei har vorte utvikla og komprimerte gjennom lange tider for å oppfylla denne rolla som eit kraftig verkty. Men kanskje er det nettopp denne komprimeringa som både gjer dei så vanskelege å forstå og læra, og dermed òg å hugsa.

Thompson (1999, s. 170) meiner tidleg innføring av formelle skriftlege utrekningsmetodar er ein av hovudgrunnane til at Storbritannia har prestert dårlegare enn ynskjeleg på internasjonale rekneprøvar. I kjølvatnet av dette vart det argumentert for eit auka behov for å vektlegga hovudrekning. Det vart hevda at dei skriftlege metodane byggjer på dei mentale metodane. I fylgje Thompson er det imidlertid fleire studiar som tilbakeviser dette. Han forklarer at i skriftlege standardalgoritmar handsamar ein tala siffervis. Dette står i motsetnad til hovudrekning, der det er meir vanleg å handsama tala heilskapleg.

I kognitiv læringsteori oppstår læring når det nye ein erfarer ikkje passar direkte med det ein kan frå før. Ein må då omstrukturera på det ein kan frå før slik at dette og det nye ein lærer passar saman. Det er denne omstruktureringa som er læring (Hundeide, 1985). Dette vil seia at ein må ta utgangspunkt i elevane sine uformelle og intuitive strategiar og vidareutvikla desse i prosessen fram mot det å læra ein standardalgoritme. Som lærar er det difor interessant å vita noko om kva løysingsstrategiar elevar brukar for divisjon før dei har lært langdivisjonsalgoritmen. Ved å ha kunnskap om dette kan ein leggja til rette for at elevane skal kunna forstå bakgrunnen for standardalgoritmen og korleis den fungerer.

1.2 Forskingsspørsmål

Av ovannemnde grunnar vil eg i denne masteroppgåva difor granska kva løysingsstrategiar elevar som ikkje har lært langdivisjonsalgoritmen brukar i arbeid med divisjonsoppgåver. Det er skrive mykje om kva modellar born har og korleis dei forstår divisjon (Correa, Nunes, & Bryant, 1998; Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Squire & Bryant, 2003). Anna forsking har konsentrert seg om løysingsstrategiar for divisjonsoppgåver og knytt dette til semantisk struktur i oppgåvene, og skilnaden mellom delings- og målingsdivisjon (Anghileri, 2001; Downton, 2009; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Neuman, 1999). Denne tidlegare forskinga dreier seg i stor grad om divisjonar som ligg innanfor den vesle multiplikasjonstabellen. Fordi eg er interessert i å sjå korleis elevar som ikkje har lært langdivisjonsalgoritmen løyser divisjonar som det ville vore naturleg å nytte denne på, brukar eg tal som er større enn at dei inngår i den vesle multiplikasjonstabellen.

Føremålet med denne masteroppgåva er todelt. Det eine målet er å skildra løysningsstrategiane elevar som ikkje har lært nokon divisjonsalgoritme brukar for å løysa større divisjonsoppgåver, både tekst- og taloppgåver. Det andre målet er å finna om det er samanheng mellom semantisk struktur i oppgåva og løysingsstrategien desse elevane vel. For å finna dette nyttar eg fylgjande forskingsspørsmål:

> *Kva kjenneteiknar intuitive løysingsstrategiar elevar på 5.trinn har for divisjon?*
> *Kva samanheng kan ein finna mellom semantisk struktur i oppgåver og løysingsstrategi for tekstoppgåver med divisjon?*

Ein intuitiv løysingsstrategi for ei oppgåve vil her seia ein løysingsstrategi som elevane kjem fram til på eiga hand, før dei har vorte undervist ein algoritme spesielt for ein slik type oppgåver. Omgrepet løysingsstrategi inneheld både prosessen med å identifisera riktig operasjon og sjølve utrekninga. I det å identifisera rett operasjon ligg det å innsjå at ”Dette vert best modellert gjennom divisjon”.

1.3 Presentasjon av teorigrunnlag og forskingsmetode

I denne masteroppgåva har eg valt eit kognitivt perspektiv på kunnskap og læring. Her er det sentralt at den enkelte konstruerer sin kunnskap og forståing gjennom eigne oppdagingar. Forskingsspørsmålet mitt omhandlar intuitive løysingsstrategiar. Dette knyter eg til elevane sine kognitive strukturar. Innanfor kognitiv læringsteori har språket ei svært avgrensa rolle i det å konstruera kunnskap. I denne masteroppgåva kan eg imidlertid ikkje sjå bort frå språket fordi det saman med elevane sine handlingar er dei einaste kanalane som gir meg tilgang til elevane sine tankar. Språket får dermed ei heilt sentral rolle i datainnsamlinga.

Vidare i teorikapitlet presenterer eg multiplikasjon og divisjon, og ulike semantiske strukturar i situasjonar som omhandlar multiplikasjon og divisjon. Her er Nunes og Bryant (1996) og Greer (1992) sentrale. Eg presenterer òg tidlegare forsking rundt intuitive modellar og løysingsstrategiar, og støttar meg spesielt til Mulligan og Mitchelmore (1997) og Neuman (1999), samt pionerane på dette feltet, Fischbein et al. (1985).

Datainnsamlinga er gjort med seks elevar i to grupper på 5.trinn, der kvar gruppe jobba to økter med oppgåver laga til forskingsspørsmåla mine. Under datainnsamlinga brukte eg observasjon som metode, der eg var ein deltakande observatør. I tillegg til å ta notat under observasjonen, videofilma eg alle desse fire arbeidsøktene, slik at eg kunne transkribera dialogen, og også gå attende og sjå meir på det elevane sa og gjorde under observasjonen. Meir utdjupande om dette og vala mine kjem i kapittel 3. Metode.

1.4 Oppbygging av oppgåva

Denne masteroppgåva har fylgjande kapittel: teori, metode, analyse av oppgåvene eg gav elevane og av data frå skulen, og avslutning.

I teorikapitlet vil eg presentera og drøfta teorien som ligg til grunn for mine granskingar. Deretter vil eg i metodekapitlet skildra og grunngi dei metodiske vala eg har teke for å få svar på forskingsspørsmåla mine. Eg vil òg skildra analysemetoden eg har brukt og drøfta validiteten i datamaterialet mitt.

Hovuddelen av oppgåva er analysekapitlet. Her vil eg byrja med å sjå på korleis norske lærebøker framstiller divisjon, før eg grunngir utforminga av, og presenterer oppgåvene eg brukte i datainnsamlinga. Deretter vil eg presentere resultata frå analysen min og grunngi desse ved å vise til og analysera episodar frå elevane sitt arbeid. Sist i analysekapitlet vil eg samanfatta resultata mine, før eg diskuterer dei didaktiske implikasjonane desse har for skulen og meg som lærar i det siste kapitlet, kalla didaktiske refleksjonar.

2. Teori

I dette kapitlet vil eg presentera kognitiv læringsteori som er grunnteorien i denne masteroppgåva. Vidare presenterer eg meir spesifikk teori og relevant forsking, fyrst knytt til multiplikasjon og divisjon, og deretter om intuitive modellar og løysingsstrategiar for divisjon.

2.1 Kognitiv læringsteori og konstruktivisme

Intuitive løysingsstrategiar er eit sentralt omgrep i det fyrste forskingsspørsmålet mitt, og dermed gjennomgåande i denne masteroppgåva. Eg knyter dette til enkeltindivid, og støttar meg difor til kognitiv læringsteori i denne masteroppgåva. Eg fokuserer på læring som ”elevens indre prosessar” (Dysthe, 2001, s. 35). Konstruktivismen er det elementet av kognitivismen som har fått størst innverknad på synet på læring. Her legg ein vekt på at individet ikkje tek imot informasjon passivt, men gjennom sine aktivitetar sjølv konstruerer si forståing av omverda. Den amerikanske versjonen av kognitivismen har fått kritikk mellom anna av Jerome Bruner fordi ”…spørsmålet om hvordan mennesker skaper og reproduserer mening, forståelse og betydning, i denne tradisjonen ganske raskt ble redusert til et spørsmål om hvordan de behandler informasjon” (Säljö, 2001, s. 57-58). Sveitsiske Jean Piaget stod for ein annan retning innan kognitivismen, kalla det piagetianske utviklingssynet. Også her er det konstruktivistiske synet på tenking og læring heilt sentralt (Säljö, 2001, s. 60).

Konstruktivistisk læringsteori ”er den viktigaste læringsforståinga ut frå Piaget-tradisjonen innanfor kognitiv teori” (Dysthe, 2001, s. 37). Her ser ein læring som utvikling frå enkle til stadig meir komplekse modellar.

> Ifølgje kognitiv læringsteori, inspirert spesielt av Piaget, er læring altså ein aktiv konstruksjonsprosess der elevane tar imot informasjon, tolkar han, knyter han saman med det dei alt veit, og reorganiserer dei mentale strukturane om det er nødvendig for å passe inn ny forståing. Evne til å tenkje og forme omgrep veks ut av situasjonar der den lærande sjølv prøver seg fram og er aktiv, heller enn ved å absorbere det andre seier. (Dysthe, 2001, s. 38)

Piaget meiner at det ikkje berre er kvantitative skilnadar, men òg kvalitative skilnadar mellom ein vaksen og eit barn sine måtar å tolka, forstå og resonnera på. At ein utviklar seg kognitivt vil seia at ein gjer seg erfaringar som korrigerer verdsbiletet og dermed utviklar intellektet (Säljö, 2001, s. 61). "Det er når barnet er aktivt, når det er fysisk og intellektuelt engasjert i sine omgivelser, og når det manipulerer og undersøker dem, at det utvikler sine evner. Ifølge Piaget oppstår tenking gjennom fysisk praksis på det sensomotoriske stadiet" (Säljö, 2001, s. 62). I undervisingsfilosofien som vaks fram etter Piaget var det sentralt at borna skulla gjera erfaringar på eiga hand, utan inngrep og forklaringar frå vaksne. Her skil konstruktivismen seg frå det sosiokulturelle perspektivet ved at ein i sosiokulturell teori ikkje ser på den abstrakte kunnskapen som lagra i objekta eller hendingane. Kunnskapen ligg derimot i våre skildringar og analysar av objekta og hendingane (Säljö, 2001, s. 63-64). Barnet er egosentrisk i den forstand at det oppfattar hendingar og objekt ut frå sitt eige utgangspunkt (Säljö, 2001, s. 67). "I et piagetiansk perspektiv er tenkinga grunnleggende, og de kognitive strukturene blir utviklet uavhengig av språket. Språket tillater oss å ta imot informasjon – å assimilere – men bare i den utstrekning informasjonen stemmer med våre kognitive strukturer" (Säljö, 2001, s. 68).

Som nemnt ovanfor ser ein i konstruktivistiske teoriar på kunnskap som konstruert av det enkelte individ. Kunnskapen består av forståingskategoriar, eller kognitive skjema. Når ein står overfor nye idear er det to alternativ. Det eine er at ein tolkar det ein veit inn i allereie eksisterande skjema, kalla assimilasjon. Det andre alternativet er at det nye ikkje passar med dei eksisterande skjema, og at skjema må endrast, kalla akkommodasjon. I møte med noko nytt assimilerer ein fyrst det nye inn i eksisterande skjema. Vidare vert denne assimileringa testa opp mot realiteten, og dersom den ikkje stemmer kollapsar den, og nye skjema må utviklast for at det skal skje ei tilpassing. Sentralt her er at desse nye skjema eller strukturane er konstruert av individet sjølv i ein naturleg interaksjon mellom individ og omgjevnadar (Hundeide, 1985, s. 16-18).

Læring oppstår når individet kjem i ei kognitiv konflikt, altså at det nye ikkje passar med eksisterande skjema. Dersom realitetstestinga etter assimileringa ikkje stemmer, må det skje ei ny assimilering eller det må dannast nye skjema "….ved å kombinere og samordne de skjemaer som allerede er til stede i den indre struktur" (Hundeide, 1985, s.

19). Ei slik nydanning av skjema vert kalla ekvilibrasjon fordi den skaper balanse, eller ekvilibrium, mellom assimilering og akkommodering. Den kognitive utvilklinga går frå ein tilstand av lågare til høgare grad av ekvilibrium med omgjevnadane, der ein aktivt kompenserer for å finna samsvar mellom ytre handling og indre struktur (Hundeide, 1985, s. 18-20). Vidare skil ein mellom fysisk og logisk læring. Ein kan læra seg fysiske, ytre trekk ved ein ting, som til dømes at hovudstaden i Noreg heiter Oslo. Dette er assosiativt og nær knytt til fysiske eigenskapar ved ein ting, og vert kalla fysisk læring. At 5+2 er det same som 2+5 er derimot logisk naudsynt ut frå aritmetiske reglar. Dette byggjer på strukturar, ikkje på det spesifikke ved ein ting, og vert kalla logisk læring. Fordi fysisk læring byggjer på det spesielle og konkrete vil resultatet av fysisk læring alltid vera anten rett eller feil svar. Logisk læring byggjer derimot på det generelle og abstrakte. Om svara eit barn gjev er rett eller feil vil dermed vera avhengig av utviklinga av den kognitive strukturen (Hundeide, 1985, s. 21-24). Piaget skil òg mellom operativ og figurativ kunnskap, som handlar om skiljet mellom det spesielle og det generelle ved ein situasjon. Med operativ kunnskap ligg fokuset på det generelle, og denne kan difor nyttast også i andre situasjonar enn der det vart lært. Enkelt sagt handlar operativ og figurativ kunnskap høvesvis om forståing og attgjeving av korrekte svar (Hundeide, 1985, s. 24-25).

I fylgje Wood (1998, s. 53) er assimilasjon at ein kjenner att noko med det same. Kvar ei endring i dei mentale skjema er akkommodering, uavhengig av storleiken på endringane i det mentale skjemaet som må til for at handlinga skal kunna assimilerast inn. Handlingar vert operasjonar når dei er innbakte i system av tankar som er koordinerte og reversible (Wood, s. 54). Om ein skal læra noko nytt, må ein fyrst koma til ei kognitiv konflikt mellom det nye, og dei eksisterande skjema. Denne kognitive konflikten oppstår når ein ikkje kan assimilera det nye inn i dei allereie eksisterande skjema. Den akkommoderinga som då føregår, gjeninnfører likevekta i dei mentale skjema, og ein har då lært noko nytt (Wood, s. 58-59).

Ginsburg (1977, s. 9) poengterer at born leitar etter meiningar og forklaringar i det dei gjer. Born er på leit etter underliggande mønster og lagar reglar ut frå dette. Svara born kjem med er so godt som alltid tufta på logiske slutningar og resonnement. I fylgje (Donaldson, 1984, s. 18-19) skuldast dei feile svara born kjem med oftast at slutningane er dregne på eit mangelfullt grunnlag, og ikkje at sjølve svaret er feil. Born sin kunnskap er ikkje berre kvantitativt annleis, men òg kvalitativt annleis enn kunnskapen til vaksne.

Ifylgje Ginsburg (1977, s. 98-100) er born konservative. Med det meiner han at born held fast ved det dei kan, og prøver å tilpassa det nye til det gamle i størst mogeleg grad; det Piaget kallar assimilasjon. Ginsburg eksemplifiserer dette med at born til dømes kan omforma både subtraksjon og multiplikasjon til addisjon, eller divisjon til multiplikasjon. Born kan bruka addisjon som rekneart for å løysa oppgåver som for vaksne står fram som subtraksjons- eller multiplikasjonsoppgåver; dei assimilerer vanskelegare operasjonar inn i enklare skjema.

2.2 Multiplikasjon og divisjon som tankemodellar – multiplikativ tenking

Dei aritmetiske operasjonane multiplikasjon og divisjon skil seg frå addisjon og subtraksjon ved at det handlar om to grunnleggjande ulike måtar å tenkja om tala og forholda mellom tala på. Additiv tenking er knytt til operasjonane addisjon og subtraksjon, og handlar om situasjonar der objekt, eller mengder med objekt, vert sett saman eller skilde. Alle tydingane, eller rollene, til tala i additive situasjonar er direkte knytt til storleiken på mengdene og til handlinga med å setja saman eller skilja mengdene (Nunes & Bryant, 1996, s. 144). Teksten ”Tom har 3 gule fiskar og 5 raude fiskar i akvariet sitt. Kor mange har han til saman?” er ei mogeleg kontekstualisering av taloppgåva 3+5=8. Her viser både 3 og 5 til storleiken på ei mengd, og dei er knytt til det å setja saman desse to mengdene til éi ny mengd.

Multiplikativ tenking er knytt til operasjonane multiplikasjon og divisjon. Situasjonar som gjev opphav til multiplikativ tenking skil seg frå situasjonar som gjev opphav til additiv tenking ved at dei ikkje involverer handlinga med å setja saman eller skilja. Det handlar i staden om *forholdet* mellom mengdene (Nunes & Bryant, 1996, s. 144). Forfattarane byggjer på tidlegare forsking og skildrar vidare tre hovudtypar av multiplikative situasjonar. Desse er situasjonar som involverer *ein-til-mange-korrespondanse*, situasjonar som involverer *forhold mellom variablar*, eller situasjonar som involverer *utdeling, divisjon og splitting* (Nunes & Bryant, 1996, s. 144-145). Dette er mine omsetjingar av dei engelske omgrepa. Vidare i denne masteroppgåva vil også nytta eigna omsetjingar av dei engelske omgrepa. *Ein-til-mange-korrespondanse* handlar om å halda forholdet mellom to mengder konstant, til dømes at ein bil (mengd I) har fire hjul (mengd II), medan to bilar har åtte hjul. I multiplikativ tenking er *forholdet* mellom mengdene (mengd I: bilar og mengd II: hjul) konstant, ein til fire, medan ein i additiv tenking held *differansen* mellom mengdene konstant. *Forhold mellom variablar* er knytt til samvariasjon, til dømes at 2kg eple kostar dobbelt so mykje som 1kg eple. Igjen er *forholdet* mellom mengdene konstant. *Utdeling, divisjon og splitting* er knytt til multiplikativ tenking gjennom forholdet mellom dei tre elementa *storleiken på alt*, *antalet delar*, og *storleiken på kvar del*, til dømes ved ”12 drops skal delast på 4 born. Kor mange drops får dei kvar?”. Her er det eit direkte forhold mellom det totale antalet drops og antalet drops til kvar, medan det er eit inverst forhold mellom antalet born og antalet drop til kvar (Nunes & Bryant, 1996, s. 145-153).

2.3 Semantisk struktur i multiplikasjon og divisjon

Som ein ser ovanfor er multiplikative situasjonar eit samleomgrep som femner om både multiplikasjon og divisjon. Greer (1992) identifiserer fire ulike situasjonar som involverer multiplikasjon og divisjon med positive heiltal. På norsk har eg kalla desse situasjonane for *like grupper*, *multiplikativ samanlikning*, *kartesisk produkt*, og *rektangulært areal* (Greer, 1992, s. 276-277). *Like grupper* kan eksemplifiserast med ”3 born har 4 eple kvar. Kor mange eple har dei til saman?”. Eit døme på *multiplikativ samanheng* kan derimot vera ”Knut har 3 gonger so mange eple som Kari. Kari har 4 eple. Kor mange eple har Knut?”. Her har dei to faktorane, 3 og 4, tydeleg ulike roller. Faktoren 3, som viser til høvesvis antalet born og antalet gonger so mange, er multiplikator. Faktoren 4 viser til høvesvis antalet eple kvart barn har og antalet eple Kari har. Denne faktoren er multiplikand. Multiplikator og multiplikand vert òg kalla operator og operand, høvesvis, og viser til at operatoren opererer på operanden i prosessen fram til produktet. Ein konsekvens av denne asymmetrien mellom faktorane i *like grupper*- og *multiplikativ samanheng*-situasjonar er at ein kan identifisera to typar divisjon, her kalla delingsdivisjon og målingsdivisjon. I *kartesisk produkt* og *rektangulært areal*, eksemplifisert ved høvesvis ”Kor mange ulike antrekk kan lagast av 3 skjørt og 4 blusar?”, og ”Kor stort er arealet av eit rektangel med lengd 3cm og breidd 4cm?”, er det derimot ein symmetri mellom rollene til dei to faktorane som inngår i multiplikasjonen. På grunn av denne symmetrien er det knytt berre éin type divisjon til *kartesisk produkt*- og *rektangulært areal*-situasjonar (Greer, 1992, s. 276-277), og av den grunn er desse situasjonane ikkje tema i denne masteroppgåva.

Greer (1992) har i si forsking eksemplifisert dei to typane situasjonar, *like grupper* og *multiplikativ samanlikning*, med fylgjande oppgåver:

	Multiplikasjon	Delingsdivisjon (divisjon på multiplikator)	Målingsdivisjon (divisjon på multiplikand)
Like grupper	3 born har 4 appelsinar kvar. Kor mange har dei til saman?	12 appelsinar skal delast likt på 3 born. Kor mange får dei kvar?	Ein har 12 appelsinar. Kor mange born kan kvar få 4 appelsinar?
Multiplikativ samanlikning	Jarn er 0,88 gonger so tungt som kopar. Viss ein bit kopar veg 4,2kg, kor mykje veg ein like stor (volummessig) bit jarn?	Jarn er 0,88 gonger so tungt som kopar. Viss ein bit jarn veg 3,7 kg, kor mykje veg ein like stor bit kopar?	Viss to like store bitar kopar og jarn høvesvis veg 3,7kg og 4,2kg, kor tungt er jarn i forhold til kopar?

(Greer, 1992, s. 280, mi omsetjing)

I sin studie om skilnad i løysingsmetode for delings- og målingsdivisjon, brukar Downton (2009) fylgjande oppgåver:

	Delingsdivisjon	Målingsdivisjon
Like grupper	Eg har 48 karamellar som skal fordelast likt i 3 skåler. Kor mange karamellar vert det i kvar skål?	72 born deltek i ulike aktivitetar på idrettsbana. Det er 4 born på kvar aktivitet. Kor mange aktivitetar er det?
Gonger so mange	Per las 72 bøker i løpet av eit lesemaraton. Dette var 4 gonger so mange bøker som Olav. Kor mange bøker las Olav?	Byåsen scora 48 mål i ein handballkamp. Larvik scora 16 mål. Kor mange gonger so mange mål scora Byåsen som Larvik?

(Downton, 2009, s. 163, mi omsetjing)

Både Anghileri (1989) sin *gonger so mange* og Greer (1992) si *multiplikativ samanlikning* handlar om forholdet mellom to mengder. Ein ser på eit forholdstal, eller antalet gonger mellom to mengder. Frå oversikta ovanfor ser ein at Downton (2009) sin *gonger so mange* også handlar forholdet mellom to mengder. Også med støtte i Mulligan og Mitchelmore (1997, s. 310) finn eg at *multiplikativ samanlikning* og *gonger so mange* har det same innhaldet. Vidare i denne masteroppgåva vel eg difor å sjå dei som det same, under namnet *multiplikativ samanlikning*.

Kouba (1989, s. 148) definerer to ulike faktorar som har påverknad i samband med semantisk struktur. Den eine er strukturen i oppgåva. I denne masteroppgåva vil det seia om det er *like grupper* eller *multiplikativ samanlikning*. Den andre faktoren handlar om kva for eit av tala i oppgåva som er den ukjende, altså om det er ei multiplikasjons-, delingsdivisjons- eller målingsdivisjonsoppgåve.

2.4 Divisjon og multiplikasjon

Greer (1992, s. 276) brukar namna *partitive* og *quotitive* om dei to typane divisjon, men viser òg til *sharing division* og *measurement division*. Desse viser slektskapen mellom dei to ulike strukturane, og handlingane, å dela likt og det å måla noko. Andre namn som vert brukt er *distribution* og *ratio* (Freudenthal, 1973), og *sharing* og *subdividing* (Treffers & Buys, 2008). I denne masteroppgåva brukar eg dei norske omgrepa delingsdivisjon og målingsdivisjon. Ved delingsdivisjon skal ein finna antalet element i kvar mengd når ein veit det totale antalet element og antalet mengder, til dømes ”Kor mange eple vert det til kvar når 3 gutar skal dela 12 eple?”. Målingsdivisjon handlar om å finna antalet mengder når ein veit det totale antalet element og antalet element i kvar mengd, noko ”Kor mange posar vert det når 12 eple skal pakkast i posar med 3 eple i kvar?" er eit døme på. Greer definerer òg ”…partition as division by the multiplier, and quotition as division by the multiplicand” (Greer, 1992, s. 286). Dette er i tråd med definisjonane eg brukar av multiplikator og multiplikand i denne masteroppgåva.

Anghileri (1989, s. 368) skil mellom den aktive forma ”times” og den passive forma ”multiplied by” som tydinga til multiplikasjonsteiknet i matematiske symboluttrykk. Ho viser til anbefalingar om at det er matematisk mest korrekt å bruka uttrykket ”multiplied by”, men erfarer samstundes at både lærarar, vaksne og born oftast brukar ”times”. Frasen ”multiplied by” er sett på som mest matematisk korrekt fordi dette stemmer overeins med konvensjonane for addisjon, subtraksjon og divisjon. Kvar frase indikerer då at det andre talet i uttrykket opererer på det andre. Dersom ein les uttrykket ”$a \bullet b$” som ”a multiplied by b” er det b som er operator. Om ein på den andre sida les ”a times b” er a operator. Frasen ”times” medfører at den fyrste faktoren er operator, medan det med ”multiplied by” er den andre faktoren som er operator. Også på norsk brukar ein uttrykka ”multiplisert med” og ”gonge”. Her verkar ”multiplisert med” vera det matematisk mest korrekte, medan ”gonge” likevel verkar å vera det mest brukte både i skule og i daglegtale. Som vist ovanfor skulle det engelske språket framkalla to ulike tolkingar av kva for ein av faktorane *a* eller *b* i *a* • *b* som er operator og operand. På norsk verkar det imidlertid å vera so lite konsensus at dei to uttrykka ”a gonger b” og ”a multiplisert med b” framkallar fire ulike meiningar om kva for ein faktor som er operator og operand. Med dette meiner eg at i kvart av dei to uttrykka ovanfor kan ein anten tolka *a* til å vera operator, eller tolka *b* til å vera operator. Neuman (1999, s. 111) poengterer òg at ”to Swedish children 10x4 does not mean 10 multiplied by 4, but 10 times 4: 10 fours”, som betyr at den fyrste faktoren er operator. Norske lærebøker i matematikk for barnetrinnet framhevar ei kopling mellom multiplikasjon og gjentatt addisjon. Denne koplinga vert til dømes gjort med kommentaren ”3 toere! Skriv 3 • 2”, og reknestykket 2 + 2 + 2 = 3 • 2 = 6 (Alseth, Kirkegaard, Nordberg, & Røsseland, 2006a, s. 96; Bakke & Bakke, 2006a, s. 28; Rasch-Halvorsen, Rangnes, & Aasen, 2006, s. 116). Dette betyr at med matematisk symbolspråk skal multiplikasjonen *a* • *b* forståast som $\underbrace{b+b+\cdots+b}_{a}=\sum_{i=1}^{a} b$, der *a* skal oppfattast som multiplikator (operator) og *b* er multiplikand (operand). Vidare i denne masteroppgåva brukar eg denne definisjonen. Anghileri (1989, s. 369) poengterer at eventuelle vanskar med å tolka symbola berre gjer seg gjeldande i skriftlege symboluttrykk. I reelle situasjonar, eller tekstar, vil tala si rolle koma fram av konteksten. Det gjeld òg at multiplikasjon som aritmetisk operasjon er kommutativt; gitt at a • b = c, so gjeld òg at b • a = c. Men som vist ovanfor er ikkje denne kommutative eigenskapen ei nødvendigheit når ein ser multiplikasjon som modellar av situasjonar.

2.5 Intuitive modellar i divisjon

Fischbein et al. (1985) såg frå tidlegare studiar at tekstoppgåver med multiplikasjon og divisjon varierte sterkt i vanskegrad ut frå dei spesifikke tala i oppgåvene og rolla desse tala hadde, trass i at oppgåvene elevane fekk hadde same innhald. Dette leidde dei til fylgjande hypotese for sin studie:

> Each fundamental operation of arithmetic generally remains linked to an implicit, unconscious, and primitive intuitive model. Identification of the operation needed to solve a problem with two items of numerical data takes place not directly but as mediated by the model. The model imposes its own constraints on the search process. (Fischbein et al., 1985, s. 4)

Fischbein et al. (1985) seier vidare at dei trur at ”…the concept of an *intervening intuitive modell* may explain in a coherent fashion most of the common difficulties children encounter when attempting to solve a problem requiring a single operation” (Fischbein et al., 1985, s. 5, utheving i original). Dei meiner vidare at dei intuitive modellane berre kjem til uttrykk gjennom elevane sine handlingar. ”…when trying to discover the intuitive model that a person tacitly associates with a certain operation, one has to consider some practical behavior that would be the enactive, effectively, performable counterpart of the operation” (Fischbein et al., 1985, s. 5). Dette stemmer med det Piaget seier at kvar mentale operasjon oppstår i praktiske situasjonar. Men i motsetnad til Piaget meiner forfattarane her at den aktive prototypen av ein aritmetisk operasjon held fram med å vera urokkeleg knytt til omgrepet lenge etter at omgrepet har oppnådd formell status. For divisjon konkluderer forfattarane med at den intuitive modellen er delingsdivisjon, og at målingsdivisjon som modell er resultat av undervisning (Fischbein et al., 1985, s. 14).

Kouba (1989) brukar *løysings*-strategiar for å definera intuitive modellar. Desse *løysings*-strategiane kategoriserer ho ut frå (I) grada av abstraktheit og (II) bruken av fysiske objekt. Grad av abstraktheit vil seia *direkte representasjon*, *dobbel teljing* (å kunna telja og halda styr på heile mengda og delmengder samstundes), *overgangsteljing* (å telja med multiplum av ein av faktorane), *gjentatt addisjon eller subtraksjon*, og *hugsa talfakta*. Bruken av fysiske objekt er at eitt objekt representerer eitt element, at eitt objekt representerer éi mengd, eller ingen bruk av fysiske objekt (Kouba, 1989, s. 151-153). Frå denne studien konkluderte ho med at det var tre intuitive modellar for delingsdivisjon, og to intuitive modellar for målingsdivisjon. For delingsdivisjon var desse *deling ved utdeling* (eit antal objekt tilsvarande dividenden vert delt ut eitt og eitt til dividenden er oppbrukt), *deling ved gjentatt borttaking* (byrja med eit antal objekt likt dividenden, gjetta kor mange objekt det er i kvar delmengd og subtrahera like grupper tilsvarande dette til dividenden er oppbrukt), og *deling ved* *gjentatt oppbygging* (som i dobbel teljing). For målingsdivisjon var dei intuitive modellane *gjentatt borttaking* og *gjentatt oppbygging*, som skildra ovanfor (Kouba, 1989, s. 157).

Mulligan og Mitchelmore (1997, s. 312) definerer intuitive modellar i form av *utreknings*-strategiar (*calculation strategies*). Dette gjer dei ved fyrst å visa til tidlegare studiar om intuitive modellar, og knyta intuitive modellar til *løysings*-strategiar. Forfattarane definerer to ulike måtar å klassifisera *løysings*-strategiar på. På den eine sida handlar det om å kva *utreknings*-strategiar elevane brukar. Her ser ein på grada av abstraktheit i utrekninga. Den andre klassifiseringa handlar om bruken av fysiske objekt og korleis elevane *modellerer* situasjonane. Forfattarane argumenter vidare for at måten born modellerer ein situasjon på, anten skriftleg eller med fysiske objekt, heller reflekterer kor fortrulege dei er med ein spesiell utrekningsstrategi, enn dei fundamentale skilnadane i korleis dei strukturerer problemet på. Å definera intuitive modellar i form av *utreknings*-strategiar er difor å føretrekkja (Mulligan & Mitchelmore, 1997, s. 310-312). Etter eiga forsking konkluderte forfattarane med fire intuitive modellar for divisjon. Desse var *direkte teljing*, *gjentatt subtraksjon*, *gjentatt addisjon*, og *multiplikativ operasjon* (Mulligan & Mitchelmore, 1997, s. 318-319). Ei nærare skildring av desse vil koma under delkapittel 2.7 Reknestrategiar i divisjon.

2.6 Strategiar

Omgrepa strategi, metode og prosedyre opptrer tilsynelatande med det same innhaldet i forskingslitteraturen eg har brukt som bakgrunn for denne masteroppgåva. Eg brukar omgrepet strategi, med støtte i Siegler og Jenkins sin definisjon. Siegler og Jenkins (1989) definerer ein strategi som "…any procedure that is nonobligatory and goal directed. The nonobligatory feature is included to distinguish strategies from procedures in general" (Siegler & Jenkins, 1989, s. 11). I fylgje forfattarane er ein prosedyre noko som representerer den einaste måten å oppnå eit mål på, medan det ligg i strategien sin natur at ein har eit val. Forfattarane meiner òg at det er eit krav at strategiar er styrt av mål. Dette kravet skil strategiar frå aktivitetar som anten ikkje har til føremål å oppnå mål eller som oppfyller andre mål enn det som var tiltenkt. Vidare poengterer dei at denne definisjonen ikkje stiller eksplisitte krav om at ein strategi må vera medvite formulert eller vera produkt av medvitne eller logiske val. Dette skil òg ein strategi frå ein plan ved at planar ofte er oppfatta å i seg sjølv involvera medvit. ”Thus, we define strategies as differing from procedures in that strategies necessarily involve choice, and as differing from plans in that the choice process is not necessarily conscious” (Siegler & Jenkins, 1989, s. 12). Vidare i denne masteroppgåva er det ikkje nødvendigvis direkte samsvar mellom *løysingsstrategiar* som mitt eige omgrep, og *løysingsprosedyre*, *løysingsstrategi*, *utrekningsstrategi*, og liknande omgrep brukt av andre. I dei fylgjande avsnitta vil eg gjera meg nytte av innhaldet i desse omgrepa, og plassera dei alle under mitt omgrep *løysingsstrategiar*, der *strategi* er definert som ovanfor.

2.7 Løysingsstrategiar i divisjon

I dei fylgjande avsnitta vil eg presentera teorien eg har støtta meg til for å kategorisera elevane sine løysingsstrategiar. Her er spesielt Mulligan og Mitchelmore (1997), Neuman (1999) og Anghileri (2001) sentrale, men eg har òg støtta meg til andre forskarar. Eg skildrar nokre av kategoriane desse forskarane presenterer. Samstundes vil eg utelata kategoriar som ikkje er relevante for mitt arbeid. Mine eigne kategoriar vert presenterte og skildra i delkapitlet 3.6. Analysemetodar.

Som nemnt ovanfor definerte Mulligan og Mitchelmore intuitive modellar i form av utrekningsstrategiar. Deira kategoriar av utrekningsstrategiar var *direkte teljing*, *gjentatt subtraksjon*, *gjentatt addisjon*, og *multiplikativ operasjon* (Mulligan & Mitchelmore, 1997, s. 318-319).

Direkte teljing vil her seia å modellera situasjonen ved fyrst å telja opp eit antal konkretiseringsobjekt tilsvarande dividenden. I delingsdivisjon kan ein so suksessivt dela ut eitt og eitt objekt om gongen til eit antal mengder tilsvarande divisoren, inntil dividenden er brukt opp. I målingsdivisjon kan ein suksessivt ta bort mengder med storleik tilsvarande divisoren til dividenden er brukt opp. Generelt involverer denne strategien ei ein-til-ein-teljing av konkretiseringsobjekt.

I *gjentatt subtraksjon* byrjar ein med dividenden og subtraherer suksessivt eit antal objekt tilsvarande storleiken på mengda frå dividenden. I målingsdivisjon representerer divisoren antal element i mengda, og her kan ein difor subtrahera divisoren frå dividenden. I delingsdivisjon representerer divisoren derimot antal mengder. Her må ein difor fyrst gjetta kor mange element det skal vera i mengda, og so kontrollera om ein får null når ein subtraherer dette talet frå dividenden det antal gonger som divisoren tilseier.

Gjentatt addisjon er identisk med *gjentatt subtraksjon*, bortsett frå at i staden for å byrja med dividenden, byrjar ein på null og byggjer seg opp til dividenden. Også her kan denne metoden brukast direkte i målingsdivisjon, medan ein i delingsdivisjon fyrst må gå vegen om å gjetta kva tal som skal adderast eit antal gonger tilsvarande divisor.

Hoppteljing var ikkje ein eigen kategori, men førekom under *gjentatt addisjon* og *gjentatt subtraksjon*. *Hoppteljing* vil seia at elevane ikkje talde kvart tal i talrekkja, men talde med multiplum av eit tal, til dømes 3, 6, 9, … .

Å bruka *multiplikativ operasjon* vil seia å bruka multiplikasjon som operasjon. Dette kunne gjerast ved å gjetta kva svaret (kvotienten) skulle vera, og so kontrollera dette ved multiplikasjon. Ein annan måte å gjera dette på var å leita etter eit multiplum av divisoren som var dividenden, utan å generera heile sekvensen av multiplum. Denne kategorien av strategiar baserte seg på bruka av anten kjende eller utleia multiplikative fakta (Mulligan & Mitchelmore, 1997, s. 316-319). Alle tala i oppgåvene i den refererte studien er innanfor den vesle multiplikasjonstabellen.

Neuman (1999, s. 103) viser til Vergnaud (1983) og hans arbeid om at multiplikasjon handlar om relasjonar innanfor éin, eller mellom to målingsvariablar, og at det er meir vanleg å tenkja innanfor ein enn mellom to variablar. Neuman viser dette interesse fordi det i målingsdivisjon handlar om éin variabel, medan det i delingsdivisjon er to variablar. I ei målingsdivisjonsoppgåve, der 42 eple skal pakkast i posar med 6 eple i kvar pose, handlar både dividend og divisor om eple, og ein kan difor nytta divisoren til å måla dividenden. I delingsdivisjon, til dømes 42 eple skal delast på 6 born, har dividend og divisor ulik eining (høvesvis eple og born), og ein kan ikkje måla dividenden med divisoren. Neuman poengterer at på bakgrunn av dette er det rimeleg å anta at delings- og målingsdivisjon vert oppfatta som to ulike teljeoperasjonar.

I studien sin granska Neuman (1999) dei utrekningsmessige aspekta slik dei kom til uttrykk i målingsdivisjon, og dei situasjonsmessige aspekta slik dei kom fram delingsdivisjon. Oppgåvene ho nytta var ”Mor har baka 42 bollar. Ho pakkar desse i posar, seks bollar i kvar pose. Kor mange posar treng ho?” (måling) og ”Fire gutar skal dela 28 klinkekuler. Kor mange får dei kvar?” (deling) (Neuman, 1999, s. 107).

Målingsdivisjonen vart forstått som ein delingssituasjon der eit antal element representert av divisoren gjentekne gonger vart tekne bort frå dividenden og putta i ein pose, ein pose om gongen. Dei utrekningsmessige aspekta ved målingsdivisjonen kategoriserte Neuman (1999, s. 109) som *omvendt multiplikasjon*, *klumpar*, *gjentatt addisjon* og *teljing*. I denne masteroppgåva er det spesielt *klumpar* som er relevant. Denne klumpinga vil seia at elevane klumpar saman tal for å korta ned ein *gjentatt addisjon*-prosedyre. Eit døme var å tenkja 4 • 6 = 24, og so addera 6 tre gonger slik at summen vart 42. Neuman kommenterer òg at i denne strategien kunne elevane bruka den kommutative eigenskapen ved multiplikasjon intuitivt (Neuman, 1999, s. 111).

Dei situasjonsmessige aspekta ved delingsdivisjon kategoriserte Neuman (1999, s. 112) som *omvendt multiplikasjon*, *utdeling*, og *dividering*. Ein måte å sjå *utdeling* på var å ta bort eit tal representert av divisoren gjentekne gonger frå dividenden. I delingsdivisjon er det derimot ulik eining på dividend og divisor, og ein kan ikkje utan vidare subtrahera divisoren frå dividenden gjentekne gonger. Når utdeling vart brukt i delingsdivisjon, vart divisoren ikkje sett på som gutar, men som antal klinkekuler delt ut i kvar runde. På denne måten fekk divisoren same eining som dividenden, og ”problemet” med at dividend og divisor har ulik eining når dei er knytt til konteksten i ei delingsdivisjonsoppgåve forsvann. Ein annan måte å bruka *utdeling* på var å estimera og justera. Her gjetta eleven på kor mange klinkekuler kvar gut skulle ha, for so å sjekka om divisoren var brukt opp når dette antalet var delt ut. Viss dividenden ikkje var brukt opp, kunne eleven dela ut éi klinkekule til kvar i neste runde.

I *dividering* prøvde elevane å finna kor mykje ¼ av 28 var, som er det same som å finna 28:4. Ein måte å gjera dette på var å estimera fleire gonger, til dømes ved å seia at kvar gut vil få 10 klinkekuler. Når ein oppdagar at ikkje alle vil få dette, prøver ein til dømes med at kvar gut får 8 klinkekuler, og held fram slik til ein når det riktige svaret.

Skilnaden mellom å estimera og justera og å estimera gjentekne gonger, er at ein ikkje vurderer svaret og justerer ut frå dette, men byrjar på byrjinga att i gjentatt estimering.

Thompson (1999, s. 170) skil tydeleg mellom mentale utrekningsstrategiar og skriftlege standardalgoritmar. Han forklarer at i skriftlege standardalgoritmar handsamar ein tala siffervis, medan det er meir vanleg å handsama tala heilskapleg i hovudrekning. Standardalgoritmane byggjer på plassverdisystemet, der kvart siffer har ein verdi i kraft av at ein betraktar eit siffer og posisjonen til dette samstundes. Thompson framhevar at når ein tenkjer og fortel om operasjonane ein utfører i standardalgoritmar, refererer ein berre til sifferet, utan posisjon. Ein uttaler eksplisitt noko anna enn det som eigentleg ligg bak. Eit døme er tiarovergang i addisjon. Ein kan seia at "6 og 7 er 13. Det vert 3, og 1 i minne". Her vert 10 einarar i einarkolonnen skrive som 1 tiar i tiarkolonnen. Det er altså ikkje "1", men "1 tiar" ein refererer til. I fylgje Thompson (1999) er standardalgoritmane bygd opp slik at det er forventa at ein berre utfører handlingane. Dersom ein samstundes skal forstå heilskapen bak alt ein gjer, vert den kognitive belastninga svært stor.

Anghileri (2001) gjorde ein kvantitativ studie i England for å sjå på utviklinga i divisjonsstrategiar frå før til etter standardalgoritmen for divisjon vart innført. Ein skriftleg test med divisjonsoppgåver vart gjeven midt i og på slutten av femte årstrinn. Desse elevane vart underviste i standardalgoritmen i tida mellom desse to testane. Til saman 275 elevar på ti skular deltok på desse to testane. Testane bestod av fem taloppgåver og 5 tekstoppgåver, som alle hadde 2-, 3- eller 4-sifra dividend og 2- eller 3-sifra divisor. I svara på desse testane identifiserte Anghileri 15 strategiar som ho grupperte i åtte kategoriar:

Kategoriar:	Strategiar:
1 (D)	Bruka teljestrekar eller eit anna symbol for kvar eining.
	Gjentatt addisjon av divisor.
	Gjentatt subtraksjon av divisoren frå dividenden.
	Deling, med bilete av ein distribusjon.
2 (O)	Operera på siffera kvar for seg.
	Oppdeling av dividenden til tusenar, hundrarar, tiarar, einarar.
3 (L)	Låg-nivå-klumping; til dømes addera 30 i staden for 15.
	Dobling eller gjentatt dobling av divisor.

	Halvering av divisor eller dividend.
4 (H)	Høg-nivå-klumping; til dømes addera 150 i staden for 15.
5 (AL)	Standardalgoritme.
6 (ME)	Mental utrekning.
7 (FO)	Feil operasjon; til dømes subtraksjon i staden for divisjon.
8 (US)	Uklar strategi.
o	Ingen forsøk.

(Anghileri, 2001, s. 89-90)

I samband med denne masteroppgåva er dei to strategiane *operera på siffera kvar for seg* og *oppdeling av dividenden* under kategori 2(O), samt 5(AL) *standardalgoritme* relevante. Anghileri (2001) skildrar nokre utfordringar med å bruka desse strategiane. Ei utfordring med å bruka standardalgoritmen var at elevane kunne finna på å dela både dividenden og divisoren opp siffervis, og so dividera dividenden siffervis på tilsvarande siffer i divisoren. Eit døme på dette var 96:6. Dette vart løyst ved å ta 9:6 som vart 1, med 3 i rest, og deretter 6:6 som vart 1. Svaret vart då 11, med 3 i rest. Eit anna døme var å dela 64:16 opp i 6:1 og 4:6, eller til og med 6:1 og 6:4, fordi 4:6 ”ikkje går”. Dette var alle døme der standardalgoritmen var forsøkt brukt utan å vera forstått. Utfordringane med å dela dividenden opp i tusenar, hundrarar, tiarar, og einarar var knytt meir til ei ineffektiv talhandsaming. I utgangspunktet er dette ein grei måte å gjera det på, men tala i testen som vart gjeven gav då ikkje divisjonar som gjekk opp. Eit døme er 1254:6. Då dette vart delt opp i 1000:6 og 200:6, fekk ein to divisjonar som ikkje gjekk opp, i motsetnad til 1200:6, som går opp. Å operera på siffera kvar for seg handlar òg om plassverdi, og verkar vera det same som å dela opp dividenden, som skildra ovanfor. Skilnaden må vera at sifferet har ein verdi i kraft av posisjonen sin, til dømes at 1 i 1254 er tusen fordi det er 1 og står på tusen-plassen, og ikkje fordi det ”eigentleg” står 1000+200+50+4 der.

Sherin og Fuson (2005, s. 348) har samanfatta store delar tidlegare forsking knytt til læring av multiplikasjon med einsifra faktorar. I denne tidlegare forskinga har dei identifisert fire interesseområde: *semantisk struktur*, *intuitive modellar*, *løysingsprosedyrar*, og *modellar for gjenkalling*. Det forfattarane identifiserer som *løysingsprosedyre* omfattar det tidlegare forskarar har kalla *løysingsprosedyre*, *løysingsstrategiar*, og *utrekningsstrategiar*. Dette er av interesse for mi masteroppgåve på grunn av kategoriseringa, og namn og innhald i kategoriane. Dette trass i at Sherin og Fuson (2005) konsentrerer seg om multiplikasjon med einsifra faktorar. Vidare definerer forfattarane *utrekningsstrategi* som mønster i utrekningsaktivitet, granska på eit visst abstraksjonsnivå. Dei ser dette i kontrast til eit alternativt syn som ser strategiar som kunnskap (kognitive strukturar) hjå den enkelte (Sherin & Fuson, 2005, s. 350). Utrekningsstrategiane dei har identifisert i tidlegare forsking har dei so samanfatta i seks hovudkategoriar, *telja alt*, *additiv utrekning*, *hoppteljing med støtte*, *mønsterbasert*, *kjent produkt* og *hybrid*, i eit forsøk på å laga eit allmenngyldig klassifiseringssystem for utrekningsstrategiar for multiplikasjon med einsifra faktorar (Sherin & Fuson, 2005, s. 356-377). Desse kategoriane baserer seg på klassar av utrekningsstrategiar som igjen byggjer på talspesifikke utrekningsresursar. Her er det ei form for utvikling frå den eine til den neste kategorien. *Hoppteljing med støtte* skil seg til dømes frå *additiv utrekning* ved at ein ikkje berre adderer to tal, men at ein kan telja med hopp på til dømes tre: 3, 6, 9, 12, … . Her går ein frå å kunna talrekkja til òg å kunna multiplum av denne. Av interesse i denne masteroppgåva er *additiv utrekning*, *mønsterbasert*, og *hybridar*.

Additiv utrekning omfattar underkategoriane *gjentatt addisjon* og *slå saman og adder*. *Gjentatt addisjon* vil seia å addera antalet element i mengda gjentekne gonger, til dømes 4+4=8, 8+4=12, 12+4=16. *Slå saman og adder* handlar om å slå saman to mengder og deretter slå saman to slike nye mengder, eksemplifisert med ”8 + 8 = 16, 16 + 16 = 32, og difor er 4 • 8 = 32”.

Mønsterbasert vil seia at om ein multipliserer noko med null so vert svaret null (0 • a = 0), om ein multipliserer med éin so vert svaret det same som den andre faktoren (1 • a = a), eller at om ein multipliserer med ti so set ein på ein null bak den andre faktoren (10 • a = a0).

Hybridar vil seia at ein gjer seg nytta av to av dei fem fyrste hovudkategoriane samstundes. Dette kan til dømes vera *kjent produkt* + *additiv utrekning*, eksemplifisert gjennom ”7 • 7 = 49, pluss 7 er 56. Difor er 7 • 8 = 56.

3. Metode

3.1 Kvalitativ forsking og casestudie

Det fyrste forskingsspørsmålet mitt spør etter ei skildring av intuitive løysingsstrategiar elevar på 5.trinn har for divisjon. For å finna svar på dette var det klart at eg måtte ha eit datamateriale, henta blant elevar i skulen. Postholm (2005, s. 35) viser til ”…en undersøkelse av menneskelige/sosiale prosesser i deres naturlige setting” som definisjonen på kvalitativ forsking. Forskinga mi er følgjeleg ei kvalitativ forsking. Eg vil observera elevar i arbeid med divisjonsoppgåver som ligg utanfor det underviste området og gå djupare inn i desse situasjonane. I denne observasjonen kan eg få tilgang til elevane sine løysingsstrategiar gjennom det dei uttrykkjer munnleg og skriftleg. Deretter kan eg skildra og analysera løysingsstrategiane dei brukar ved å prøva å ”sjå gjennom elevane sine augo”. Eg held meg følgjeleg innanfor ein fortolkande teori, som plasserer meg innanfor det subjektivistiske forskingsparadigmet. For å kunna gå djupare inn i eit datamateriale og samstundes halda meg innanfor rammene av forskingsprosjektet, må eg ha ei avgrensing i tid og antal deltakarar. Eg brukar to elevgrupper med tre elevar som kvar jobbar to økter à cirka 90 minutt, til saman fire økter, med oppgåver laga til forskingsspørsmåla. Dette klassifiserer forskinga mi som ein casestudie (Cohen, Manion, & Morrison, 2007, s. 253).

Cohen et al. (2007, s. 253) skriv at ein casestudie er eit spesifikt tilfelle utforma for å illustrera eit meir generelt prinsipp. Enkelttilfellet som vert studert er eit avgrensa tilfelle, til dømes ein elev, ei elevgruppe eller ein skule. Vidare siterer Cohen et al. Robson (2008) og seier at målet med ein casestudie er å gi ei analytisk generalisering framføre ei statistisk generalisering. Ein vil utvikla ein teori som kan hjelpa til med å forstå andre liknande casar. I samsvar med det Stake (1995, s. 3) kallar instrumentell casestudie brukar eg denne spesielle studien til å kunna seia noko om kjenneteikna ved intuitive løysingsstrategiar for divisjon. Eg kan ikkje utan vidare trekkja generelle allmenngyldige konklusjonar basert på denne studien, men eg vil kunna drøfta funna mine opp mot tidlegare forsking og slik kunna støtta eller modifisera konklusjonar og generaliseringar frå andre studiar (Stake, 1995, s. 7-8).

I denne studien utgjer dei to elevgruppene to casar, og desse dannar datamaterialet mitt. Deltakarane i forskinga skaper handlinga og framdrifta. Det betyr at røyndomen eg forskar på er skapt av elevane eg forskar på. Dette medfører at resultata mine er kontekstualiserte og situert. Studien er dermed ikkje ein representativ kvantitativ studie, og funna vert som nemnt ovanfor ikkje direkte generaliserbare. Eg vil gå djupare inn i datamaterialet og trekkja fram bestemte sekvensar i arbeidet til elevane for å svara på forskingsspørsmåla mine. Eg vil altså gjera ein kvalitativ analyse av datamaterialet mitt (Cohen et al., 2007, kap. 22). Eg vil gi ei so objektiv skildring som mogeleg av observasjonane mine for å kunna formidla og forstå deltakarane sitt perspektiv (Postholm, 2005, s. 17). Det ligg imidlertid i den kvalitative forskinga sin natur at forskaren har ei fortolkande rolle gjennom heile forskingsprosessen, noko som òg gjer at forskaren er det viktigaste forskingsinstrumentet gjennom forskingsprosessen. Dette fører òg til at forskinga er påverka av mine subjektive verdiar (Postholm, 2005, s. 32).

3.2 Samarbeid med skule

Forskingsspørsmåla mine omhandlar elevar sine intuitive løysingsstrategiar for divisjon. For å finna svar på desse var eg avhengig av elevar i ei aldersgruppe som kjende til det matematiske omgrepet divisjon, men som ikkje hadde fått undervising i algoritmar for divisjon. Ut frå læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, u.å.) fann eg at elevar på 5.trinn kjenner omgrepet divisjon, men mest truleg ikkje har lært nokon standardalgoritme for divisjon. Frå Gyldendal sitt læreverk i matematikk, *Multi 5b* (Alseth, Nordberg, & Røsseland, 2006), som eg visste er eit mykje brukt læreverk i Trondheimsskulane, fann eg at ein variant av langdivisjonsalgoritmen er tenkt fyrste gong presentert i andre semester på 5.trinn. Ut frå dette, samt at datainnsamlinga mi ville føregå før jol, fann eg at 5.trinn ville vera eit høveleg alderstrinn.

Eg kontakta ein barneskule i Trondheim og fekk positivt svar frå læraren i den eina av to 5.klassar. Før sjølve datainnsamlinga var eg innom klassen og presenterte meg og fortalde elevane at eg skulle koma tilbake seinare og at nokre av elevane då skulle få hjelpa meg ved å jobba med nokre matematikkoppgåver. Eg delte òg ut informasjonsskriv til elevar og føresette vedrørande frivillig deltaking i prosjektet og spørsmål om løyve til videofilming. I tråd med ei etisk tilnærming for forskinga mi har eg i denne masteroppgåva anonymisert skulen og elevane ved å bruka fiktive namn (Cohen et al., 2007, kap. 2).

3.3 Utval

Utvalet i denne studien er to elevgrupper med tre elevar på kvar gruppe. Forskinga mi byggjer på kognitiv læringsteori, der språket har ei svært avgrensa rolle for læring. For forskinga mi er språket derimot svært viktig som eit verkty for å få tilgang til forskingsobjekta sine tankar og tenkjemåtar. Eg valde å bruka grupper av elever som samarbeider i staden for til dømes intervju fordi elevane då har kvarandre som kjende haldepunkt i situasjonen, og dermed truleg er meir opne for å uttrykkje seg spontant og munnleg. Å ha tre medlemar i gruppene er grunngjeve med at ein då har grupper som er store nok til at ein får fram fordelane ved gruppearbeid, men samstundes er gruppene ikkje so store at ein får nye grupperingar innanfor gruppene. Eg brukar to grupper for å gjera det mogeleg å gjera samanlikningar mellom desse to gruppene.

Læraren til denne 5.klassen sette saman dei to elevgruppene for meg, ut frå mine kriterium. Desse kriteria var at alle deltakande elevar skulle ha løyve til å verta filma med videokamera og alle skulle ha lyst til å vera med på prosjektet mitt. Vidare skulle det vera elevar som ville kunne tenkja høgt og uttrykkja seg munnleg samt at dei tre elevane innan gruppa skulle kunna samarbeida. Eg såg dette som føremålstenlege kriterium med tanke på å få best mogelege data. Ut over dette hadde eg ikkje kontroll over utveljinga eller gruppesamansetjinga, og veit heller ikkje noko om det faglege nivået til desse seks elevane i forhold til resten av klassen. Dette er ikkje-tilfeldig utval basert på frivilligheit og føremålstenlege årsaker (Cohen et al., 2007, s. 113-116). Ut frå desse kriteria sette læraren saman gruppe 1 beståande av Kyrre, Ingrid og Renate, og gruppe 2 beståande av Øyvind, Oliver og Stian. Som nemnt ovanfor er dette fiktive namn, men dei gjenspeglar elevane sitt kjønn.

3.4 Observasjon

Som nemnt ovanfor jobba dei to elevgruppene med mine oppgåver i to økter kvar, over fire dagar. Kvar av desse fire øktene var om lag 90 minutt lange, og eg observerte elevane i arbeid heile denne tida. Under observasjonane gjorde eg eigne notat samt at eg filma alt arbeidet med eit videokamera. Eg fekk nytta eit grupperom der elevane sat i ein halvsirkel rundt eit bord. Kameraet stod på eit stativ på andre sida av bordet slik at både dei tre elevane og arbeidsarka dei hadde på bordet framføre seg kom med på filmen. Eg valde å bruka film for å få ei so autentisk attgjeving av dialogen som mogeleg, samt for å få med kven som snakkar, om dei skriv, teiknar, eller peiker på noko, og i kva rekkjefylgje dei gjorde dei ulike notata sine. Det er ingen garanti for å få fanga alt dette på film, men det viktigaste var å få ei attgjeving av kva som vart sagt, og kven som sa det (Postholm, 2005, s. 62). Transkripsjonar av desse videoane skulle vera hovuddata mine, med mine eigne notat og elevane sitt skriftlege arbeid som supplement i ei triangulering av data materialet i analysearbeidet (Postholm, 2005, s. 132). Mine eigne notat gjorde eg undervegs av det som eg der og då tykte var interessant, utan nokon førehandsbestemt struktur (Postholm, 2005, s. 62). Eg gjorde det Cohen et al. (2007, kap. 18) kallar semistrukturell observasjon. Eg gjorde observasjonane med utgangspunkt i eit forskingsspørsmål om kva intuitive løysingsstrategiar elevane har for divisjon, men der den endelege problemstillinga vart laga ut frå observasjonane mine.

Forskinga mi omhandlar intuitive løysingsstrategiar, og eg ville difor at datamaterialet i størst mogleg grad skulle reflektera den kunnskapen og forståinga elevane sat med der og då. Dette ville eg oppnå ved å involvera meg minst i mogeleg i elevane sitt arbeid. Eg fann det likevel naudsynt å gripa inn i enkeltsituasjonar med spørsmål for å få betre innsikt i elevane sin tankegang. Eg var dermed det Cohen et al. (2007, kap. 18) kallar ein deltakande observatør. Eg var fyrst og fremst observatør, men eg var òg naturleg til stades nettopp fordi eg hadde mogelegheit til å kommunisera med deltakarane gjennom at både dei og eg kunne stilla kvarandre spørsmål. Eg fekk slik eit betre innsyn i korleis elevane jobba enn eg ville gjort som rein observatør, utan at eg påverka arbeidet deira like mykje som eg ville gjort om eg jobba saman med dei.

3.5 Oppgåvene

Dei to elevgruppene jobba ei økt kvar med tekstoppgåver med divisjon. Andre økta jobba dei med divisjonsoppgåver der dei fyrst skulle laga ein kontekst til ei oppstilt taloppgåve, før dei skulle løysa oppgåva. Desse to typane oppgåver skulle begge synleggjera dei intuitive løysingsstrategiane for divisjon. Oppgåvene frå fyrste økta skulle i tillegg avdekka elevane si forståing knytt til divisjon når det ikkje kom fram av oppgåvene at det handla om divisjon. Ville elevane forstå at dette var divisjonsoppgåver? Desse tekstoppgåvene la ingen føringar som låste elevane til reknearten divisjon. ”Lag tekst til delingsstykket”-oppgåvene frå andre økta skulle avdekkja om elevane tenkte delings- eller målingsdivisjonskontekstar om divisjon. Desse oppgåvene var òg tenkt å skulle granska om elevane gjorde seg nytte av kontekstane dei hadde laga i arbeidet med å løysa divisjonane.

Fyrste økt med kvar av desse to gruppene var to påfylgjande dagar midt i november. Dei jobba då med tekstoppgåvene. Andre økt jobba gruppene med ”Lag tekst til delingsstykket”-oppgåvene. Dette var to påfylgjande dagar to veker etter fyrste økta.

Ein nærare presentasjon av oppgåvene kjem fyrst i analysekapitlet, der dei vert presenterte heilskapleg i delkapittel 4.3. I delkapitla 4.2 og 4.4 kjem ein a priori-analyse av oppgåvene med fokus høvesvis på føremålet med oppgåvene og den semantiske strukturen i oppgåvene.

3.6 Analysemetodar

Datamaterialet i denne masteroppgåva er i hovudsak mine observasjonar av dei fire arbeidsøktene. I tillegg til transkripsjonane av videofilmane og mine eigne notat frå datainnsamlinga, støttar eg meg òg til elevane sitt skriftlege arbeid i analysearbeidet mitt. I fylgje Jacobsen (2005, s. 186) handlar analyse av kvalitative data, noko enkelt sagt, om å *skildra*, *systematisera og kategorisera*, og *binda saman*.

3.6.1 Skildra

Skildring handlar om å skriva ned intervju og observasjonar, og systematisera desse om naudsynt (Jacobsen, 2005). Hovuddata i denne studien er videoopptak av elevane i arbeid med oppgåver. I fyrste fase av analysearbeidet av desse videofilmane transkriberte eg filmane, slik at eg hadde dei i skriftleg form. Her skreiv eg ned dialogen i grove trekk, og noterte samstundes ned eventuelle avvik. Dette kunne vera at eleven vart so ivrig at han sette seg opp på bordet. Parallelt med dette arbeidet, noterte eg òg ned interessante observasjonar. Dette var i hovudsak trekk og handlingar i elevgruppa som eg kjende att frå litteraturen som ligg til grunn for denne masteroppgåva. Dette kunne til dømes vera at eg oppdaga at elevane brukte *gjentatt* *addisjon* eller *gjentatt subtraksjon* som ein utrekningsstrategi for å løysa ei oppgåve. Etter dette sat eg att med mange sider transkripsjonar av tekst, og til dels skildring av handling, og ei lang liste med uttrykk og omgrep som hadde opphav i anna forsking og litteratur. Dette måtte reduserast og systematiserast ytterlegare.

3.6.2 Systematisera og kategorisera

Systematisere og kategorisere handlar i fylgje Jacobsen (2005) om å redusera den uoversiktlege informasjonen som føreligg før ein analyse ved sila ut og forenkla informasjonen. *Den konstant komparative analysemåten* er kjenneteikna ved at ein systematiserer og strukturerer datamaterialet, og kan i fylgje Postholm (2005, s. 86-90) brukast i alle kvalitative studiar der koding og kategorisering er sentralt i analysearbeidet. Av omgrepa ho nemner i skildringa si av denne analysemetoden, brukar eg her *open koding* og *aksial koding*. Eg har dermed ikkje brukt alle omgrepa Postholm skildrar, då desse ikkje var relevante i mitt arbeid.

Etter å ha transkribert videoane, samt fortløpande laga ei liste med omgrep, eller kodar, eg kjende att frå teorigrunnlaget mitt, gjekk eg på nytt gjennom transkripsjonane og supplerte med kodar og knytte desse kodane til situasjonar og episodar i elevane sitt arbeid med oppgåvene. Dette er det Postholm (2005, s. 88-89) kallar *open koding*, som vil seia at data vert delt i mindre deler og gjeve namn, eller kodar. Vidare laga eg ein tabell over elevar og oppgåver, der eg hadde ein kolonne for kvar elev, og ei rad for kvar oppgåve for å systematisera kodinga mi. Deretter plasserte eg kodane og elevane sine strategiar inn i denne tabellen, før eg på ny gjekk gjennom transkripsjonane for å sikra at eg hadde fått med alt i tabellen. Dei to øktene vart til to tabellar, Vedlegg 1 og 2. Neste fase var å samla desse mange kodane i større bolkar for å gjera datamaterialet meir oversiktleg. Eg gjekk gjennom tabellane og leita meg fram til likskapar og felles kjenneteikn ved kodane. I dette arbeidet identifiserte eg fem større kategoriar som alle underkategoriane kunne plasserast inn under. Dette er det Postholm (2005) kallar *aksial koding*. Her ser ein korleis kategoriane ein har kome fram til står i forhold til kodane, og set desse i system. Dei fem kategoriane eg kom fram til har eg kalla *gjett og juster*, *additiv oppbygging*, *subtraktiv nedbygging*, *utdeling*, og *algoritme*.

Gjett og juster vil i denne samanhengen seia at elevane gjettar på ein mogeleg verdi for svaret og kontrollerer om denne er rett. Om fyrste gjettinga er feil, justerer dei gjettingane éin eller fleire gonger til dei når det ynskte talet. Denne *gjett og juster* skil seg frå det som vanlegvis vert kalla *gjett og juster*-metoden, eller false position (Katz, 2004, s. 7), for likningsløysing ved at elevane ikkje søkjer å finna kor mykje feil svaret er for deretter å gjera éi justering. I denne masteroppgåva er ikkje justeringane nødvendigvis basert på kvalifiserte gjettingar, men på meir tilfeldige gjettingar som ”Det er for stort. Då må me prøva med eit mindre tal”. Det vil seia at elevane ikkje nødvendigvis tek omsyn til kor mykje for stort talet dei fyrst gjettar er. Med *gjett og juster* gjettar elevane på ein mogeleg kvotient i divisjonsoppgåve. Deretter kontrollerer dei om denne er riktig ved multiplikasjon av dei same tala. Det vil seia at dersom produktet dei då får er det same som dividenden dei starta med, er den gjetta kvotienten riktig. Dersom produktet vert større enn dividenden dei starta med, må dei prøva med ein mindre verdi for kvotienten, og motsett om produktet vert mindre. Eit sentralt trekk her er at divisor, som er kjend, får rolla som multiplikator, medan kvotienten som er gjetta får rolla som multiplikand. Når elevane løyser multiplikasjonane som gjentatt addisjon, vil dette seia at dei skriv opp den gjetta kvotienten i kolonnar like mange gonger som divisor tilseier. Ein søkjer å finna kva for eit tal som går like mange gonger i dividenden som divisoren tilseier, altså å finna x i $a \bullet x = \mathrm{b}$, der a og b er kjende, og held seg difor til ein delingsstruktur.

Additiv oppbygging vil seia at ein byggjer opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor, eller multiplum av divisor. Det er sentralt her at addendane ikkje er avgrensa til å vera divisoren, men òg multiplum av divisor. Her er divisor byggesteinen i prosessen fram mot svaret, og svaret på divisjonen er antalet addisjonar – det vil seia antalet divisorar som går i dividenden. Ein gjer seg direkte nytte av dei oppgjevne tala, og jobbar seg systematisk fram mot svaret. Når ein når fram til dividenden, stoppar ein og tel kor mange addisjonar ein har gjort. Dette er ein målingsstruktur der ein brukar divisor til å måla dividenden. Ein spør etter kor mange gonger divisor går i dividenden. Dette er det same som å skulla finna x i $x \bullet a = \mathrm{b}$, der a og b er kjende.

Motstykket, eller komplementet, til *additiv oppbygging* har fått namnet *subtraktiv nedbygging*. Dei tek begge utgangspunkt i divisoren som operand, og dei handlar begge om å svara på spørsmålet ”*Kor mange divisorar* går i dividenden (x • 22 = 506)?”. Trass i likskapen mellom *additiv oppbygging* og *subtraktiv nedbygging*, er *subtraktiv nedbygging* ein eigen kategori fordi det handlar om å jobba seg nedover mot null, medan *additiv oppbygging* handlar om å jobba seg oppover mot dividenden. Sett i samanheng med den vanlege oppfatninga at multiplikasjon kan reduserast til gjentatt addisjon, og at subtraksjon kan reduserast til gjentatt subtraksjon, er det òg fornuftig å skilja desse to strategiane.

Både i *additiv oppbygging* og *subtraktiv nedbygging* gjeld det at ein gjer seg direkte nytte av dei to tala ein har fått opplyst, der divisoren er ei form for byggestein på vegen fram mot det rette svaret. I *gjett og juster* gjettar dei derimot på eit mogeleg svar. Deretter brukar dei dette svaret dei har gjetta på som byggestein for å kontrollera om dette svaret er rett.

Utdeling er ei direkte modellering av situasjonen ved distribusjon av dividenden, eller bolkar av denne, på divisoren. Som i *gjett og juster* søkjer ein å finna kva for eit tal som går like mange gonger i dividenden som divisoren tilseier, altså å finna *x* i *a* • *x* = b, der *a* og *b* er kjende. Ein held seg difor til ein delingsstruktur.

Namnet *algoritme* er inspirert av Anghileri (2001). Ho gir ei grunn skildring av denne kategorien, og eg har difor valt å gi den mitt eige innhald. I denne masteroppgåva betyr *algoritme* at elevane erkjenner eit behov for ein algoritme. Elevane kjenner att divisjon som den riktige operasjonen å utføra, og dei uttrykkjer at dei er klar over at dei kan finna svaret på oppgåva gjennom ein oppstilt divisjon. Det er òg sentralt at elevane gjer forsøk på å manipulera på dei oppstilte tala. Elles er eit sentralt trekk ved *algoritme* at tala er lausrivne frå konteksten og at ein opererer på tala åleine, uavhengig av om det er delings- eller målingsdivisjon. I sjølve langdivisjonsalgoritmen er det riktig nok snakk om å finna kor mange gonger divisoren går i dividenden, altså målingsaspektet ved divisjonen, men fordi strategiane som her er klassifiserte som algoritme er å sjå på som manipulering av tal som er lausrivne får konteksten. Det er dermed ikkje føremålstenleg å skilja mellom dei to typane divisjon.

Desse kategoriane byggjer på korleis elevane angreip oppgåvene – det vil seia korleis dei tenkte om desse oppgåvene. I *algoritme* er det til dømes element av gjetting og justering – elevane vurderer fortløpande om det dei seier er rimeleg, og forkastar eventuelt den opphavlege ideen til fordel for ei justering.

3.6.3 Binda saman

Den tredje delen av det kvalitative analysearbeidet er å *binda saman* (Jacobsen, 2005). Jacobsen skriv vidare at det er her ein leitar etter meiningar, årsaker, prøver å generalisera og laga orden i data. Her gjer ein tolkingar av det som ikkje har vorte sagt eller gjort direkte, og får fram dei skjulte, kanskje mest interessante forholda. Postholm (2005) skriv at ein no skal finna situasjonar som illustrerer kategoriane, og deretter skriva ein heilskapleg tekst som representerer forskingsfeltet med utgangspunkt i kategoriane. Dei fem kategoriane mine vert eksemplifiserte under delkapittel 4.5 Utrekninsstrategiane – a posteriori-analyse. Desse er retta inn mot det fyrste forskingsspørsålet: Delkapittel 4.6 Er det samanheng mellom semantisk struktur i oppgåva og løysingsstrategi? er vigd det andre forskingsspørsmålet i denne masteroppgåva.

3.7 Validitet og metodesvakheiter

Trass i at eg gjennomførte datainnsamlinga på skulen og med elevane i grupper, som skulle vera kjende omgjevnadar for dei, var sjølve situasjonen ukjend. Det at eg tok elevane ut av klassen, og at eg var ein ukjend person som var til stades på grupperommet dei jobba på, avveik frå ein vanleg skuledag. Oppgåvene var òg annleis enn dei jobbar med til vanleg, og videokameraet var òg eit framandt element. Med den tida eg hadde til rådvelde med elevane, meiner eg likevel at eg på best mogeleg måte la til rette for at elevane skulle føla seg trygge i situasjonen. Dette gjorde eg ved å presentera meg for heile klassen og fortelja at eg ynskte at nokre av dei skulle hjelpa meg med nokre matematikkoppgåver. Denne presentasjonen gjorde eg då eg delte informasjonsskriv til elevar og føresette vedrørande frivillig deltaking i prosjektet og spørsmål om løyve til videofilming. I tillegg var eg ein deltakande observatør under sjølve datainnsamlinga. På denne måten vart det meir naturleg at eg var til stades, enn om eg hadde vore fullstendig observatør.

På den andre sida vil det at eg var ein deltakande observatør ha kunna påverka elevane gjennom det eg sa og gjorde. Sidan eg som forskar er det viktigaste forskingsinstrumentet i denne forskinga, er observasjonane farga av meg. Observasjonane vil følgjeleg vera påverka av kva og korleis eg ser og tolkar situasjonane, og eg kan dermed ikkje utelukka at andre forskarar ville sett og tolka annleis enn meg. Ved å presentera data som analysen min er gjort på grunnlag av, byggjer eg derimot opp under truverdet i påstandane mine. Ved å bruka både transkripsjonane av videofilmane, eigne notat, og elevane sine skriftlege arbeid skaper eg ei triangulering der eg brukar ulike delar av datamaterialet til å byggja opp under analysen, samstundes som eg gir lesaren mogelegheit til gjera eigne tolkingar (Stake, 1995, kap. 7). Kritiske spørsmål og tilbakemeldingar, rettleiing frå andre undervegs i analysearbeidet er òg med på å auka validiteten i mine tolkingar.

Dei seks elevane som var med i denne forskinga er eit for lite utval til at dei er eit representativt utval for ei større gruppe i befolkninga. Data mine er heller ikkje representative, og eg kan ikkje trekkja slutningar eller gjera generaliseringar ut over desse to casane. I fylgje Stake (1995, s. 4) studerer ein ikkje ein case hovudsakleg for å forstå andre casar, men for å forstå denne eine. På denne måten er det meir ei spesialisering enn ei generalisering. Ut frå denne casen kan ein likevel gjera naturalistiske generaliseringar ved å halda mine tolkingar av dette datamaterialet opp mot eksisterande forsking og erfaring på området (Stake, 1995, s. 85-88). Mine skildringar legg òg til rette for at andre kan samanlikna mine funn med liknande casar, og slik gjera seg nytte av mine funn og tolkingar.

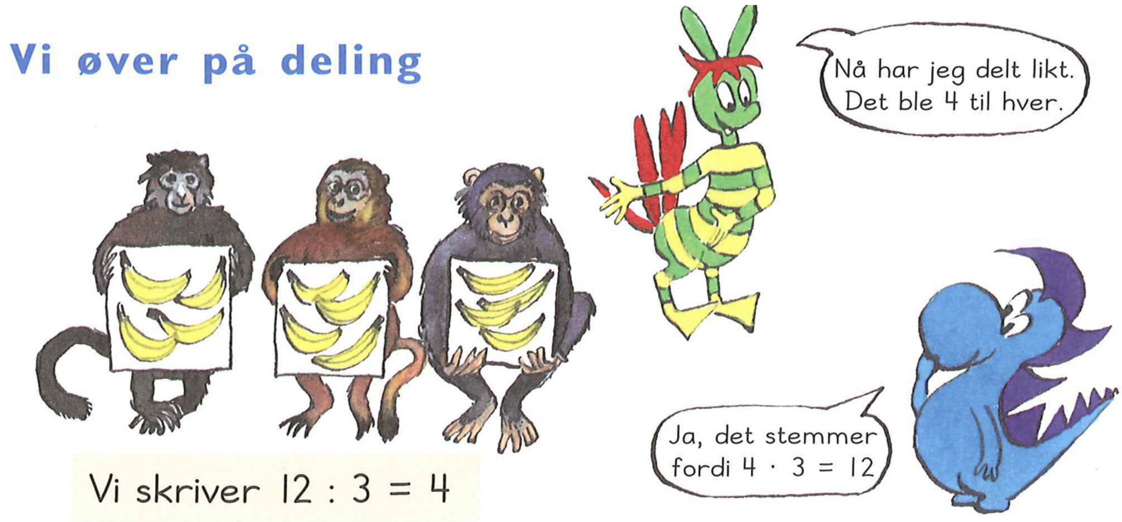
4. Analyse

4.1 Divisjon i norske lærebøker for barnetrinnet

Etter ein gjennomgang av eit utval norske læreverk for barnetrinnet, *Multi*, *Tusen millioner*, og *Grunntall*, finn eg det naudsynt å kommentera nokre observasjonar som kan tenkjast å ha innverknad i forhold til denne masteroppgåva. *Multi* har kome i ei 2.utgåve etter at denne analysen vart gjort. Eg har likevel halde fast ved analysen av 1.utgåva fordi datainnsamlinga vart gjort hausten 2010, og erfaringa elevane har med lærebøker dermed er knytt til 1.utgåva. Elevane i denne studien nytta som nemnt læreverket *Multi*. Læreverka *Tusen millioner* og *Grunntall* er tekne med for å få meir breidde og for å kunna kommentera tendensar. Alle desse verka har to bøker for kvart årstrinn, vanlegvis ei A-bok for haustsemesteret og ei B-bok for vårsemesteret. Gjennomgangen omfattar både bøker elevane etter normalen har vore eksponert for (fram til bok 5A), og påfylgjande bøker, med neste steg i progresjonen. Det fyrste eg legg merke til er eit sterkt fokus på å sjå multiplikasjon som gjentatt addisjon. Dette gjeld der begge faktorane er heiltal. For det andre vert koplinga mellom multiplikasjon og divisjon som inverse operasjonar framheva. Det tredje er at dei to typane divisjon i lita eller inga grad vert kommentert og forklart eksplisitt som to ulike semantiske strukturar. Begge dei to typane divisjon vert skildra gjennom tekstoppgåver, men det verkar vera ei klar overvekt av delingsdivisjonskontekstar, og delingsdivisjon verkar òg verta introdusert fyrst av desse to.

Læreverket *Multi*, *Multi 3a*, (Alseth, Kirkegaard, & Rørsseland, 2006, s. 107) innfører omgrepet *deling* på tredje årstrinn. *Deling* vert innført med ei teikning av åtte ostar og fire fat og teksten ”Del like mange på hvert fat. Lag et regnestykke”. Vidare er det skrive ”8:4=2”. Dette er klare delingsdivisjonskontekstar, og det fylgjer to sider med denne type oppgåver. To sider lenger bak fylgjer ei side med målingsdivisjonsoppgåver, der bollar skal pakkast i posar med to bollar i kvar pose (Alseth, Kirkegaard, et al., 2006, s. 109), før det held fram med fleire delingsdivisjonsoppgåver. I denne boka, som er elevane sitt fyrste møte med divisjon, er det ei klar overvekt av delingsdivisjonskontekstar.

På fjerdetrinn, *Multi 4a*, (Alseth et al., 2006a, s. 104-105) vert dei to typane divisjon vist gjennom fylgjande illustrasjonar:



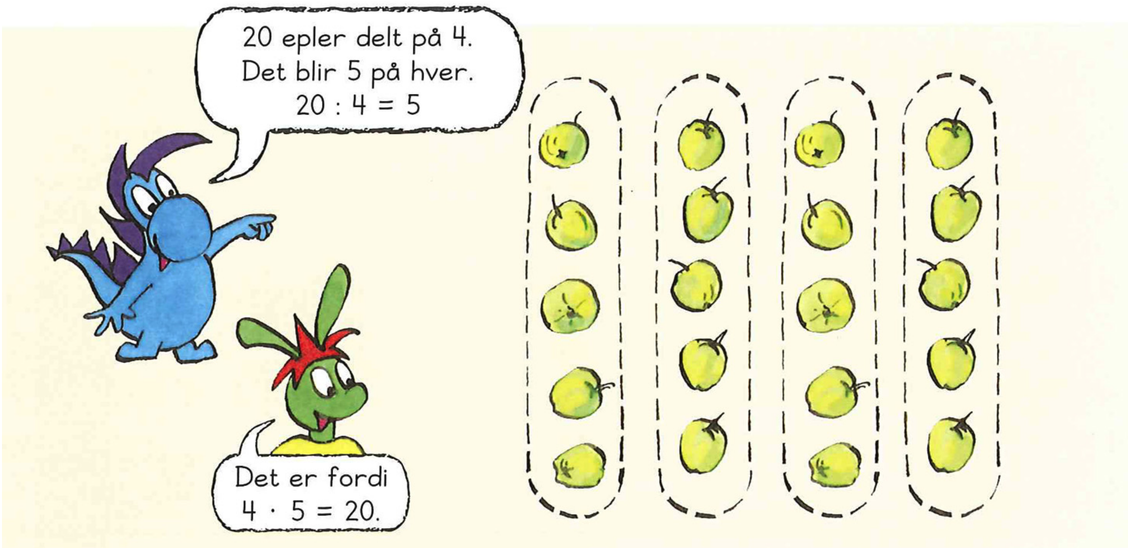
Figur 1: Delingsdivisjon i *Multi 4a* (Alseth et al., 2006a, s. 104)

Figur 2: Målingsdivisjon i *Multi 4a* (Alseth et al., 2006a, s. 105)

Den fyrste illustrasjonen (Figur 1) er ein delingsdivisjonskontekst, der det er antalet bananar til kvar ape (antalet element i kvar delmengd) som er ukjent, medan den andre illustrasjonen (Figur 2) er ein målingsdivisjonskontekst, der antalet sebraar som får gulrøter (antalet delmengder) er ukjent. Med desse to illustrasjonane vert dei to typane divisjon vist i boka. Det er ikkje knytt noko meir refleksjon eller forklaring til dei ulike semantiske strukturane i desse to døma, anna enn det som eventuelt vert lagt opp til gjennom lærarrettleiinga og læraren sjølv.

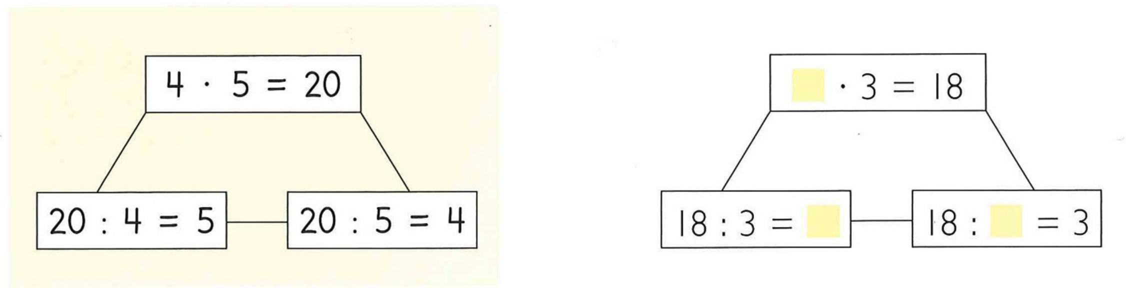
Eit anna interessant aspekt ved desse to illustrasjonane er samanhengen mellom multiplikasjon og divisjon. I målingsdivisjonskonteksten (Figur 2) har ein *20 gulrøter : 5 gulrøter per sebra = 4 sebraar*. Den gul- og grønstripete figuren forklarer at dette er riktig fordi *4 • 5 = 20*. Sett i samanheng med konteksten får ein med same notasjonen *4 sebraar • 5 gulrøter per sebra = 20 gulrøter*. Dette samsvarer òg med målingsdivisjon som "…division by the multiplicand" (Greer, 1992, s. 286). I delingskonteksten (Figur 1) er det *12 bananar : 3 apar = 4 bananar per ape*. Den blå figuren forklarer at det vert 4 bananar til kvar ape fordi *4 • 3 = 12*. Om ein her brukar same eininga på tala i multiplikasjonen som i divisjonen, får ein *4 bananar per ape • 3 apar = 12 bananar*. Eg har, i samsvar med norske lærebøker, definert multiplikatoren til å vera den fyrste faktoren i multiplikasjonen. Her er det då ikkje samsvar mellom multiplikasjonen, definisjonen av multiplikator, og Greer sin definisjon av delingsdivisjon som "…division by the multiplier," (1992, s. 286). Det den blå figuren seier er riktig utrekningsmessig på grunn av den kommutative eigenskapen ved multiplikasjon. Men situasjonsmessig er ikkje det denne figuren seier riktig. Ein ser her at når divisjon vert lese som multiplikasjon, les ein frå høgre til venstre, men beheld den same oppstillinga. Det vil seia at divisjonen a : b = x vert til multiplikasjonen x • b = a, uavhengig av om strukturen er delings- eller målingsdivisjon.

I *Multi 4b* (Alseth, Kirkegaard, Nordberg, & Røsseland, 2006b, s. 36) vert samanhengen mellom divisjon og multiplikasjon framheva ytterlegare.



Figur 3: Samanhengen mellom divisjon og multiplikasjon i *Multi 4b* (Alseth et al., 2006b, s. 36)

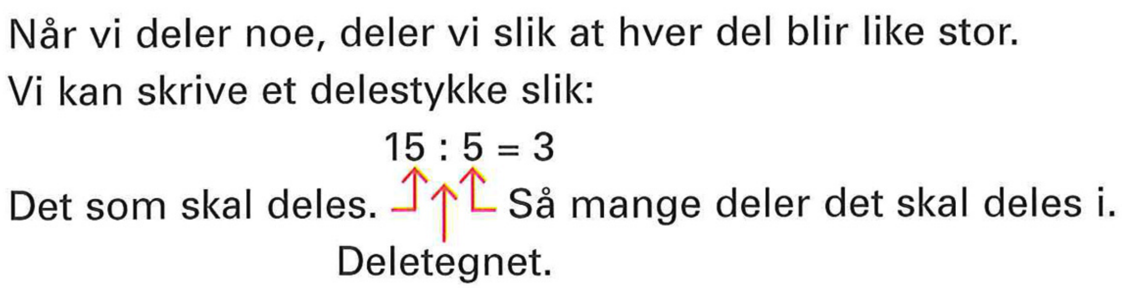
Denne illustrasjonen (Figur 3) skildrar ein delingsdivisjon der 20 eple vert delt i 4 like store mengder. I motsetnad til illustrasjonane i Figur 1 og Figur 2 ovanfor, er det her samsvar mellom delingsstrukturen, og korleis denne er skildra både gjennom divisjon og multiplikasjon. Vidare i denne boka (same side) finn ein fylgjande døme og oppgåve:



Figur 4: Samanhengen mellom divisjon og multiplikasjon i *Multi 4b* (Alseth et al., 2006b, s. 36)

Her (Figur 4) vert dei to typane divisjon og samanhengen til multiplikasjon vist. Det som er interessant her er at den kommutative eigenskapen ved multiplikasjon vert vist her, utan noko meir kommentar til dette. Jamfør Greer (1992) er det ei naudsyntheit at dersom det kan identifiserast to typar divisjon, er ikkje ”faktorenes orden likegyldig”, og dermed har ein òg to typar multiplikasjon. Ein må her altså skilja mellom det talmessige og reknetekniske på den eine sida, og det struktur- og situasjonsmessige på den andre sida.

Grunntall 4b (Bakke & Bakke, 2006b, s. 106) brukar fylgjande definisjon av divisjon:



Figur 5: Definisjon av divisjon i *Grunntall 4b* (Bakke & Bakke, 2006b, s. 106)

Her (Figur 5) er det vist eksplisitt at divisor viser til ”Så mange deler det skal deles i”, som altså stemmer berre i delingsdivisjon. Lenger bak i den same boka finn ein oppgåvene ”En sjokolade er delt i 30 ruter. 5 stykker skal dele sjokoladen. Hvor mange ruter får de hver?” og ”Vi har 48 boller. De skal pakkes i poser med seks boller i hver pose. Hvor mange poser blir det?" (Bakke & Bakke, 2006b, s. 113). Den fyrste oppgåva er ei delingsdivisjonsoppgåve som stemmer overeins med nemnte definisjon av divisjon. Den andre oppgåva er imidlertid ei målingsdivisjonsoppgåve, der divisoren viser kor mange bollar det skal vera i kvar pose, og ikkje kor mange posar bollane skal fordelast i. Oppstillinga som må til for å løysa denne oppgåva ved divisjon er altså i strid med den innførte definisjonen av divisjon, og denne oppgåva vert prsentert utan å revidera nemnte definisjon av divisjon.

Tusen millioner 4B (Gjerdrum & Kristiansen, 2007, s. 27) byrjar kapitlet om divisjon med ei teikning av ein flokk sauer og spørsmålet "Hvor mange toere kan du lage? Sett ring rundt". Her handlar det om å finna kor mange par ein kan laga (*til dømes 12 sauer : 2 sauer per par = 6 par*), og det er følgjeleg ein målingskontekst. På neste side er konteksten delingsdivisjon, og resten av kapitlet har ei klar overvekt av delingsdivisjonskontekstar.

Læreboka *Tusen millioner 5b* (Rasch-Halvorsen, Rangnes, & Aasen, 2007a, s. 90-91), som elevane eventuelt ville møtt etter at datainnsamlinga til denne studien var ferdig, forklarer eksplisitt om dei to typane divisjon. Under overskrifta "Delings- og målingsdivisjon" står det vidare at "Vi kan 'tenke' divisjon på to måter, som *delingsdivisjon* eller *målingsdivisjon*" (Rasch-Halvorsen et al., 2007a, s. 90, utheving i original). Delingsdivisjon er skildra med teksten "Ved delingsdivisjon deler vi en mengde likt og 'rettferdig'. 36 boller : 3 personer = 12 boller per person", medan målingsdivisjon er forklart med "Ved målingsdivisjon deler vi to tall med lik benevning på hverandre. 24 dl : 2 dl i hvert glass = 12 glass. Saften rekker til 12 glass" (Rasch-Halvorsen et al., 2007a, s. 90-91).

Av dei læreverka eg har gjennomgått ser dei alle ut til å bruka definisjonen $a \bullet b = \underbrace{b+b+\cdots+b}_{a} = \sum_{i=1}^{a} b$ når dei ser multiplikasjon med heiltal som gjentatt addisjon. Læreverka er konsekvente i bruken av denne notasjonen, der den fyrste faktoren i multiplikasjonen er å forstå som multiplikator, og den andre faktoren er multiplikand (Alseth et al., 2006a, s. 96; Bakke & Bakke, 2006a, s. 28; Rasch-Halvorsen et al., 2006, s. 116). I samanhengen mellom divisjon og multiplikasjon er det derimot ikkje konsekvent samsvar mellom kven av faktorane som er multiplikator og multiplikand.

I denne gjennomgangen av læreverk har eg fokusert på kva elevar på 5.trinn har lært, og kva erfaring dei kan tenkjast å ha. Gjennomgangen antyder ei klar overvekt av delingsdivisjonsoppgåver, noko som skulle tilseia at elevane har mest erfaring med delingsdivisjon. Vidare er det i stor grad ikkje samsvar mellom den semantiske strukturen i divisjonen og multiplikasjonen når ein ser divisjon som omvendt multiplikasjon. Her må ein, som eg har peika på tidlegare, skilja mellom det situasjonsmessige og utrekningsmessige aspektet. Her gjer ein seg bruk av den kommutative eigenskapen ved multiplikasjon, utan å uttrykkja dette eksplisitt.

4.2 Føremålet med oppgåvene – a priori-analyse

Den kunnskapen eg hadde om elevane før eg laga oppgåvene var at klassen ikkje hadde hatt undervisning om, eller lært langdivisjonsalgoritmen. Læraren deira fortalde òg at dei løyste divisjonsoppgåver som omvendt multiplikasjon, av typen ”Tolv delt på tre er fire, fordi tre gonger fire er tolv”, og at ingen av elevane hadde løyst divisjonsoppgåver med to siffer i divisor då klassen sist hadde matematikkprøve. Fordi forskingsspørsmålet mitt omhandlar intuitive løysingsstrategiar, var det viktig at elevane ikkje kunne løysa oppgåvene direkte, som i dømet ovanfor der divisjonen vert løyst direkte ved omvendt multiplikasjon. Eg valde difor oppgåver som, med støtte i berre papir og blyant, på ein føremålstenleg måte ville kunna løysast gjennom langdivisjonsalgoritmen. Ein konsekvens av dette var at oppgåvene måtte innehalda store tal. Eg såg det som sannsynleg at elevane kunne den vesle multiplikasjonstabellen, og oppgåvene måtte difor ha større dividend og divisor enn faktorane og produkta ein finn i den vesle multiplikasjonstabellen. Ut frå dette valde eg oppgåver med tresifra dividend og tosifra divisor. Eg hadde òg eit ynskje om variasjon i oppgåvene for å avdekka eit breiare spekter av strategiar, og laga difor også nokre oppgåver med einsifra divisor og tresifra dividend. Dette vart gjort ut frå ideen om at den tresifra dividenden i desse oppgåvene ville halda vanskegrada tilstrekkeleg oppe.

Med bakgrunn i den tresifra dividenden er det rimeleg å anta at ei direkte modellering med konkretiseringsmateriell, der kvart konkretiseringsobjekt er knytt ein-til-ein til talet, er svært arbeidsamt, og at eit skriftleg arbeid med støtte i papir og blyant, er meir føremålstenleg. Med direkte modellering meiner eg her altså at oppgåva ”100 : 10” skulle vorte modellert ved fyrst å telja opp hundre knappar, og so anten telja opp ti og ti og ta bort desse og til slutt telja kor mange mengder med ti ein har, eller legga bort ein og ein i ti mengder til ein ikkje har att fleire i den opphavlege mengda og so telja kor mange knappar det er i ei av dei nye mengdene.

For å kunna oppdaga ei eventuell ulik tolking av tekstoppgåver, der reknearten låg gøymd i teksten, og taloppgåver, der reknearten var oppgjeven med matematisk symbolspråk, var det òg eit poeng med ei blanding av tekstoppgåver og taloppgåver. For tekstoppgåvene ville ei blanding av delings- og målingsdivisjonsoppgåver gi ein ytterlegare variasjon.

I denne masteroppgåva ser eg intuitive løysingsstrategiar for divisjon i kontrast til underviste metodar, som til dømes langdivisjonsalgoritmen. Eg ville at elevane skulle møta kjende tal, og valde difor å bruka heiltal, der utfordringa låg i at det var store tal, heller enn at utfordringa låg i at det var desimaltal eller brøkar. Vidare ville eg med tekstoppgåvene granska korleis dei ulike kontekstane påverka løysingsstrategiane – om dei ulike kontekstane påverka talrekninga på vegen fram mot eit svar. Men eg var ikkje ute etter å sjå korleis elevane heldt dette svaret opp mot konteksten att og vurderte det som rimeleg eller ikkje. Med dette meiner eg at dersom oppgåva er å finna kor mange bussar som trengst når skulen skal på tur, og svaret vert 5,1, so må det rundast opp til 6 bussar for at alle skal få plass. Difor valde eg berre heiltalsdivisjonar utan rest.

4.3 Oppgåvene

Oppgåvene eg nytta i fyrste økta var fylgjande:

1) En isbjørn veier 506 kg. Et barn veier 22 kg. Hvor mange barn går det i en isbjørn? [1]

---

[1] Denne oppgåva er inspirert av The polar bear problem, frå den nederlandske RME-tradisjonen, attgjeven i (Heuvel-Panhuizen, 1999). Opphavleg er berre massen til isbjørnen oppgjeven, og det høyrer då til oppgåva å skulla finna massen til eit barn, før sjølve utrekninga av divisjonen.

2) Olav har fylt opp badestampen han har på hytta. Den tar 666 liter. For å fylle den måtte han gå 37 turer til bekken med dunken sin. Hvor stor er dunken hans?

3) Markus, Vetle, Tevje, Balder, Ole og Harry jobber en dag i jordbæråkeren til nabobonden. På slutten av dagen får de 444kr som de må fordele mellom seg. Hvor mye får hver av dem?

Elevane fekk desse oppgåvene skriftleg i denne rekkjefylgja, og ei om gongen. Dei jobba seg gjennom ei oppgåve, og sa seg ferdig, eller vart avbrotne av meg før dei fekk neste. Oppgåvene var skrivne øvst på arket slik at det var rikeleg med arbeidsplass.

I andre økta brukte eg desse oppgåvene:

1) Lag tekst til dette delingsstykket
513 : 19 =

2) Lag tekst til dette delingsstykket
322 : 7 =

3) Lag tekst til dette delingsstykket
442 : 26 =

4) Lag tekst til dette delingsstykket
561 : 3 =

Elevane fekk desse oppgåvene skriftleg i denne rekkjefylgja, og ei om gongen. Dei fekk oppgåva om å løysa divisjonen etter at dei hadde laga tekst til tala. Dei jobba seg gjennom ei oppgåve, og sa seg ferdig, eller vart avbrotne av meg før dei fekk neste. Oppgåvene var skrivne øvst på arket slik at det var rikeleg med arbeidsplass.

4.4 Den semantiske strukturen i oppgåvene – a priori-analyse

Delings- eller målings-aspektet ved ei divisjonsoppgåve er definert av situasjonen divisjonen spring ut frå. Desse aspekta er dermed ikkje ibuande i reine taloppgåver. Ein eventuell samanheng mellom semantisk struktur i oppgåva og løysingsstrategi må dermed koplast til den semantiske strukturen elevane tillegg desse oppgåvene gjennom tekstane dei lagar. Dette legg imidlertid ingen hindringar for at også reine taloppgåver kan løysast med strategiar som byggjer på måling, der ein måler dividenden med divisoren, eller deling, der ein distribuerer dividenden på divisoren.

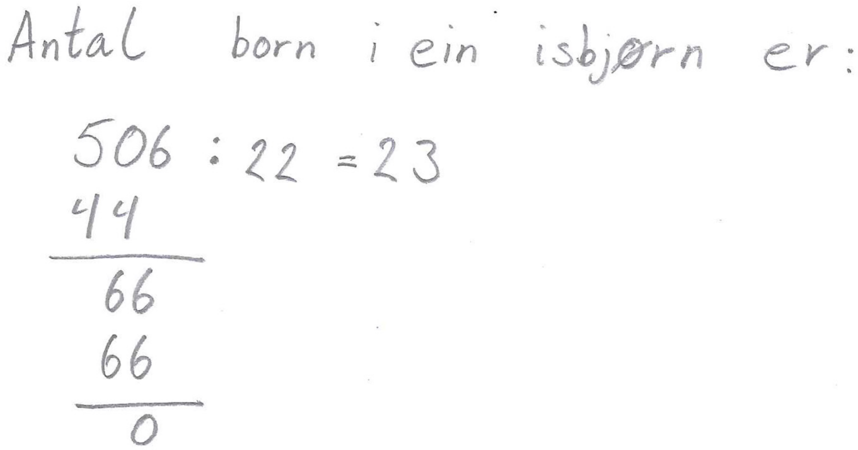
Dei tre tekstoppgåvene eg brukte spør høvesvis etter *Kor mange?*, *Kor stor?* og *Kor mykje?*. Desse formuleringane definerer alle tre oppgåvene som *like grupper*-oppgåver etter Greer (1992) si klassifisering. Badestampoppgåva gjev likevel rom for diskusjon, noko eg vil koma attende til seinare. Eg vil òg presentera alternative oppgåveformuleringar som vil definera oppgåvene som *multiplikativ samanlikning*-oppgåver saman med analysen av den semantiske strukturen i den enkelte oppgåva.

Oppgåva *En isbjørn veier 506 kg. Et barn veier 22 kg. Hvor mange barn går det i en isbjørn?* er som nemnt ei *like grupper*-oppgåve. Ei formulering som *En isbjørn veier 506 kg. Et barn veier 22 kg. Hvor mange ganger større er en isbjørn enn et barn?* ville derimot gjort dette til ei *multiplikativ samanlikning*-oppgåve. I begge formuleringane av oppgåva har både dividenden (isbjørn) og divisoren (born) eininga kilogram. Ein kan difor bruka divisoren til å måla dividenden, noko som definerer denne oppgåva som ei målingsdivisjonsoppgåve. Sjølve ordlyden i oppgåva inviterer òg til å måla dividenden med divisoren. *Hvor mange barn går det i en isbjørn?* gjev ei direkte kopling til å telja kor mange 22-arar det går i 506. Ved å gjera denne divisjonen om til ein multiplikasjon, men halda fast ved konteksten og eininga til faktorane, vil ein få denne likninga med éin ukjend: *x born • 22 kg/barn = 506 kg*. I samsvar med mine definisjonar av multiplikator og multiplikand ovanfor er det altså multiplikatoren som er ukjend. Løyst som gjentatt addisjon brukar ein her divisoren (22 kg) til å byggja opp, eller måla, dividenden (506 kg).

Olav har fylt opp badestampen han har på hytta. Den tar 666 liter. For å fylle den måtte han gå 37 turer til bekken med dunken sin. Hvor stor er dunken hans? er også ei *like grupper*-oppgåve. Formuleringa *Badestampen Olav har på hytta er 37 ganger større enn dunken han brukte til å bære vann i. Badestampen tar 666 liter. Hvor stor er dunken hans?* ville derimot gjort dette til ei *multiplikativ samanlikning*-oppgåve. Uavhengig av denne alternative formuleringa er dette ei delingsdivisjonsoppgåve. Dividenden har eininga liter, medan divisoren eksplisitt handlar om turar, og i utleia form dunkar. Det at oppgåva spør etter storleiken på dunken, medan denne divisjonen eigentleg gjev svar på kor mange liter Olav fekk med seg i kvar tur kan tenkjast å vera ei ekstra utfordring ved akkurat denne oppgåva. Divisjonen *666 liter : 37 turar = 18 liter/tur* gjev altså kvotienten eininga liter/tur, medan ordlyden i oppgåva spør etter storleiken på dunken, altså liter/dunk. Olav bar imidlertid alt vatnet med seg i éin dunk, og difor er dunken hans like stor som antal liter han fekk med seg i kvar tur, liter/dunk = liter/tur. Svaret på divisjonen ovanfor er dermed òg svaret på oppgåva. Det kan ikkje utelukkast at denne kompleksiteten rundt einingane til dei ulike faktorane i denne oppgåva har forvanska heile oppgåva. Som i isbjørnoppgåva kan også denne divisjonsoppgåva gjerast om til ein multiplikasjon, som ei likning med éin ukjend. Når ein held fast ved konteksten vil ein då få likninga *37 turar • x liter/tur = 666 liter*, og det er altså multiplikanden som er ukjend. Dette medfører at ein, i motsetnad til målingsdivisjonsoppgåva ovanfor, ikkje utan vidare vil kunna bruka ein oppbyggingsstrategi for å løysa divisjonsoppgåva. I målingsdivisjonsoppgåver brukar ein divisoren som byggestein i ein oppbyggingsstrategi, men som ein ser av multiplikasjonen ovanfor er det multiplikanden som er ukjend, og dermed manglar ein denne byggesteinen i delingsdivisjonsoppgåver. Det at ein ikkje kan bruka ein oppbyggingsstrategi direkte med dei oppgjevne tala er vel å merka berre gjeldande om ein held fast ved koplinga mellom kontekst og tal. Om ein tek tala ut av konteksten, står ein fritt til å operera på tala som ein vil.

Den tredje oppgåva, *Markus, Vetle, Tevje, Balder, Ole og Harry jobber en dag i jordbæråkeren til nabobonden. På slutten av dagen får de 444kr som de må fordele mellom seg. Hvor mye får hver av dem?*, er som dei to føregåande oppgåvene ei *like grupper*-oppgåve. Fylgjande formulering ville derimot vore ei *multiplikativ samanlikning*-oppgåve: *Markus, Vetle, Tevje, Balder, Ole og Harry jobber en dag i jordbæråkeren til nabobonden. På slutten av dagen får Markus 444kr. Dette er 6 ganger mer enn han skal ha. Hvor mye skal Markus ha?*. Dette er ei klassisk delingsdivisjonsoppgåve, der dividenden (kroner) og divisoren (gutane) har ulike einingar. Oppgåva handlar om å dela eit antal element i mengder med lik storleik og so finna storleiken på desse mengdene. Ordlyden i teksten, med *fordele mellom seg*, viser òg ein samanheng mellom oppgåva og formuleringa av oppgåva. Denne oppgåva kan til liks med dei føregåande oppgåvene sjåast som ein multiplikasjon, som ei likning med éin ukjend. Ved å halda fast ved faktorane med tilhøyrande einingar, får ein likninga *6 gutar • x kr/gut = 444 kr*. Som med badestampoppgåva ovanfor er det her multiplikanden som er ukjend, og ein kan difor ikkje utan vidare bruka ein oppbyggingsstrategi. Når ein held fast ved konteksten, og tala med einingar, må spørsmålet ein stiller vera ”Kva tal går 6 gonger i 444?” og ikkje ”Kor mange 6-arar går det i 444?” som i ei målingsdivisjonsoppgåve. Dette fordi ein veit at det er noko som skal gå seks gonger i 444, men ein veit ikkje kva denne byggesteinen (multiplikanden) er. Derimot vil ordlyden i denne oppgåva kanskje i større grad enn dei føregåande oppgåvene invitera til ein utdelingsstrategi der ein distribuerer dividenden over divisoren.

Med papir og blyant vil langdivisjonsalgoritmen vera ein, ”rett-fram”-metode for å løysa alle desse sju oppgåvene eg nytta i forskinga mi, her eksemplifisert gjennom mi eiga løysing av den fyrste tekstoppgåva:



Figur 6: Mi løysing av den fyrste tekstoppgåva.

Sjølve utforminga av denne algoritmen kan ikkje seiast å he ein delings- eller målingsstruktur. Måten ein snakkar om langdivisjonsalgoritmen på, byggjer imidlertid på ein målingsstruktur. I dømet ovanfor (Figur 6) brukar ein divisoren til å måla kor mange heile divisorar som går i dividenden. Dette samsvarer òg med formuleringa ”Kor mange 22-arar går det i 506?” som mange lærarar og andre vaksne vil kunna nytta som ei starthjelp og støtte for å løysa divisjonen ”506 : 22 = __”.

4.5 Elevane sine løysingsstrategiar – a posteriori-analyse

I dette delkapitlet vert strategiane elevane valde presenterte. Desse presentasjonane og skildringane baserer seg på det elevane gjorde og viste i arbeidet med å løysa desse oppgåvene. Det skal poengterast at elevane ikkje nødvendigvis kom fram til eit svar med strategiane dei valde. Strategiane er likevel tekne med fordi dei viser at elevane var på veg ein stad med arbeidet sitt. Kategoriane reflekterer måten elevane angreip problemet på – kva idear dei hadde om korleis dei kunne koma fram til eit svar. Det viktigaste under datainnsamlinga var å få innblikk i korleis elevane angreip ei oppgåve for å koma fram til eit svar, og ikkje sjølve svaret dei skulle koma fram til.

Løysingsstrategiane eg identifiserte er:

Gjett og juster
Additiv oppbygging
Subtraktiv nedbygging
Utdeling
Algoritme

Desse strategiane vert eksemplifiserte i dei påfylgjande analysesidene. Eg skil mellom alle desse fem hovudstrategiane fordi dei alle representerer ein måte å tenkja på. *Gjett og juster* handlar om å finna x i $a \bullet x$ = b, der a og b er kjende. Både *additiv oppbygging* og *subtraktiv nedbygging* handlar om å finna x i $x \bullet a$ = b, der a og b er kjende. Dei har likevel vorte til ulike strategiar fordi dei handlar om høvesvis å ”byggja opp” og ”tømma ut”. *Utdeling* er ei abstrahert direkte modellering av situasjonen. Det vil seia å distribuera dividenden einingsvis eller bolkevis på divisoren, for deretter å finna kor stor denne kvotienten vert. *Algoritme* er meir ei samling av strategiar og fragment av strategiar som tilsynelatande ikkje har samanheng med noko anna. Eit viktig trekk her er at ein erkjenner eit behov for å kunna dividera eit tal md eit anna, og at ein søkjer å gjera dette direkte, utan å gå om andre rekneartar, og med tilsynelatande tilfeldig mengde forståing eller ikkje.

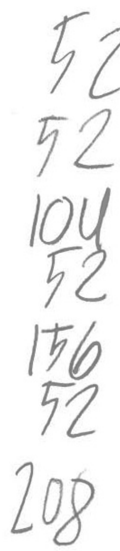
Transkripsjonskodar:

<u>understrek</u> = eleven legg trykk på ordet
* = informasjon

4.5.1 Gjett og juster

Som døme på *gjett og juster*, går eg her nærare inn på korleis Øyvind (og Oliver og Stian) løyste taloppgåva 442 : 26 = 17.

* Øyvind byrjar med ei *additiv oppbygging*. Han adderer divisoren (26) med seg sjølv i hovudet. Deretter summerer han denne gjentekne gonger som vist på det skriftlege arbeidet hans.



Figur 7: Øyvind adderer den doble divisoren.

* Oliver fylgjer med på Øyvind sitt arbeid, men avbryt so Øyvind:

1. Oliver: Det må gå tjue-seks gonger. So det kan ikkje vera femti-to. Det må gå tjue-seks gonger.
2. Stian: Det må iallfall vera noko ganske lite noko. Fire kanskje.

* Oliver og Stian skriv begge ned ein kolonne med 26 4-tal. Samstundes reknar Øyvind 26 • 4 i hovudet og får 104, som er riktig. Dette seier han høgt, men Oliver og Stian held fram med det dei skriv. Øyvind seier han vil prøva med 11, og byrjar å skriva ein kolonne med 11-tal.

Figur 8: Øyvind skal addera 26 11-tal.

* Før Øyvind gjer noko meir med dette, kikkar Oliver opp frå arket sitt og seier:

3. Oliver: Det var for lite.
4. Stian: Eg prøver med fjorten.

* Stian skriv ned ein kolonne med 26 14-tal. Samstundes byrjar Øyvind å addera 11-tala i kolonnen sin ved *hopp-telja* munnleg. Stian får summen av 14-tala til å verta 404 (som er feil).

5. Stian: Eg fekk fire-hundre-og-fire.

* 26 • 14 = 364, ikkje 404, men gutane veit ikkje dette, og resonnerer vidare ut frå at 26 • 14 *er* 404.

6. Øyvind: Då er det mellom femten og tjue.
7. Oliver: Prøv femten.
8. Stian: Nei, det kan umogeleg verta to.
9. Øyvind: Det vert ikkje to, Oliver. Det vert nulle (0) elle femme (5).

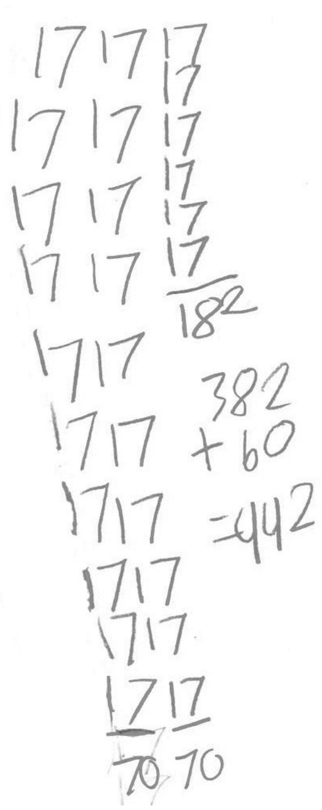
* Oliver ser ut i lufta før han byrjar å skriva att.

10. Øyvind: Det er ikkje seksten, Oliver.
11. Oliver: Korleis veit du det?
12. Øyvind: Sidan seks gonger seks, det er tretti-seks. (6 • 6 = 36) So det går ikkje.
13. Stian: Dooh!
14. Øyvind: Det må vera noko som gonge seks. Som får det til å verta to.
15. Stian (samstundes med Øyvind (utsegn 14)): Sytten? Sju gonger seks? Nei, det kan ikkje verta to.
16. Øyvind: Sju! Sytten!
17. Stian: Åtte gonger seks. Åtte, seksten, tjue-fire, tretti-to, førti.

* Stian byrjar å hopp-telja med åtte medan han held fram ein og ein finger, men seier so at 17 er rett:

18. Stian: Sytten er rett.
19. Terje: Korleis veit du det Stian?
20. Stian: Eg berre trur det sidan sju gonger seks det er jo førti-to. Då vert det fire-hundre-og-førti-to når me plussar saman.
21. Terje: Kan du forklara det ein gong til?
22. Stian: Liksom. Sju gonger seks, det er jo førti-to. Og so ti gonger tjue, det er jo. Nei. Det er ikkje riktig.
23. Øyvind: Sjekk no då.

* På oppfordring frå meg gjer Øyvind fylgjande skriftlege arbeid for å visa at den føreslåtte kvotienten er rett



Øyvind forklarer meg her at ”alle sjuarane der [1.kolonne] vert sytti, alle sjuarane der [2.kolonne], det vert 70, alle sjuarane der [3.kolonne], det vert førti-to. Og det til saman, det vert hundre-og-åtti-to. Og dei [1-tala (10-arane) i 1.kolonne] er hundre, og dei [1-tala (10-arane) i 2.kolonne] er hundre. Og då har me tre-hundre-og-åtti-to. Og pluss seksti [1-tala (10-arane) i 3.kolonne]. Det vert fire-hundre-og-førti-to.

Figur 9: Øyvind adderer 26 17-tal.

Øyvind byrja her med ei *additiv oppbygging*. Denne strategien vil eg koma attende til med eit anna døme i neste delkapittel. Øyvind vert imidlertid avbroten av Oliver, som tenkjer på ein annan måte, ved det eg har kalla *gjett og juster*. Dette er to heilt grunnleggjande ulike måtar å tenkja på ved at ein i *additiv oppbygging* er på jakt etter den faktoren som tener som multiplikator. Denne finn ein enkelt ved ei additiv oppbygging med multiplikanden. I *gjett og juster* er ein derimot ute etter den faktoren som tener som multiplikand. Dersom ein tenkjer gjennom ei *additiv oppbygging* manglar ein altså den faktoren som skulle vore byggesteinen. Det desse gutane gjer er då å gjetta kva verdi denne byggesteinen skal ha, og so sjekka om denne verdien er rett eller ikkje. *Gjett og juster* er dermed ein fleirtrinnsstrategi, der ein fyrst gjettar på ein verdi, so byggjer opp, og so eventuelt justerer denne gjetta verdien.

4.5.2 Additiv oppbygging

Løysingsforsøka som er kategoriserte som *additiv oppbygging* er alle kjenneteikna ved ei oppbygging av dividenden ved hjelp av divisoren, anten divisoren sjølv, eller eit multiplum av denne. Renate og Ingrid sitt arbeid med den fyrste taloppgåva, 513:19=27, er eit døme på *additiv oppbygging*.

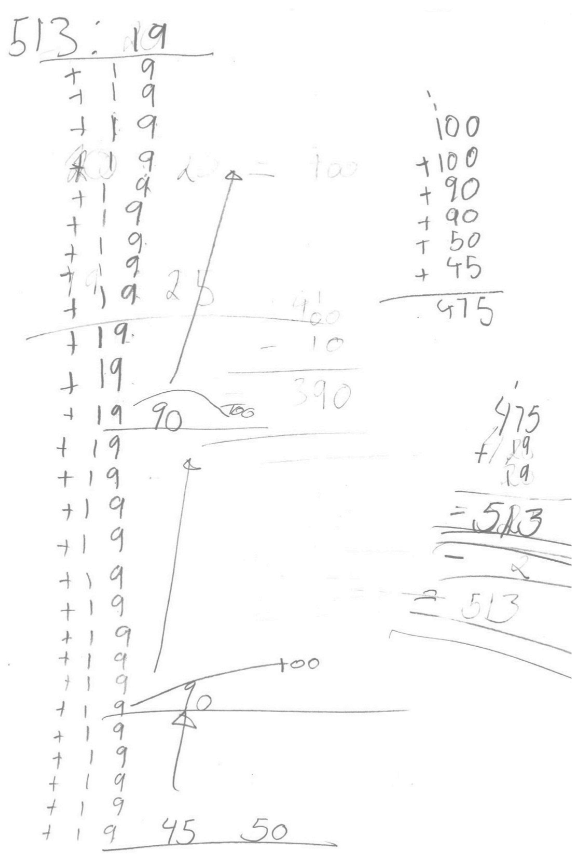
* Kyrre føreslår at dei skal løysa denne oppgåva ved å gjetta kva som er riktig svar, men Renate kjem i staden med fylgjande forslag:

24. Renate: Du kan ta tjue i staden for nitten. Og kvar gong du tek tjue, so set du ein strek. Som du må ta minus.

* Ho byrjar å hopp-telja med 20 til 500 samstundes som ho set ein teljestrek på arket sitt for kvart hopp. Til saman skriv ho fem buntar med fem teljestrekar. Deretter tel ho dei 25 teljestrekane og skriv opp eit subtraksjonsstykke der ho subtraherer 25 frå 513 og får 488.

Renate brukar her ein tilnærma verdi for divisoren og byggjer seg oppover til dividenden. 20 er eit tal som er lett å handtera og operera med samanlikna med 19, og dessutan er skilnaden mellom dei berre 1, eit tal som med sine multiplum òg er lett å handtera. 20 som faktor i 100, og dermed òg i multiplum av 100, er òg lett å handtera, noko Renate demonstrerer med å hopp-telja til 500. I utsegn 24 seier Renate at ”Du kan ta tjue i staden for nitten. Og kvar gong du tek tjue, so set du ein strek. Som du må ta minus". Det er rimeleg å anta at ho med dette meiner at ein kan hopp-telja med 20 til eit tal i nærleiken av 513, og deretter subtrahera antal hopp frå dette talet, og so sjå om ein får 513. Fordi ho brukar 20 i staden for 19 som ho skulle ha brukt, og differansen mellom desse er 1, vil det ho skal subtrahera vera likt antal hopp. På eit eller anna tidspunkt har ho gått bort frå det talet ho enda på i hopp-teljinga si, til å bruka 513, som er det talet ho *skulle* ha enda på. Ho skriv altså 513 der ho truleg skulle hatt 500, og subtraherer 25 som er antal "20-hopp" frå null til 500. Differansen som ho får, 488, er riktig ut frå dei tala ho nyttar, men det er truleg at ho skulle kome til 475.

* Samstundes har Ingrid skrive opp ein kolonne med til saman 28 19-tal. Renate overtek dette arket og summerer 25 av desse.



Addisjonsstykket 475+19+19=513 kjem til seinare, og vert kommentert nedanfor.

Figur 10: Renate og Ingrid sitt felles arbeid.

* Renate hopp-tel med 9 til høvesvis 45, 90 og 90, frå nedst i kolonnen ovanfor. 1-tala adderer ho med hopp-teljing med 10 til 100, 100, og 50. Delsummane, øvst til høgre, summerer dei til 475, som er riktig.

25. Ingrid: Det er ikkje tjue-fem.
26. Renate: Det er mykje mindre enn det.
27. Ingrid: Renate, det er ikkje mykje mindre.
28. Renate: Nei, ikkje mykje mindre. Okay, me må finna ut kor mange gonger ned me må no då.
29. Ingrid: Me må opp, Renate. Ikkje ned.
30. Renate: Åja, me må opp kanskje.
31. Ingrid: Kanskje? Me må. Kanskje tjue-seks.
32. Renate: Eg trur iallfall to gonger.

* Renate skriv no opp 475+20+20., og får summen 515.

33. Renate: No fekk me fem-hundre-og-femten.
34. Ingrid (mot Kyrre): Me er nærast. Me fekk fem-hundre-og-femten.
35. Renate: Og det er gonger tjue-sju.

* På oppfordring frå meg forklarer Ingrid at dei har addert 20 to gonger. Renate seier då at ho vil få 513 viss ho subtraherer 2 frå 515. Ho skriv opp 515-2=513.

36. Terje: Men kvifor har de lagt til tjue?
37. Renate: Me må ta minus to.
38. Ingrid: Ja, for det er jo eigentleg nitten.

Etter at Renate og Ingrid har summert 25 19-tal, seier Ingrid (utsegn 25) at ”Det er ikkje tjue-fem”. Med utgangspunkt i at dei vil finna svaret på oppgåva ved å addera divisoren til dei når dividenden, og ut frå at dei nettopp har addert 25 divisorar, er det rimeleg å anta at Ingrid med denne utsegna har konkludert med at svaret ikkje er 25. Gjennom den påfylgjande replikkvekslinga kjem det fram at dei ”må opp” (utsegn 29) og at svaret kanskje er 26 (utsegn 31). I utsegn 32 seier Renate at ho ”…trur iallfall to gonger”, før ho adderer to 20-tal (sjå Figur 10). Sett i samanheng med at ho i utsegn 35 seier ”Og det er gonger tjue-sju”, må ”to gonger” (utsegn 32) her innebera at ho må addera to divisorar til. Dei viser her ei form for vurdering og justering. Når dei ser at dei ikkje når dividenden med antalet divisorar dei har addert, vel dei å addera fleire divisorar, og gjer på denne måten ei justering. I utsegn 24 viser Renate at ho medvite brukar 20 i staden for 19 som divisor. Det kan tenkjast at 20 som addend heng att frå den fyrste teljinga ho gjorde. At 20 er divisoren vert òg støtta av svara dei gir meg når eg spør om kvifor dei har brukt 20 som addend (utsegn 36). Dei svarer då at dei ”må ta minus to” (utsegn 37) fordi ”det er jo eigentleg nitten” dei skulle addert (utsegn 38).

Renate og Ingrid viser her at dei brukar divisoren, og eit anna ”finare” tal for divisoren, til å systematisk byggja opp dividenden. Det sentrale her er at dei tek utgangspunkt i dei to tala, dei har fått oppgjeve, altså dividend og divisor.

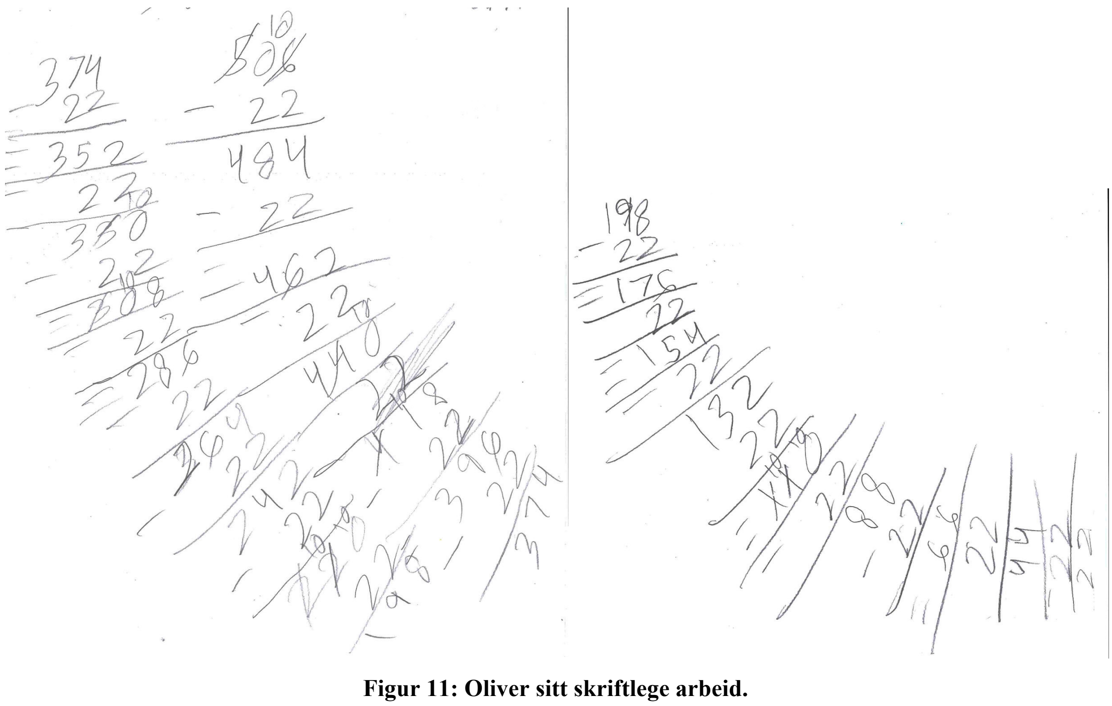
4.5.3 Subtraktiv nedbygging

Også i løysingsforsøka som utgjer *subtraktiv nedbygging*, tek elevane utgangspunkt i dei tala dei har fått oppgjeve, altså dividend og divisor. Til skilnad frå *additiv oppbygging*, subtraherer ein divisoren frå dividenden i staden for å byggja opp dividenden med divisoren. Oliver sitt arbeid med den fyrste tekstoppgåva, 506:22=23, eksemplifiserer *subtraktiv nedbygging*.

* Etter at Oliver har lese oppgåva høgt kjem Stian med forslag om å multiplisera 506 med 22, og fylgjande samtale utspelar seg:

39. Oliver: Gonge? Nei, er det ikkje, ehh? Me tek og minusar. Me tek og minusar litt.
40. Stian: Ja.
41. Oliver: Me tek fem-hundre-og-seks minus tjue-to. Me berre gjer det. Og so ser me kva me får.

* Oliver byrjar å skriva den midtarste kolonnen under. Gjennom arbeidet med denne oppgåva skriv han alle tre kolonnane:



Figur 11: Oliver sitt skriftlege arbeid.

42. Oliver: Det vert fire. Det der vert åtte. Og der fire. Fire-hundre-og-åtti-fire. (Midtre kolonne i Figur 11) Det er minus, ikkje pluss.
43. Øyvind: Ja.
44. Oliver: Og so same, fire-hundre-og-åtti-fire minus tjue-to igjen.
45. Stian: Kva vert det?
46. Oliver: Eg veit ikkje, men det kjem til å gå. Det kjem til å verta mindre. Eg ser det på det. Du ser at det vert mindre heile tida. Og so igjen. Det kjem til å ta lang tid.
47. Stian: Er dette verkeleg den enklaste måten?
48. Oliver: Ja.
49. Stian: Kan me ikkje berre telja oppover.
50. Øyvind: Korleis då?
51. Oliver: Gjer det de.
52. Stian: Tjue-to, førti-fire, seksti-seks, åtti-åtte.

* Øyvind og Stian hopp-tel med 22 medan dei tel kor mange gonger dei adderer 22. Samstundes held Oliver fram med sine subtraksjonar på sitt ark. Han vert ferdig med sitt arbeid før Øyvind og Stian vert ferdige med sitt, og dei samlast om Oliver sitt arbeid. Den siste subtraksjonen Oliver har skrive er 44–22=22.

53. Oliver: To, to. No, so er det berre å telja.

* Oliver og Øyvind tel saman kor mange 22-tal Oliver har subtrahert. Dei er samde om at svaret, antalet born, er likt antalet subtraksjonar. Oliver tel berre minuendane han har skrive og kjem til 22. Øyvind tel i tillegg differansen i 44–22=22, og kjem difor til 23. Når eg spør kva dei har gjort, svarer Øyvind:

54. Øyvind: Me tok fem-hundre-og-seks minus tjue-to heile tida til me kom til null, og so talde me tjue-to-arane.

* Dei er usamde om dei skal telja med det sist 22-talet eller ikkje. Før dei vert avbrotne av meg, seier Øyvind:

55. Øyvind: Jammen, det vert null. Tjue-to minus tjue-to er null.

Utsegnene ”Nei, er det ikkje, ehh? Me tek og minusar” (utsegn 39) og ”…so ser me kva me får” (utsegn 41) tyder på at Oliver ikkje umiddelbart gjennomskodar kva for ein rekneoperasjon han skal nytta for å finna svaret. Fyrst med utsegn 42 (”Det er minus, ikkje pluss”) er han sikker på at han er på rett veg, og han held fram med heile det skriftlege arbeidet vist i Figur 11. Som ein ser er dette mykje skrivearbeid, og Oliver uttrykkjer òg sjølv at ”Det kjem til å ta lang tid” (utsegn 46). Stian sitt spørsmål om denne måten er den enklaste måten (utsegn 47) verkar vera ein respons på det Oliver seier.

Ei utfordring med Oliver sin løysingsstrategi er kor mange gonger ein skal subtrahera divisoren frå dividenden. Når ein nyttar denne strategien på heiltalsdivisjonar utan rest, vil dei to siste differansane alltid verta:

i) 3 • divisor – divisor = **2 • divisor**

ii) **2 • divisor** – divisor = *divisor*, og

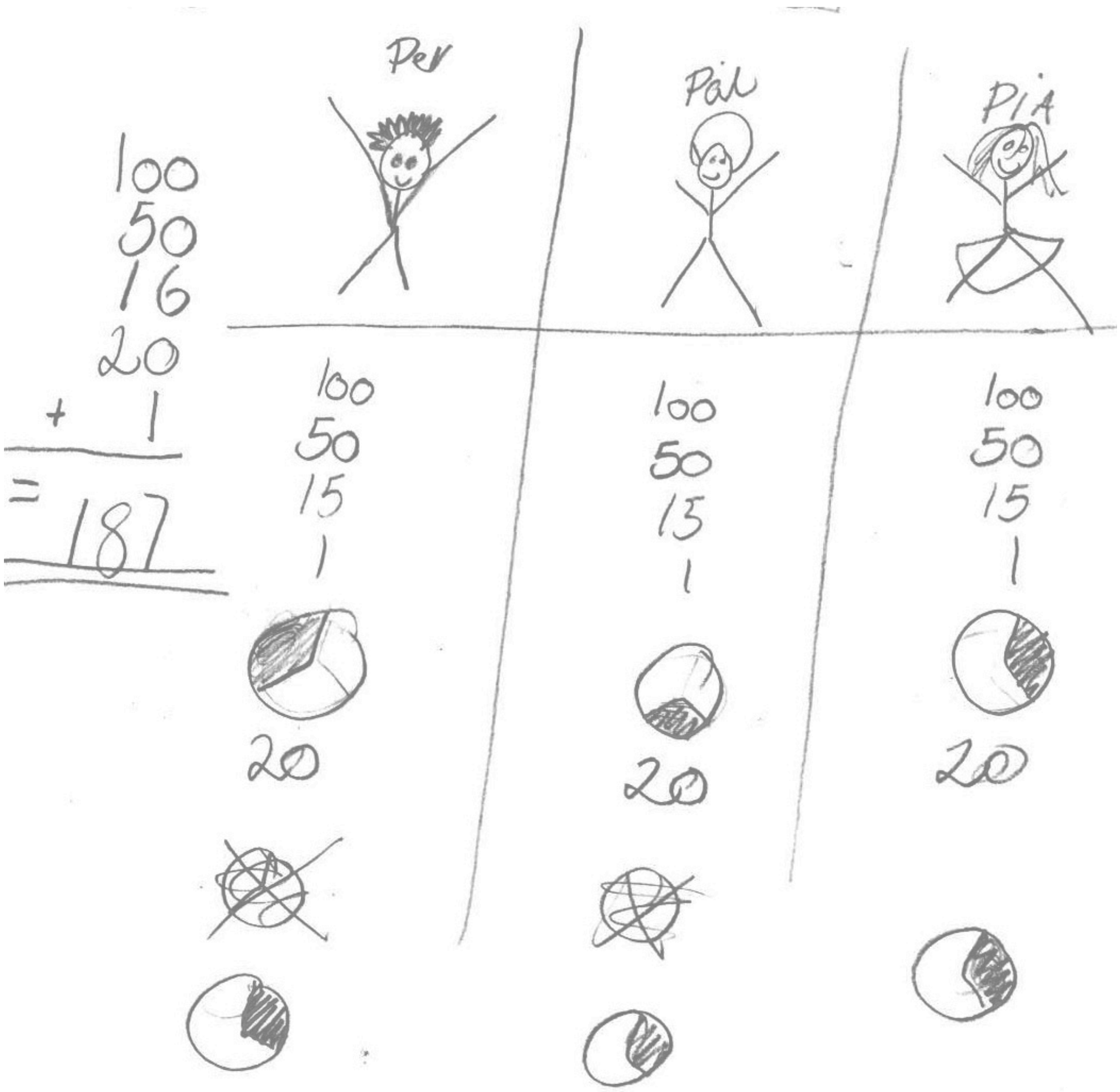
iii) *divisor* – divisor = 0.

Som ein ser i Figur 11 stoppar Oliver etter ii). Ved å stoppa på ii), utan å gjennomføra iii), vil antalet subtraksjonar, og dermed kvotienten, verta ein for liten. Det er dette som føregår mellom utsegn 53 og 54, når Øyvind og Oliver høvesvis kjem til at svaret skal vera 23 og 22. På bakgrunn av utsegn 55, der Øyvind seier at ”Tjue-to minus tjue-to er null”, kan det tenkjast at Øyvind gjer subtraksjonen iii) i hovudet, og difor òg tel med den siste differansen, markert med kursiv i ii).

4.5.4 Utdeling

Løysingsforsøka som kjem under kategorien *utdeling* har til felles at elevane modellerer eller konkretiserer situasjonen. I dømet under distribuerer dei dividenden bolkevis på divisoren. Denne strategien er konkretisert av Renate og Kyrre sitt arbeid med den siste taloppgåva, 561:3=187.

* Etter å ha laga ein kontekst (3 personar deler 561 bollar) til divisjonsoppgåva, byrjar dei med utrekninga. Denne gongen er dei alle fokuserte på sitt eige ark. Renate gjer det skriftlege arbeidet vist under:



Figur 12: Renate sitt skriftlege arbeid.

* Renate deler 561 opp i 500+60+1, og byrjar med å fordela 500 til dei tre personane. Dette gjer ho med å dela ut 100 og 50 til kvar, og ho har då att 50 av dei 500, før ho spør meg:

56. Renate: Går det an å dela femti på tre?
57. Terje: Kva får du då?
58. Renate: Ehh. Men går det an?
59. Kyrre: Viss du deler femti på tre so får du. Det fins noko som vert kalla desimaltal òg, smarta.
60. Renate: Ja, men dette her er bollar. Me, ja. Det går jo. Ja, men det vert brøk det då. Sidan ein halv bolle er sånn.
61. Kyrre: Ja.
62. Renate: Du kan jo dela bollen.
63. Kyrre: Nææhh.

64. Renate: Det går an å dela bollen.

* Renate deler so 15 og 1 til kvar av dei tre personane (sjå Figur 12). Ho har då delt ut 48 av dei 50 ho hadde att, og spør meg om hjelp til å handtera resten på 2. Ho føreslår å representera *2 dividert på 3* ved brøk, og eg stadfestar at det er ei mogelegheit. Deretter fordeler ho 60 slik at det vert 20 på kvar, og til slutt 1. På spørsmål frå meg seier ho at i den fyrste brøk-illustrasjonen representerer den uskraverte delen dei to tredelane kvar person skal ha, medan i den andre brøk-illustrasjonen er det den skraverte delen som representerer den eine tredelen kvar person skal ha. Til slutt summerer ho eine kolonnen med tal, der ho summerer 1 og 15 til 16, og $^2/_3$ og $^1/_3$ til 1 i hovudet.

Renate har her modellert situasjonen ved å teikna opp dei tre personane som skal dela dei 561 bollane som er skildra i konteksten dei lagar til oppgåva. som ein ser deler Renate dividenden opp i hundrarar, tiarar og einarar. Dette er noko av det same som Anghileri (2001) si skildring av *oppdeling av dividenden*. Renate vel å bruka tal som ikkje er multiplum av divisoren. Dette medfører at ho endar opp med to brøkar.

* Etter at dei er ferdige med denne utdelinga, utspelar fylgjande samtale seg:

65. Terje: Kunne de gjort det slik i stad òg? Kunne de gjort slik på dei andre oppgåvene òg?
66. Ingrid: Ja.
67. Renate: Ja.
68. Kyrre: Ja.
69. Terje: Er de sikre?
70. Renate: Delt bollar. Og delt pengar. Og alt det der.
71. Kyrre: Men det hadde vore litt større problem, fordi det var tjue-seks, og veldig store tal. So då måtte me delt opp i fleire tusen personar ikkje sant.

* Den førre oppgåva var 442:26=17

72. Renate: Ja.
73. Kyrre: So då hadde det vore vanskelegare.
74. Renate: Difor var det enklare å gjera det på denne måten sidan det berre var tre. For eksempel då det var. Då det var det der tjue-seks, mykje vanskelegare.
75. Kyrre: 26 ja. 26, det er jo mykje vanskelegare, liksom.

I utsegnene 65 til 75 seier dei at dei kunne brukt *utdeling* på dei andre divisjonsstykka òg. Det kjem ikkje fram om dette er noko dei har reflektert over tidlegare i økta, eller om det er noko dei innser på dette tidspunktet. Som Kyrre seier i utsegn 71, ville det vore svært arbeidsamt å dela ut til til dømes 26 personar. Eit anna spørsmål er om kvifor dei, viss dei var klar over denne metoden, ikkje brukte den på oppgåve 2, 322 : 7 = 46. Det ville nok vore meir arbeidsamt å fordela på 7 enn på 3 personar, men likevel svært mykje mindre arbeidsamt enn med 26 personar. Ein eigenskap ved oppgåve 2 som skil den frå oppgåve 4 er at dei i oppgåve 2 ikkje kunne byrja med å dela ut 100 til kvar, og heller ikkje 50 til kvar, det er berre 4 tiarar i kvotienten.

4.5.5 Algoritme

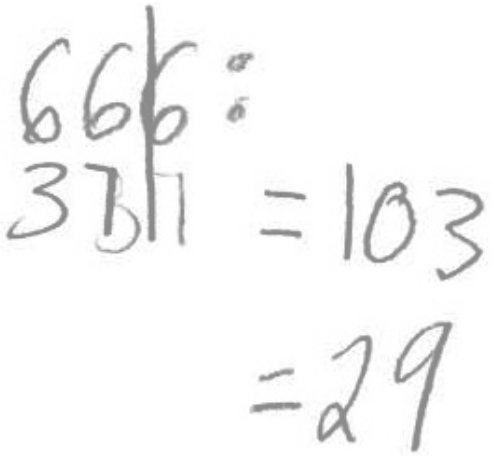
Dei løysingsforsøka som er kategorisert som *algoritme* er kjenneteikna ved at elevane eksplisitt uttrykkjer at svaret på oppgåva ligg i løysinga av eit oppstilt divisjonsstykke. Elevane brukar divisjonsteiknet i oppstillinga, og dei uttrykkjer eit ynskje om ei oppskrift for å finna svaret direkte. Elevane prøver òg å *manipulera* på oppstillinga. *Algoritme* vert her eksemplifisert med Ingrid, Renate og Kyrre sitt arbeid med den andre tekstoppgåva, 666:37=18.

* Kyrre skriv fyrst 666:37 bortover (Figur 13), men skriv so 37 under 666, i einar- og tiar-posisjonen:

Figur 13: Kyrre si oppstilling av 666:37.

76. Kyrre: Viss me tek seks, dela på sju. Det går ikkje. Då må me låna. Me berre prøver det. So har me seksten delt på sju.

* Samstundes skriv Ingrid 666:37 som vist under (Figur 14).



Ingrid skriv fyrst 666, og so 37 rett under, i hundrar- og tiar-posisjonen. Etter utsegn 87 skriv ho 103, som er summen av 66 og 37. Seinare, etter utsegn 94, skriv ho 29, som er differansen mellom 66 og 37. Begge desse vil eg koma attende til seinare.

Figur 14: Ingrid si oppstilling av 666:37.

77. Renate: Eg hugsar aldri at me har lært å skriva under kvarandre.
78. Ingrid: Det er fordi me ikkje skal læra det før i sjette eller sjuande. Men Anne (vikarlærar) viste meg.

* Ingrid skriv fyrst 37 under 666 slik som Kyrre, men flyttar deretter 37 fram ein posisjon, som vist over (Figur 14):

79. Ingrid: Tretti-sju pluss seksti-seks. Me skulle ikkje setja det under, me skulle setja det fremst. Ta seksti-seks pluss tretti-sju.
80. Kyrre: Seksti-seks pluss tretti-sju?
81. Ingrid: Ja.
82. Renate: Berre som eit vanleg reknestykke?
83. Ingrid: Seksti-seks pluss tretti-sju.
84. Kyrre: Det er hundre-og-tre.
85. Renate: Kvifor skal me gjera det der?
86. Kyrre: Det er hundre-og-tre.
87. Ingrid: Okay. Ja, det er hundre-og-tre.
88. Kyrre: So hundre-og-tre, er det svaret då, eller?

* Eg spør om dei kan kontrollera om svaret er riktig eller ikkje på nokon måte.

89. Kyrre: Ja, viss me tek hundre-og-tre heilt til seks-hundre-og-seksti-seks, og viss det vert tretti-sju so er svaret rett. Som eg tvilar på at det vert.
90. Ingrid: Kan me ikkje berre prøva då?
91. Kyrre: Det vert ikkje over ti ein gong.
92. Renate: Skal me gonga det?
93. Kyrre: Svaret må vera mykje mindre enn hundre-og-tre. Trur eg. For viss me skal ta hundre-og-tre heilt opp til seks-hundre-og-seksti-seks so kan det umogeleg verta tretti-sju.
94. Ingrid: Jammen, då kan me prøva med seksti-seks minus tretti-sju då.

* Renate reknar dette ut til å verta 29.

95. Ingrid: Eg trur det er anten tjue-ni eller hundre-og-tre. Viss me ikkje skal gjera noko med seksa.
96. Kyrre: Tjue-ni liter? Då kan me ta tjue-ni heilt til. Oi. Høyr her. Viss det er tjue-ni, so kan me ta tjue-ni heilt opp til seks-hundre-og-seksti-seks.
97. Ingrid: Jammen, kan ikkje nokon prøva med tjue-ni og nokon med hundre-og-tre. So ser me om noko av det vert riktig.
98. Kyrre: Hundre-og-tre kan umogeleg verta riktig. Veit du kvifor? Det kjem ikkje opp til ti ein gong før det når det der. (peikar på 666 som han har skrive.)

* Kyrre forklarer for Ingrid og Renate at 103 må vera for stort tal. Ingrid adderer 29 fleire gonger. Før ho vert ferdig med dette seier Renate:

99. Renate: Eg lurer eigentleg på om dette er rett.

* Eg spør om dei kan finna løysinga på ein annan måte – ein måte dei kan. Etter dette løyser dei oppgåva med gjentatt addisjon av divisor, altså 37.

Kyrre si oppstilling av tala i utrekninga (Figur 13) er her identisk med ei oppstilling av subtraksjon. Måten han ordlegg seg på, med ”Då må me låna” (utsegn 76), er òg nært knytt til subtraksjon. I same utsegn held han derimot fram med ”…seksten delt på sju” Dette er ikkje noko som koplast mot subtraksjon. Det han gjer, minner om det Anghileri (2001) skildrar om å handsama tala siffervis. I hennar kategori er det ein eigenskap at elevane handsama tala siffervis, men med eit medvit om at siffera også har ein posisjon og dermed ein verdi i kraft av denne posisjonen. Det at Kyrre faktisk seier ”…seksten delt på sju” (utsegn 76) kan tyda på at han deler tala opp siffervis. I denne samanhengen er divisoren 37, og ikkje 7, og ein må då dividera på heile divisoren. Det han gjer med dividenden er derimot ikkje direkte feil. Det er fullt mogleg å dividera dividenden bolkevis på divisoren. Det er likevel ikkje tvil om at dette er ein tungvint måte å gjera det på her.

Det Kyrre seier i utsegn 89, om at viss han med gjentatt addisjon av 103, eller i utsegn 96 med 29, får 666, so er det rett, er same tankegangen som med gjett og juster.

Ingrid refererer i utsegn 78 til at ho har vorte vist ei oppstilling av ein vikarlærar. I utsegn 79 brukar ho òg preteritumsforma *skulle* av verbet *skal*, i staden for presensforma *skal*. Dette tolkar eg til at ho viser tilbake til ei hending, og ikkje tilbake til noko ho sjølv veit og kan. I utsegn 79 seier ho òg ”Ta tretti-sju pluss seksti-seks” medan ho i utsegn 94 seier ”Jammen, då kan me prøva med seksti-seks minus tretti-sju då”. Dette tyder på at ho prøver seg fram med noko anna, og når ho ser at dette ikkje stemmer prøver ho seg med noko anna. Dette er døme på assimilasjon. Ho prøver ein ide ho har og testar denne mot ein annan ide. Når ho ser at denne ideen ikkje passar, endrar ho ideen ho prøver med, og prøver å assimilera på nytt.

4.6 Samanheng mellom semantisk struktur i oppgåve og løysingsstrategi

Tabellen under (Tabell 1) viser ei komplett oversikt over elevane sine løysingsstrategiar i kronologisk rekkjefylgje. Der ein strategi går over fleire kolonnar, og dermed elevar, tyder det at elevane samarbeidde om vedkomande strategi på oppgåva. I nokre av tilfella nytta elevane seg av fleire ulike strategiar på same oppgåve. Desse tilfella er presenterte med fleire strategiar innanfor same rad, og dermed oppgåve. På oppgåve 2 i fyrste økta, 666 : 37 = 18, ser ein til dømes at Ingrid byrja med *algoritme* før Kyrre og Renate hadde byrja å gjera noko arbeid. Deretter samarbeidde dei alle tre om å bruka *algoritme*, før dei kvar for seg heldt fram med *additiv oppbygging*.

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Gruppe 1</th><th colspan="3">Gruppe 2</th></tr>
<tr><th>1.økt</th><th>Kyrre</th><th>Ingrid</th><th>Renate</th><th>Øyvind</th><th>Oliver</th><th>Stian</th></tr>
<tr><td>506:22
=23</td><td colspan="3">Additiv oppbygging</td><td>Subtraktiv nedbygging
Additiv oppbygging</td><td>Subtraktiv nedbygging</td><td>Subtraktiv nedbygging
Additiv oppbygging</td></tr>
<tr><td rowspan="3">666:37
=18</td><td></td><td>Algoritme</td><td></td><td rowspan="3">Algoritme
Additiv oppbygging</td><td rowspan="3">Algoritme
Additiv oppbygging</td><td rowspan="3">Gjett og juster</td></tr>
<tr><td colspan="3">Algoritme</td></tr>
<tr><td>Additiv oppbygging</td><td>Additiv oppbygging</td><td>Additiv oppbygging</td></tr>
<tr><td>444:6
=74</td><td>Algoritme
Utdeling
Gjett og juster</td><td>Algoritme
Gjett og juster</td><td>Gjett og juster</td><td>Additiv oppbygging
Gjett og juster
Algoritme</td><td>Gjett og juster</td><td>Additiv oppbygging
Gjett og juster</td></tr>
<tr><th>2.økt</th><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">513:19
=27</td><td rowspan="2">Gjett og juster</td><td>Additiv oppbygging</td><td>Additiv oppbygging</td><td rowspan="2">Gjett og juster</td><td rowspan="2">Gjett og juster</td><td rowspan="2">Gjett og juster</td></tr>
<tr><td colspan="2">Additiv oppbygging</td></tr>
<tr><td>322:7
=46</td><td>Gjett og juster</td><td colspan="2">Additiv oppbygging</td><td>Gjett og juster</td><td>Gjett og juster</td><td>Gjett og juster</td></tr>
<tr><td rowspan="2">442:26
=17</td><td rowspan="2">Additiv oppbygging</td><td>Additiv oppbygging</td><td>Additiv oppbygging</td><td rowspan="2">Additiv oppbygging
Gjett og juster</td><td rowspan="2">Gjett og juster</td><td rowspan="2">Gjett og juster</td></tr>
<tr><td colspan="2">Additiv oppbygging</td></tr>
<tr><td>561:3
=187</td><td>Gjett og juster
Utdeling</td><td>Additiv oppbygging
Utdeling</td><td>Utdeling</td><td>Gjett og juster</td><td>Gjett og juster</td><td>Gjett og juster</td></tr>
</table>

Tabell 1: Elevane sine løysingsstrategiar på dei sju divisjonsoppgåvene.

Den semantiske strukturen i oppgåvene er vist i tabellen under (Tabell 2). Dei tre oppgåvene frå fyrste økt var tekstoppgåver, og den semantiske strukturen var dermed gjeven av teksten. Dei fire oppgåvene i andre økta var taloppgåver der elevane sjølve laga kontekstar, og dermed også den semantiske strukturen. Som ein ser av tabellen laga alle elevane delingsdivisjonsoppgåver til alle taloppgåvene.

	Gruppe 1	**Gruppe 2**
1.økt	**Mine ferdige tekstoppgåver**	
506:22 =23	Målingsdivisjon	Målingsdivisjon
666:37 =18	Delingsdivisjon	Delingsdivisjon
444:6 =74	Delingsdivisjon	Delingsdivisjon
2.økt	**Elevane sine eigne kontekstar**	
513:19 =27	Delingsdivisjon	Delingsdivisjon
322:7 =46	Delingsdivisjon	Delingsdivisjon
442:26 =17	Delingsdivisjon	Delingsdivisjon
561:3 =187	Delingsdivisjon	Delingsdivisjon

Tabell 2: Den semantiske strukturen i oppgåvene, både tekstoppgåvene og elevane sine kontekstar.

Frå Tabell 1 ovanfor ser ein at begge gruppene brukar *additiv oppbygging* eller *subtraktiv nedbygging* på den fyrste oppgåva. Som vist i Tabell 2 ovanfor er denne oppgåva ei målingsdivisjonsoppgåve, og det er altså samsvar mellom strukturen i oppgåva og strukturen i løysingsstrategiane elevane brukar.

På den andre oppgåva i fyrste økta er begge gruppene innom strategien *algoritme*, men dei byter begge til *additiv oppbygging*. Denne andre oppgåva var ei delingsdivisjonsoppgåve. Som vist ovanfor framhevar langdivisjonsalgoritmen målingsstrukturen. Fordi *algoritme* ikkje er eintydig definert til å gjelda langdivisjonsalgoritmen, men til å gjelda strategiar som botnar i eit behov for ein algoritme av noko slag, er det vanskeleg å definera ein samanheng mellom oppgåve og løysingsstrategi. Eg har derimot vist at *additiv oppbygging*, som dei òg brukar, byggjer på målingsstrukturen. Denne andre oppgåva var som nemnt ei delingsdivisjonsoppgåve, og det er altså ikkje samsvar mellom oppgåvestruktur og løysingsstrategi her.

På den siste oppgåva i fyrste økta er dei alle innom fleire løysingsstrategiar, men endar likevel opp med *gjett og juster*. Denne siste oppgåva var ei klassisk delingsdivisjonsoppgåve, og det er altså samsvar mellom oppgåve og løysingsstrategi. Det kan likevel vera verdt å merka seg at denne oppgåva hadde einsifra divisor, til skilnad frå dei to fyrste som begge hadde tosifra divisor. Med *gjett og juster* løyser elevane divisjonen ved multiplikasjon, og denne multiplikasjonen løyser dei som gjentatt addisjon. Dei brukar divisoren som multiplikator og har dermed berre seks ledd å summera. Det kan tenkjast at å summera seks gjetta tal er lettare og ikkje minst meir innbydande enn til dømes å summera 37 gjetta tal, som dei villa måtta gjort i oppgåva før.

Oppgåvene i andre økta var reine taloppgåver, der reknearten dermed var oppgjeven med matematisk symbolspråk. Som ein ser av Tabell 2 laga begge elevgruppene delingsdivisjonskontekstar til alle desse taloppgåvene. Eit viktig poeng her er at alle desse taloppgåvene var heiltalsdivisjonar utan rest, og at det dermed også er heilt kurant å eksemplifisera dei gjennom delingsdivisjonskontekstar.

I andre økta ser ein at Øyvind, Oliver og Stian med eitt unntak (Øyvind som fyrst prøver med *additiv oppbygging* på 442 : 26 = 17) konsekvent held seg til *gjett og juster*. Med utgangspunkt i at dei hadde laga delingsdivisjonskontekstar til desse oppgåvene, er det iallfall eit tilsynelatande samsvar mellom strukturen i løysingsstrategien og strukturen i oppgåva.

Kyrre, Ingrid og Renate brukar fleire ulike strategiar, med både delings- og målingsstrukturar, i den andre økta. Renate og Ingrid brukar *additiv oppbygging* på dei tre fyrste oppgåvene. Ingrid byrjar med *additiv oppbygging* også på den siste oppgåva, men går etter kvart over til *utdeling*, som dei andre. Kyrre brukar *gjett og juster* på dei to fyrste, og han byrjar med *gjett og juster* også på den siste oppgåva, før han går over til *utdeling*. Men Kyrre brukar òg *additiv oppbygging* i den andre økta, på den tredje oppgåva. Til liks med gutane på gruppe 2 laga også Kyrre, Renate og Ingrid delingskontekstar til taloppgåvene. Grunna den nettopp påpeika variasjonen i løysingsstrategiar, er det derimot ikkje mogeleg å konkludera med noko samsvar mellom løysingsstrategi og semantisk struktur i oppgåva.

Algoritme førekom berre i dei to delingsdivisjonsoppgåvene i fyrste økta. Dette står i kontrast til Anghileri (2001) som fann at algoritme førekom hyppigast i dei reine taloppgåvene. I denne masteroppgåva kan dette sjølvsagt skuldast at elevane i den andre økta, då dei jobba med reine taloppgåver, hadde innsett at dei ikkje kunne nokon divisjonsalgoritme og difor ikkje trong å prøva ein gong. Det kan òg tenkjast at med dei reine taloppgåvene var oppgåvene stilt opp som divisjonsoppgåver, medan i tekstoppgåvene måtte eleven stilla opp tala som divisjon for å sjå det visuelle med divisjonen, før dei nytta ein annan strategi for å koma fram til svaret.

4.7 Oppsummering

Føremålet med denne masteroppgåva var å skildra kva intuitive løysingsstrategiar elevar har for divisjon, og å finna ein eventuell samanheng mellom semantisk struktur i oppgåve og løysingsstrategi. Dette har eg gjort gjennom fylgjande forskingsspørsmål:

> *Kva kjenneteiknar intuitive løysingsstrategiar elevar på 5.trinn har for divisjon?*
> *Kva samanheng kan ein finna mellom semantisk struktur i oppgåver og løysingsstrategi for tekstoppgåver med divisjon?*

Analysen av datamaterialet viser at elevar er i stand til å løysa store divisjonsoppgåver, også før dei har fått formell instruksjon om dette. Til ei viss grad uttrykkjer elevane ein trong for ein algoritme, men dei løyser likevel oppgåvene ved hjelp av andre strategiar som dei kan frå før. Dette vil seia at dei assimilerer divisjon inn i allereie eksisterande skjema for andre aritmetiske operasjonar. Som erstatning for ein algoritme dei ikkje kan, brukar dei fleire ulike løysingsstrategiar i arbeidet med å løysa divisjonsoppgåvene. Desse strategiane har eg kalla *gjett og juster*, *additiv oppbygging*, *subtraktiv nedbygging*, *utdeling*, og *algoritme*. Med *gjett og juster* gjettar elevane på eit mogeleg svar, for deretter å kontrollera om dette svaret er rett ved multiplikasjon. Denne multiplikasjonen løyser dei med gjentatt addisjon. Her er det sentralt at dei konsekvent brukar det gjetta svaret som addend, medan divisoren fortel dei kor mange av denne addenden som skal gå i dividenden. Når ein løyser ei divisjonsoppgåve på denne måten, kan det seiast at ein manglar byggesteinen ein skal byggja opp med. Ein slik løysingsstrategi føregår dermed i to trinn, der ein fyrst gjettar på byggesteinen og deretter byggjer opp.

Additiv oppbygging og *subtraktiv nedbygging* handlar begge om å bruka dei to oppgjevne tala direkte. Her brukar ein divisoren som byggestein, høvesvis for å *byggja* opp og *bruka* opp. Her måler ein dividenden med divisoren, der ein ser kor mange divisorar det går i dividenden. Desse to strategiane har begge ein målingsstruktur, og står i motsetnad til *gjett og* juster, som har ein delingsstruktur. På grunn av denne målingsstrukturen kan ein bruka dei to oppgjevne tala direkte for å finna det tredje, altså svaret på oppgåva. Med *additiv oppbygging* og *subtraktiv nedbygging* slepp ein å gå vegen om å fyrst gjetta på kva svaret skal verta, og desse to strategiane er dermed meir "rett fram" enn *gjett og juster*.

Utdeling er ei direkte modellering av situasjonen i den forstand at ein deler dividenden, anten heile eller bolkevis som elevane her gjorde, på divisoren. I mitt datamateriale finn eg denne strategien brukt berre på den eine delingsdivisjonsoppgåva frå fyrste økta, og på den siste taloppgåva, der elevane sjølve hadde bestemt konteksten. Her må det òg kommenterast at denne strategien er ei direkte modellering av situasjonen berre når det er oppgjeve ein situasjon som tala inngår i. Det er òg eit krav at denne situasjonen er ein delingssituasjon. Sjølve strategien kan riktig nok, til liks med dei tre føregåande, brukast på alle divisjonsoppgåver, men ein må då skilja mellom om tala er lausrivne frå konteksten, eller om tala er bundne i konteksten.

Algoritme var ein strategi som ikkje gav noko svar fordi elevane ikkje hadde lært den algoritmen dei ville hatt bruk for her. Her uttrykte elevane eksplisitt at ein ville finna svaret på oppgåva ved å løysa divisjonsoppgåva, og dei gjorde òg forsøk på å manipulera tala i ei oppstilling av ei divisjonsoppgåve. Dei lukkast imidlertid ikkje med denne talmanipuleringa, og dei fann då andre strategiar for å angripa oppgåva.

Analysen viser òg ein variasjon mellom strategiane med tanke på kor arbeidsame dei er, og kor nøyaktige dei er for å koma fram til det riktige svaret. Nokre av løysingsstrategiane var svært arbeidsame. *Gjett og juster* er eit døme på dette. Som ein ser i analysekapitlet (4.5.1 Gjett og juster), gjettar elevane på eit mogeleg svar og kontrollerer dette med gjentatt addisjon av dette gjetta svaret. Her fekk elevane lange kolonnar med tal dei skulle addera, og det var fleire slike kolonnar. Sjølv om elevane viste evne til å vurdera om ei gjetting var rett eller ikkje på bakgrunn av kjende talfakta, og talkjensle (som til dømes at 442 dividert på 26 ikkje kunne vera 16 fordi det bakarste sifferet i produktet av desse to faktorane, 26 gonger 16, vart 6, og ikkje 2 som det skulle verta), fekk dei likevel fleire lange, og dermed krevjande, addisjonar å utføra. Her var det òg fare for å gjera tekniske feil i utrekninga, som å gløyma ein tiarovergang, slik at det vart feil svar. Dermed kunne dei risikera å måtte gjera vurderinga om gjettinga var rett eller ikkje på feil grunnlag.

Som svar på det andre forskingsspørsmålet viser analysen ein variasjon i val av strategiar, både mellom gruppene, og mellom elevane på gruppene. Dei to elevgruppene kunne velja ulike løysingsstrategiar på same oppgåva, og medlemane på same gruppa kunne også velja ulike løysingsstrategiar for den same oppgåva. Det er òg variasjon i om det er samsvar eller ikkje mellom strukturen i oppgåva og strukturen i løysingsstrategien. Ein og same elev kunne til dømes bruka ein løysingstrategi med målingsstruktur på éi delingsdivisjonsoppgåve, og ein løysingstrategi med delingsstruktur på ei anna delingsdivisjonsoppgåve. Det er difor ikkje mogleg å korkje påvisa eller avkrefta nokon samanheng mellom strukturen i strategien og strukturen i oppgåva. Analysen hallar meir mot at elevane handsamar tala lausrivne frå konteksten.

5. Didaktiske refleksjonar

I dette kapitlet vil eg reflektera rundt kva verdi funna i denne masteroppgåva har for skulen, og kva funna får å seia for undervising og for meg som lærar. Eg kan ikkje trekkja generelle konklusjonar som direkte kan overførast til andre situasjonar, men dei fylgjande refleksjonane kan sjåast i samanheng med anna forsking. Funna mine har òg ein viss overføringsverdi til andre situasjonar gjennom mine refleksjonar rundt funna.

Kortversjonen av svaret på fyrste det forskingsspørsmålet er at eg gjennom analysen fann at elevar er i stand til å ta i bruk ulike løysingsstrategiar, og at desse løysingsstrategiane varierer i struktur. Svaret på det andre forskingsspørsmålet er at analysen korkje stadfester eller avkreftar ein samanheng mellom den semantiske strukturen i oppgåva og løysingsstrategien. Analysen viser at elevane i alle fall kan bruka løysingsstrategiar både med delings- og målingsstruktur på delingsdivisjonsoppgåver. Dette er i samsvar med funna Neuman (1999) gjorde i sin studie. Ho fann at ein må skilja mellom det situasjonsmessige og det utrekningsmessige aspektet ved divisjon. Elevar i hennar studie oppfatta delingsdivisjonsoppgåver som måling, og dei brukte ein målingsstrategi for å løysa delingsdivisjonsoppgåver. Dette gjorde dei ved å endra eininga på divisoren til same eining som dividenden. I oppgåva ”28 klinkekuler delt på 4 gutar” vart divisoren endra frå ”4 gutar” til ”4 klinkekuler delt ut i kvar runde”. Dermed kunne dei bruka ”4 klinkekuler” til å måla ”28 klinkekuler”, noko dei ikkje kunne med ”4 gutar”. Analysen i denne masteroppgåva indikerer at elevane handsamar tala lausrivne frå konteksten heller enn at dei gir delingsdivisjon ein målingsstruktur, men like fullt brukar elevane løysingsstrategiar med målingsstruktur på oppgåver med delingsstruktur.

Desse funna tyder på at elevar er fleksible når det gjeld løysingsstrategiar. Kanskje botnar denne fleksibiliteten i at dei tek i bruk strategiar som dei er komfortable med i den aktuelle situasjonen. Kan hende bør ein oppmuntra til ein større variasjon i bruk av løysingsstrategiar. Ved at elevane har fleire løysingsstrategiar å spela på kan dei sjølve velja den løysingsstrategien dei tykkjer passar best i den aktuelle situasjonen. At ein løysingsstrategi passar betre enn ein annan, kan både bety at den er raskare å bruka eller at eleven er meir komfortabel med den. Sjølv om eg ikkje har påvist nokon samanheng mellom den semantiske strukturen i oppgåva og løysingsstrategien, vil eg ikkje utelukka at til dømes tala i oppgåva kan tenkjast å spela ei rolle i valet av løysingsstrategi. Det er òg sannsynleg at elevane har meir forståing for kva dei gjer når dei brukar ein løysingsstrategi dei sjølve har valt, enn når dei brukar ein standardalgoritme.

Funna her viser òg ein skilnad i effektiviteten i strategiane. Det vil seia at ein kanskje skal oppmuntra elevane til å forlata enkelte strategiar til fordel for andre. Det at *gjett og juster* er ein tostegs strategi, der elevane fyrst gjettar og so byggjer opp, må seiast å vera meir arbeidsamt enn å skulla byggja direkte med dei tala ein har, som ein gjer i *additiv oppbygging*. Med *gjett og juster* risikerer elevane òg å måtta addera fleire kolonnar av addendar, fordi den fyrste gjettinga kanskje er feil. På den andre sida viste elevane gode evne til å vurdera gjettingane med hovudrekning, utan å måtta addera lange kolonnar med tal. Dette kjem inn under det Anghileri (2006) kallar *number sense*, eller *kjensle for tal*. Ho argumenterer sterkt for at lærarar skal hjelpa elevane med å utvikla god talkjensle. Funna mine sannsynleggjer at elevane sparte tid og arbeid på å utelukka 16 som eit mogeleg svar på 442 dividert 26 ved hjelp av hovudrekning og kjensle til tala. Trass i at nokre av løysingsstrategiane er meir arbeidsame enn andre, er det sannsynleg at elevane reflekterer meir over kva dei gjer når dei brukar ein strategi dei har valt sjølve, enn når dei fylgjer ei oppskrift. Ved at elevane er medvitne om kva dei gjer, har læraren òg eit godt utgangspunkt for å leia elevane vidare mot ein meir effektiv strategi.

Analysen min av eit utval norske lærebøker for barnetrinnet avdekka at målingsdivisjon er sterkt underrepresentert i forhold til delingsdivisjon. Elevane sitt fyrste møte med divisjon i lærebøker på skulen tykkjest òg i stor grad å vera delingsdivisjon. Elevane i denne studien laga òg konsekvent kontekstar med delingsdivisjon til taloppgåvene. Det må poengterast at alle oppgåvene i denne studien er heiltalsdivisjonar, og det er difor fullt mogeleg å kontekstualisera alle taloppgåvene med delingsdivisjon. På den andre sida var det ingen eigenskapar ved desse oppgåvene som gjorde det meir naturleg å velja den eine typen divisjon framføre den andre. Ein slik eigenskap kunne ha vore at divisoren ikkje var eit heiltal. I so tilfelle måtte elevane ha valt ein kontekst med målingsdivisjon for å få ein fornuftig kontekst til oppgåva. Generelt kan ein seia at alle taloppgåver som kan skildrast med delingsdivisjon, òg kan skildrast med målingsdivisjon, men ikkje alle taloppgåver skildra med målingsdivisjon kan skildrast gjennom delingsdivisjon. Målingsdivisjon er på denne måten eit kraftigare verkty enn delingsdivisjon. Med tanke på kontekstane elevane valde til taloppgåvene, kunne det vore interessant å sjå om elevane ville valt delingsdivisjonskontekstar til taloppgåvene om forholdet mellom delings- og målingsdivisjonsoppgåver i lærebøker hadde vore motsett.

Ein må òg skilja mellom *tal* og *situasjon*. Alle *tal* kan som nemnt kontekstualiserast gjennom målingsdivisjon. Delingsdivisjon har minst éi avgrensing i forhold til målingsdivisjon ved at divisoren *må* vera eit heiltal. Det gjev inga meining å skulla fordela noko til 1,5 personar. Derimot er det heilt kurant å skulla gi 1,5 liter saft til kvar, som det ville vorte med målingsdivisjon. Dette at målingsdivisjon er eit kraftigare verkty enn delingsdivisjon, gjeld som eg har påpeika berre for å kontekstualisera alle typar *tal*. Ein treng imidlertid begge typane divisjon for å kunna skildra alle typar *situasjonar* som involverer divisjon. Det å skulla fordela 24 sjokoladebitar likt mellom 4 personar er, og må vera, ein delingskontekst. På denne måten vert dei to typane divisjon like viktige, og det medfører at ein må vera medviten om begge typane for å kunna bruka dei. Det vil seia at elevar i skulen treng å læra og få erfaring med begge typane divisjon. Analysane eg har gjort kan tyda på at elevane ikkje har fått nok erfaring med målingsdivisjon.

Neuman (1999, s. 101) poengterer at tala eller symbola i ei divisjonsoppgåve har ulik meining i delingsdivisjon og målingsdivisjon. I delingsdivisjon viser divisoren til antal delar, medan den i målingsdivisjon viser til antalet element i kvar del. Vidare meiner Neuman at ei utfordring knytt til det å undervisa om divisjon er om elevane erfarer denne skilnaden i symbola si tyding, og om ein skal poengtera denne skilnaden dersom elevane ikkje erfarer han sjølv. Ut frå argumenta mine ovanfor bør ein poengtera denne skilnaden. Som lærar bør ein dermed auka elevane si eksponering for målingsdivisjon, kanskje ved å erstatt nokre av delingsdivisjonskontekstane med målingsdivisjonskontekstar.

Frå eigne observasjonar i skulen veit eg at målingsstrukturen også er framtredande i reine taloppgåver. For å hjelpa eleven som strevar med oppgåva 24 dividert på 4 kan læraren, eller andre vaksne, til dømes spørja ”Kor mange 4’arar er det i 24?”. Dette har ein klar målingsstruktur der ein måler 24 med 4, og dermed er på jakt etter kor mange

4’arar det går i 24. Med tanke på at det vert sterkt oppfordra til ei måling når det er snakk om rekning og talhandsaming, og at målingsdivisjon er ein kraftigare modell enn delingsdivisjon fordi målingsdivisjon kan kontekstualisera fleire typar tal, er det eit paradoks at kontekstar med målingsdivisjon ser ut til å nesten ikkje vera representert i skulen. Det at det vert fokusert på måling i talhandsaminga i løysingsstrategien er i seg sjølv eit argument for å leggja meir vekt på målingsdivisjon.

Funna i denne masteroppgåva viser at elevane er i stand til å bruka fleire ulike løysingsstrategiar for divisjon, også før dei har fått undervising om standardalgoritmar. Desse løysingsstrategiane dannar eit godt grunnlag å byggja vidare på for at elevane skal utvikla trygge og effektive løysingsstrategiar, tufta på forståing. Funna viser òg at elevane er i stand til å bruka løysingsstrategiar på tvers av semantisk struktur. Likevel er talhandsaminga nærare knytt til målingsaspektet enn delingsaspektet ved divisjon. På bakgrunn av at elevane her ser ut til å vera undereksponert for målingsaspektet i forhold delingsaspektet ved divisjon, meiner eg difor det er viktig å leggja større vekt på målingsdivisjon i skulen.

Litteraturliste

Alseth, B., Kirkegaard, H., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2006a). *Multi 4a. Grunnbok. Matematikk for barnetrinnet*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Alseth, B., Kirkegaard, H., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2006b). *Multi 4b. Grunnbok. Matematikk for barnetrinnet*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Alseth, B., Kirkegaard, H., & Røsseland, M. (2006). *Multi 3a. Grunnbok. Matematikk for barnetrinnet*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Alseth, B., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2006). *Multi 5b. Grunnbok. Matematikk for barnetrinnet*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Alseth, B., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2008). *Multi 7b. Grunnbok. Matematikk for barnetrinnet*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 367-385.

Anghileri, J. (2001). Development of division strategies for year 5 pupils in ten english schools. *British Educational Research Journal, 27*(1), 85-103.

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense*. London: Continuum international publishing Group.

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006a). *Grunntall 4a: Matematikk for barnetrinnet*. Drammen: Elektronisk Undervisningsforlag AS.

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006b). *Grunntall 4b: Matematikk for barnetrinnet*. Drammen: Elektronisk Undervisningsforlag AS.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). London: Routledge.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology, 90*(2), 321-329.

Donaldson, M. (1984). *Barns tankeverden*. Oslo: Cappelen.

Downton, A. (2009). It seems to matters not whether it is partitive or quotitive division when solving one step division problems. I R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Red.), *Crossing divides (Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (Vol. 1, s. 161-168). Wellington, NZ: MERGA.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (s. 33-72). Oslo: Abstrakt forlag.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic: How they learn it and how you teach it*. Austin: Little Educational Publishing.

Gjerdrum, A.-L., & Kristiansen, E. W. (2007). *Tusen millioner 4B Grunnbok*. Oslo: Cappelen.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 276-295). New York: Macmillan.

Heuvel-Panhuizen, M. v. d. (1999). Context problems and assessment: Ideas from the Netherlands. I I. Thompson (Red.), *Issues in teaching numeracy in primary school* (s. 130-142). Buckingham: Open University Press.

Hundeide, K. (1985). *Piaget i skolen*. Oslo: Cappelen.

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i vitenskaplig metode* (2. utg.). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Katz, V. J. (2004). *The history of mathematics: brief version*. Boston: Pearson/Addison-Wesley.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147-158.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Neuman, D. (1999). Early Learning and Awareness of Division: A Phenomenographic Approach. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 101-128.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.

Rasch-Halvorsen, A., Rangnes, T. E., & Aasen, O. (2006). *Tusen millioner 5A Grunnbok*. Oslo: Cappelen.

Rasch-Halvorsen, A., Rangnes, T. E., & Aasen, O. (2007a). *Tusen millioner 5B Grunnbok*. Oslo: Cappelen.

Rasch-Halvorsen, A., Rangnes, T. E., & Aasen, O. (2007b). *Tusen millioner 6A Grunnbok*. Oslo: Cappelen.

Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriation of Computational Resources. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 347-395.

Siegler, R. S., & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Squire, S., & Bryant, P. (2003). Children's models of division. *Cognitive Development, 18*, 355-376.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, California: Sage.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademisk.

Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. I I. Thompson (Red.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (s. 169-183). Buckingham, UK: Open University Press.

Treffers, A., & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) - Calculation up to 100. I M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Red.), *Children learn mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculations with whole numbers in primary school* (s. 61-88). Rotterdam: Sense Publishers.

Utdanningsdirektoratet. (u.å.). Læreplan i matematikk fellesfag. Henta 10.november 2011 frå http://www.udir.no/Lareplaner/Grep/Modul/?gmid=0&gmi=156340

Weisstein, E. W. (u.å.). Long Division. From MathWorld - A Wolfram Web Resource. Henta 10.november 2011 frå http://mathworld.wolfram.com/LongDivision.html

Wood, D. (1998). *How children think and learn* (2. utg.). Oxford: Blackwell.

Vedlegg 1: Løysingsstrategiar, 1.økt, tekstoppg.

Vedlegg 1: Tabellen med løysingsstrategiane for tekstoppgåvene i fyrste økta. Denne tabellen la, saman med vedlegg 2, grunnlaget for å danna dei fem kategoriane eg laga.

Tabellen under viser elevane sine løysingsstrategiar i kronologisk rekkjefylgje. Der ein strategi går over fleire kolonnar, og dermed elevar, tyder det at elevane samarbeidde om vedkomande strategi på oppgåva. I nokre av tilfella nytta elevane seg av fleire ulike strategiar på same oppgåve. Desse tilfella er presenterte med fleire strategiar innanfor same rad, og dermed oppgåve. På oppgåve 2 (666 : 37 = 18) ser ein til dømes at Ingrid byrja med *algoritme* før Kyrre og Renate hadde byrja å gjera noko arbeid. Deretter samarbeidde dei alle tre om å bruka *algoritme*, før dei kvar for seg heldt fram med *byggja opp*-strategi.

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Gruppe 1</th><th colspan="3">Gruppe 2</th></tr>
<tr><th></th><th>Kyrre</th><th>Ingrid</th><th>Renate</th><th>Øyvind</th><th>Oliver</th><th>Stian</th></tr>
<tr><td>Oppg. 1
506:22
=23</td><td colspan="3">Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor
Byggja opp dividenden ved addisjon av multiplum av divisor og so gjentatt addisjon av divisor sjølv</td><td>Gjentatt subtraksjon av divisor frå dividend
Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor</td><td>Gjentatt subtraksjon av divisor frå dividend</td><td>Gjentatt subtraksjon av divisor frå dividend
Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Oppg. 2
666:37
=18</td><td></td><td>Algoritme</td><td></td><td rowspan="3">Algoritme
Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor</td><td rowspan="3">Algoritme
Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor</td><td rowspan="3">Gjett og juster</td></tr>
<tr><td colspan="3">Algoritme</td></tr>
<tr><td>Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor
Dobling</td><td>Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor</td><td>Byggja opp dividenden ved addisjon av dobbel divisor</td></tr>
</table>

	Gruppe 1			**Gruppe 2**		
	Kyrre	**Ingrid**	**Renate**	**Øyvind**	**Oliver**	**Stian**
Oppg.3 444:6 =74	Algoritme 6:4 6:4 6:4 Dela divisoren på eitt og eitt siffer i dividenden Dela ut ein og ein Gjett og juster, med divisor som multipli-kator, og multiplika-sjon som gjentatt addisjon	Algoritme 444:6 6:4 3gongr 4:6 Gjett og juster, med divisor som multipli-kator, og multiplika-sjon som gjentatt addisjon	Gjett og juster, med divisor som multipli-kator, og multiplika-sjon som gjentatt addisjon	Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor Gjetting ved kjent produkt Algoritme	Gjett og juster, med divisor som multipli-kator, og multiplikas jon som gjentatt addisjon Gjett og juster, med subtrak-sjon av gjetta kvotient frå dividenden	Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av 10 divisor Gjett og juster

Vedlegg 2: Løysingsstrategiar, 2.økt, taloppg.

Vedlegg 2: Løysingsstrategiane for taloppgåvene i andre økta. Denne tabellen la, saman med vedlegg 1, grunnlaget for å danna dei fem kategoriane eg laga.

Tabellen under viser elevane sine løysingsstrategiar i kronologisk rekkjefylgje. Der ein strategi går over fleire kolonnar, og dermed elevar, tyder det at elevane samarbeidde om vedkomande strategi på oppgåva. I nokre av tilfella nytta elevane seg av fleire ulike strategiar på same oppgåve. Desse tilfella er presenterte med fleire strategiar innanfor same rad, og dermed oppgåve. På oppgåve 1 (513 : 19 = 27) ser ein til dømes at Kyrre byrja med *gjett og juster*, og brukte denne gjennom heile oppgåva. Ingrid og Renate byrja kvar for seg med å *byggja opp* dividenden. Litt uti arbeidet med oppgåva, byrja dei å samarbeida om ein *byggja opp*-strategi.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Gruppe 1</td><td colspan="3">Gruppe 2</td></tr>
<tr><td></td><td>Kyrre</td><td>Ingrid</td><td>Renate</td><td>Øyvind</td><td>Oliver</td><td>Stian</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Oppg. 1
513:19
=27</td><td rowspan="3">Gjett og juster, med divisor som multiplikator</td><td>Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor.</td><td>Byggja opp dividenden med tilnærma verdi for divisor.</td><td rowspan="2">Gjett og juster, med divisor som multiplikator, og multiplikasjon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hoppteljing og delsummar
Gjetting ved bruk av kjent produkt.</td><td rowspan="2">Gjett og juster, med divisor som multiplikator, og multiplikasjon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hoppteljing og delsummar</td><td rowspan="2">Gjett og juster, med divisor som multiplikator, og multiplikasjon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hoppteljing og delsummar
Gjetting ved bruk av kjent produkt.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor. Gjentatt addisjon ved hoppteljing og delsummar.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Samarbeid ved at dei ikkje treng prøva med ein multiplikand som ein annan har prøvd.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Gruppe 1</td><td colspan="3">Gruppe 2</td></tr>
<tr><td></td><td>Kyrre</td><td>Ingrid</td><td>Renate</td><td>Øyvind</td><td>Oliver</td><td>Stian</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Oppg. 2
322:7
=46</td><td rowspan="2">Gjett og juster, med divisor som multipli-kator</td><td colspan="2" rowspan="2">Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av multiplum av divisor, og deretter subtraksjon frå ein sum større enn dividenden</td><td>Gjett og juster, med divisor som multipli-kator, og multiplika-sjon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hopp-teljing og delsummar
Justering av produktet i forhold til dividenden ved subtrak-sjon</td><td>Klumping
Gjett og juster, med divisor som multipli-kator, og multiplikas jon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hopp-teljing og delsummar</td><td>Gjetting ved kjent produkt.
Gjett og juster, med divisor som multipli-kator, og multiplika-sjon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hopp-teljing og delsummar
Gjetting ved bruk av kjent produkt.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Samarbeid ved at dei ikkje treng prøva med ein multiplikand som ein annan har prøvd.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Gruppe 1</th><th colspan="3">Gruppe 2</th></tr>
<tr><th></th><th>Kyrre</th><th>Ingrid</th><th>Renate</th><th>Øyvind</th><th>Oliver</th><th>Stian</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Oppg. 3
442:26
=17</td><td rowspan="3">Byggja opp dividenden ved addisjon av multiplum av divisor, og deretter gjentatt subtraksjon av divisor frå ein sum større enn dividenden</td><td>Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor.</td><td>Byggja opp dividenden ved addisjon av multiplum av divisor.</td><td rowspan="2">Klumping
Gjetting ved mønster.
Gjett og juster, med divisor som multiplikator, og multiplikasjon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hoppteljing og delsummar
Gjetting ved bruk av kjent produkt.</td><td rowspan="2">Gjett og juster, med divisor som multiplikator, og multiplikasjon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hoppteljing og delsummar
Gjetting ved bruk av kjent produkt.</td><td rowspan="2">Gjett og juster, med divisor som multiplikator., og multiplikasjon som gjentatt addisjon, og gjentatt addisjon ved hoppteljing og delsummar
Gjetting ved bruk av kjent produkt.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor. Gjentatt addisjon ved hoppteljing og delsummar</td></tr>
<tr><td colspan="3">Samarbeid ved at dei ikkje treng prøva med ein multiplikand som ein annan har prøvd.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Oppg. 4
561:3
=187</td><td rowspan="2">Gjett og juster.
Bolkevis utdeling av dividend på divisor, med subtraksjon av utdelt totalsum, og kontinuerleg gjera greie for attståande verdi</td><td rowspan="2">Byggja opp dividenden ved gjentatt addisjon av divisor.
Bolkevis utdeling av dividend på divisor</td><td rowspan="2">Bolkevis utdeling av høvesvis hundrarane tiarane, og einarane i dividenden på divisoren</td><td>Overslag
Gjett og juster, med divisor som multiplikator, og multiplikasjon som gjentatt addisjon.</td><td>Gjett og juster, med divisor som multiplikator, og multiplikasjon som gjentatt addisjon.</td><td>Gjett og juster, med divisor som multiplikator, og multiplikasjon som gjentatt addisjon.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Samarbeid ved at dei ikkje treng prøva med ein multiplikand som ein annan har prøvd.</td></tr>
</table>