Per G. Østerlie

Et diskursivt møte med den deriverte

Designforsking om tilrettelegging for objektifisering av derivasjonsbegrepet i et teknologirikt miljø

A discursive introduction to the derivative

Design research on technology-rich support of objectification of the derivative

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk
Trondheim, november 2011

Veileder: Frode Rønning

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

FORORD

Etter flere tiår som matematikklærer, og interessert leser av matematikkdidaktikk, kom ideen om å skrive en masteroppgave. Etter å ha funnet ut at det fantes en slik mulighet i Trondheim startet jeg som student på deltid. Valget skulle gi meg ei fantastisk tid. Forelesninger om interessante, og viktige, tema av motiverende forelesere, gruppediskusjoner og oppgaveløsing sammen medstudenter, halve alderen min, alt ga meg utrolig mye. Både personlig og i lærerrollen er jeg beriket etter studiet og det vil jeg takke både forelesere og medstudenter ved masterutdannigen ved HIST for.

Skrivingen av denne oppgaven har vært en mer ensom prosess. Kontakten med omverdenen har stort sett vært gjennom litteraturen og veilederen min. En stor takk går til veileder Frode Rønning. Jeg vil også takke Anna Sfard som tok seg tid til å svare på henvendelser. Mange gode analyser og refleksjoner har skjedd gjennom spaserturer sammen med hunden min, Bob. Sjøl om han bidro lite med egne analyser må han takkes for at jeg fikk stunder til ettertanke.

Studiene og skrivingen har tatt mye av tida mi. For meg har ikke det vært noe offer, men noe av tida har jeg fått av andre. Jeg vil takke rektor ved skolen hvor jeg arbeider for både oppmuntring og mulighet til å kombinere skrivingen med arbeidet mitt. Den aller største takken går til familien min som tålmodig har utført mange av dagliglivets oppgaver uten meg. Nå vender jeg tilbake fra datamaskina og bøkene.

Trondheim, november 2011

INNHOLDSLISTE

1 INNLEDNING

Bakgrunn for masteroppgaven

I desember 2009 ble de siste resultatene fra TIMSS[1] publisert. Det er en internasjonal komparativ studie for å finne ut hvordan elevene i de ulike landene lykkes i å nå læreplanmålene.

Det var resultatene etter at elever i faget 3MX i videregående skole ble testet i 2008 som framkalte overskriften «Markant tilbakegang i matematikk og fysikk i videregående skole», med rød bakgrunn, på hjemmesiden til TIMSS Norge. Seinere på kvelden, i nyhetssendinga i NRK, var to politikere og en representant fra UiO. Diskusjonen skulle vise seg å bli en konkurranse i hvilket parti som stilte de høyeste kravene til mer pugg og «god gammeldags» undervisning i skolen. Politikerne ble akkompagnert med hodenikk og en understreking av viktigheten av dette fra det fagligpedagogiske hold.

Det er god grunn til å være bekymret over hva norske elever presterer i de internasjonale undersøkelsene, men det er påfallende at både testere og politikere er så enige om både prestasjonsresultat, årsakssammenhenger og tiltak som i dette tilfellet. Som matematikklærer i den videregående skolen gjennom flere år bærer jeg deler av ansvaret for elevprestasjonene. Jeg deler bekymringen og ønsker å bidra til at alle elever i størst mulig grad kan nå læringsmålene. I motsetning til deltakerne i denne nyhetssendinga tror jeg at både spørsmålet, analysen av prestasjonen og tiltak krever en mer omfattende og fagdidaktisk behandling. Det vil jeg prøve å gi svar på i denne oppgaven.

Det er særlig innafor emnet analyse eller kalkulus norske elever skårer lavere enn elever fra andre land, men det er også dette emnet elevene fra alle land presterer dårligst i: «Det er en generell trend både i referanselandene og for det internasjonale gjennomsnittet at elevene presterer svakest i Kalkulus» (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2009, s. 12)

Når sentrale deler av læreplanene i den videregående skolen omhandler dette emnet er det grunn til å se nærmere på hva problemet består i og hvordan en kan hjelpe elevene på vei mot læringsmålene.

1 TIMSS er en internasjonal undersøkelse arrangert av IEA, The International Association for the Evaluation of Educational Achievement. I Norge er det ILS ved UiO som er den stedlige representanten.

Intensjonene med oppgaven

Flere studier, se Artigue (2000) for en oppsummering, viser at elevene har problemer med å forstå den deriverte funksjonen med en tradisjonell framgangsmåte for undervisningen. Da er det med undring en kan observere at de siste lærebøkene (Heir, Erstad, Borgan, Engeseth, & Moe, 2009; Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch, & Hals, 2009) ikke har prøvd andre innfallsvinkler.

For meg er det en intensjon å finne heuristiske retningslinjer for hvordan elevene kan få en bedre forståelse for den deriverte og i praksis prøve ut en undervisning, basert på denne teorien, i klasserommet. Gjennom å observere og analysere hvordan elevene oppfatter de involverte begrepene og hvordan undervisningen bidrar til forståelsen, håper jeg å kunne uttale meg om hva som er gode råd til en vellykket undervisning.

En annen intensjon er å bidra til å gjøre didaktikken mer knyttet til praksis. Den praktiske pedagogiske utøvelsen er lite påvirket av den teoretiske pedagogiske forskingen[2]: «In short, over half a century of research into education since World War II has not improved education noticeably» (Walker, 2006, s. 8). Gjennom en praksisnær tilnærming ønsker jeg å bidra til en forsking som direkte kan knyttes mot tiltak for en mer velykket undervisningen.

Forskingsspørsmålet

Derivasjonsbegrepet er sentralt plassert i den matematiske analysen. Etter læreplanene i Kunnskapsløftet er innføringen av derivasjon og derivasjonsbegrepet plassert i faget 1T.

Det er min erfaring at når 1T-elevene møter dette emnet, og den matematiske definisjonen, viser det seg ofte krevende. Ferdigheter knytta til regler for derivasjon av polynomfunksjoner kan nås, men en dypere forståelse av hva som skjuler seg bak den deriverte funksjonen er langt mer utfordrende. Det er den utfordringa jeg tar mål av meg å undersøke og prøve å gjøre så enkel, og forståelig, som mulig. Forskingsspørsmålet mitt er derfor:

> *Hvordan legge til rette for en individualisering av den deriverte som diskursivt objekt gjennom en teknologirik undervisning?*

For å utdype forskingsspørsmålet starter jeg med spørreordet «hvordan». Hvordan impliserer en framgangsmåte for en handling. Jeg ønsker å finne et heuristisk svar i form av prinsipper for design av undervisningen hvor elevene møter kalkulus. Designprinsippene vil jeg seinere spesifisere til en lokal instruksjonsteori og en hypotetisk læringsbane.

Individualisering av et diskursivt objekt er en terminologi fra den grunnleggende

2 Thomas Nordahl kunne i et foredrag tallfeste påvirkningen til 5%

læringsteorien for denne forskingen. Det er Sfards teori (Sfard, 2008) for eleven som deltaker i en diskurs, og hvordan hver diskursdeltaker individualiserer de kollektive matematiske objektene, som danner fundamentet for oppgaven. I teoridelen vil jeg forklare hva et diskursivt objekt er og utdype teorien. Foreløpig kan det diskursive objektet leses som et matematisk begrep, mens det seinere vil belyses i en språklig innfallsvinkel og knyttes til diskursen. Det språklige aspektet gir også grunnlaget for analysen. Språkbruken angir elevens diskursive objekt, og i hvilken grad en individualisering har skjedd.

Den siste forutsetningen i forskingsspørsmålet er at dette vil skje i et teknologirikt miljø. Kravet om et teknologirikt miljø stilles både fordi en digital kompetanse er grunnleggende mål for elevene, og dermed er en naturlig del av undervisningen, og en antakelse om at teknologi kan ha en effekt for elevenes individualisering av den deriverte. Teknologiens rolle, som redskap for gjennomføring av instruksjonsteorien, er med det en sentral del av forskingsspørsmålet.

Et svar på forskingspørsmålet får derfor to deler. Den ene er hvilke heuristiske prinsipper som bør gjelde og den andre hvordan teknologien kan utnyttes i denne sammenhengen.

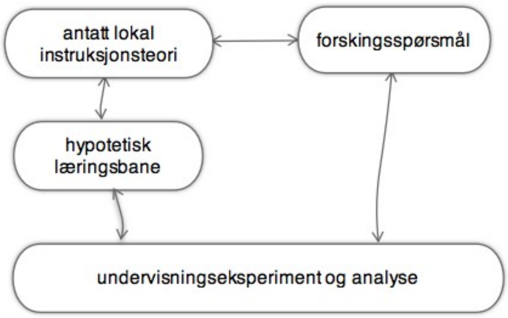
Designforsking

For å svare på forskingsspørsmålene har jeg valgt designforsking (eng. design research) som metodologi. Det er en praksisnær metodologi utarbeidet for å bidra til svar på spørsmål som retter seg direkte mot undervisningen (Design Based Research Collective, 2003) og har som mål å utvikle empirisk støtta teorier gjennom å kombinere studier av både læreprosessen og det som støtter denne prosessen (diSessa & Cobb, 2004).

Jeg har valgt en tilpassing basert på Gravemeijer (Cobb & Gravemeijer, 2006; Gravemeijer, 1994) som kan sammenfattes med at jeg starter med å anta et svar på forskingsspørsmålet. Ut fra det har jeg designet et undervisningsopplegg. Gjennom utprøvingen av undervisningsopplegget søker jeg, ut fra observasjoner, å beskrive hvordan og hvorfor designet fungerer. Det gir grunnlag for å verifisere antakelsene eller gjøre nye antakelser.

En sammenfatning av denne logiske oppbyggingen av masteroppgaven kan illustreres i figur 1.1.

Utgangspunktet vil være en antatt lokal instruksjonsteori. Den baserer seg blant annet på en grunnleggende læringsteori, didaktiske teoristudier, egne erfaringer og en forundersøkelse. Ordet lokal knytter seg temaet for teorien og at den er antatt viser til det hypotetiske. Den antatte lokale instruksjonsteorien inneholder formodninger om et svar på forskingsspørsmålet om hvordan elevene kan få en bedre forståelse for den deriverte. Utprøvingen av hypotesene skjer det i praksis. Den hypotetiske læringsbanen vil inneholde utformingen av et prototypisk undervisningsopplegg hvor designprinsippene prøves ut.



Figur 1.1: Oppbyggingen

Under gjennomføringen samlet jeg data gjennom observasjon, intervju, elevbesvarelser og tester. Gjennom en retrospektiv analyse ga dataene meg en mulighet for å se om antakelsene jeg hadde gjorde holdt, eller om de måtte forkastes. Det ble gjort gjennom en formulering av kriterier på hva som skal til for at antakelse skal holde gjennom å sette opp kjennetegn. Det ble gjort som en del av den hypotetiske læringsbanen. Analysen antyder i hvilken grad de teoretiske antakelsene var et svar på forskingspørsmålet og eventuelle justeringer som bør gjøres.

Designforskingen er syklisk og kan gjentas uten begrensing. Etter å ha analysert resultatet i forhold til forskingsspørsmålet kan den lokale instruksjonsteorien forandres. Det vil få implikasjoner for den hypotetiske læringsbanen. I neste syklus forandres designet og prøves ut på nytt. Erfaringene fra den andre syklusen vil gi grunnlag for en ny analyse og et sterkere grunnlag for å besvare forskingsspørsmålet.

Praktisk gjennomføring

Designforskingen foregikk i to sykluser hvor undervisningsdesignet ble prøvd ut blant elever i matematikkfaget 1T. På første trinn i videregående skole kan elevene som velger utdanningsprogram for studiespesialisering velge mellom to matematikkfag. 1T er det meste teoretiske av de to og det er her den deriverte funksjonen introduseres. Begge undervisningseksperimentene ble utført ved samme skole og i ei elevgruppe på 22 elever. Data ble samlet inn gjennom observasjoner, videoopptak og skriftlige besvarelser. Mellom hver syklus ble dataene analysert og undervisningsdesignet vurdert.

Oppbyggingen av innholdet

Jeg starter med å forklare det læringsteoretiske og epistemologiske grunnlaget for oppgaven i kapittel 2 : Teoretisk grunnlag s. 6. I neste kapittel, 3 : Metodologi, argumenterer jeg for valg av forskingsmetodologi og gir en beskrivelse av hva designforsking omfatter. Den delen avsluttes med at jeg forklarer min tilpassing av metodologien. Seinere i kapittel 3 er det den praktiske gjennomføringen og elevgruppa som omtales. Det gis også en innføring i det teknologiske miljøet eleven er en del av. I kapittel 4 : En lokal instruksjonsteori, bygges den lokale instruksjonsteorien opp gjennom teoretiske litteraturstudier, andres forskingsfunn og en egen forundersøkelse i ei gruppe elever.

Kapittel 5 : Det første undervisningseksperimentet, er viet den første undervisningssyklusen. Undervisningens design og gjennomføringen rapporteres og det reflekteres over konsekvenser for neste syklus. Den andre undervisningssyklusen blir behandlet på samme måte i kapittel 6.

Til slutt, i kapittel 7: Konklusjon og diskusjon oppsummeres funnene og et konkluderende svar på forskingsspørsmålet formuleres.

2 TEORETISK GRUNNLAG

Eleven som deltaker i en diskurs

Det teoretiske grunnlaget bygger på en betraktning av den lærende som deltaker i et diskursivt fellesskap. Gjennom dette kapittelet vil jeg forklare hva som ligger i det. Jeg starter med å se på de læringsteoriske metaforene tilegnelse og deltaking. Så følger Sfards teori for hvordan kommunikasjonen danner grunnlaget for tenking og hvordan læring skjer som deltaker i en diskurs. Til slutt vil jeg se spesifikt på konsekvensene for matematikkundervisningen.

Tilegnelse eller deltaking?

Gjennom å betrakte læringsteorienes historie identifiserer Sfard (1998, 2008) to metaforer for hvordan læring skjer: tilegnelses- og deltakermetaforen.

I spørsmålet om hva læring er skiller de to metaforene seg klart fra hverandre. I tradisjonen etter Piaget er assimilasjon og akkomodasjon en typisk metafor-bruk for at «noe» utafra forandrer, og tar plass i, individet. Individet tilegner seg kunnskap. Metaforen fører til en vektlegging av begrepsutvikling og kognitive strukturer hvor kunnskap «lagres». Den lærende begriper, fatter eller får tak i, en enhet kunnskap. Undervisningens oppgave blir å legge til rette for at tilegnelsen skjer gjennom en individuell tilpassing.

I deltakelsesmetaforen føres den lærende fra å være en «lone entrepeneur» over til «an integral part of a team» (Sfard, 1998, s. 6). Identiteten til den enkelte er en funksjon av hva den enkelte gjør i denne helheten. Betraktningen av den lærende som en deltaker kan plasseres under fanen sosiokulturelle teorier. For å havne i den kategorien stilles krav om hensyntaken til det sosiale og situerte aspektet ved læring og det at «læring er deltaking i praksisfelleskap» (Dysthe, 2001, s. 43). Å se læring som deltaking, og ikke tilegnelse, er å forandre fokus fra generelle mentale strukturer over til «a very explicit focus on the person, but as person-in-the-world, as member of a sociocultural community» (Lave & Wenger, 1991, s. 52).

Å se skillet mellom de to metaforene i et individuelt- eller sosialt perspektiv kan være en forenkling. Det er ikke i hva som betraktes, men hvordan, forskjellen kommer fram. I et tilegnelsesperspektiven betraktes den individuelle utviklinga fra en personlig tilegnelse til å være i stand til deltaking i kollektive aktiviteter. Deltakelsesperspektivet ser individet utvikle seg ved å delta i de kollektive aktivitetene til seinere å utføre de samme handlingene på egen hånd. Da er det i betraktningen om hva læring er, og hvordan læring skjer, det metaforiske skillet trer fram.

I tilegnelsesmetaforen framstår kunnskap som privat eie. Det fører til problemet med intersubjektivitet: hvordan har det seg at de fleste individer, til tross for individuelle verdensoppfatninger, deler oppfatninger om omgivelsene? Intersubjektivitetsproblemet, Platons læringsparadoks[3] og forklaringsproblemer i forbindelse med menneskethetens utvikling fra huleboere til våre tiders modernitet (Säljö, 2000, s. 20), fører til et behov for å tre ut av metaforen om tilegnelse av kunnskap. Det er her metaforen om deltakelse kommer til hjelp. Gjennom å betrakte læringen som det å ta del i sosiale praksiser blir utgangspunktet den sosiale aktiviteten. Å være en del av fellesskapet blir en grunnleggende praksis og gjennom deltakelse vil den lærende gradvis kunne overta andres måter å bearbeide de sosiale praksisene.

Når det allikevel er vanskelig å gi slipp på metaforen om tilegnelse og erstatte den fullstendig med deltakelse skyldes det at metaforen er så innvevd i hverdagen at en rein forkastelse vil være umulig. Et eksempel er karakterer i form av tall eller bokstaver basert på hva individet har tilegnet seg. I pedagogikken vil direkte instruksjon måtte avslås og mennesket som individ ikke vil få en oppmerksomhet som fortjent. Gjennom en betraktning av de to metaforene som inkommensurable og ikke inkompatible vil vi kunne nyttiggjøre oss begge. Når Sfard (1998) tar til orde for en sameksistens er det under henvisning til både Bohrs komplementaritetsprinsipp og hvordan euklidsk og ikke-euklidsk geometri lever side om side. Greier vi å leve med det, håndterer vi også de to metaforene, side om side. Elevene i denne oppgaven vil betraktes som deltakere i en fellespraksis i form av diskursdeltaking.

Språk, kommunikasjon og tenking

Gjennom å betrakte den lærende som en deltaker i en diskurs inntar jeg et sosiokulturelt ståsted. «Sosiokulturell teori legg stor vekt på språkets læringspotensiale» skriver Dysthe (2001, s. 48) og hun utdyper det videre: «Språk og kommunikasjon er ikkje berre eit middel for læring, men sjølve grunnvilkåret for at læring og tenking skjer» (2001, s. 49)

Sfard betrakter ikke bare språket og kommunikasjonen som grunnvilkåret for tenkinga. Hun støtter seg på Wittgenstein og sier at kommunikasjonen er tenkinga og kommer fram til en definisjon av tenking som en individualisert versjon av kommunikasjon: «Thinking is an individualized version of (interpersonal) communication» (2008, s. 81)

Gjennom denne definisjonen opphører tenking å være en egen kognitiv prosess og vi unngår samtidig de problemene Säljö påpeker ved å se på internalisering som en speiling av en ytre eksistens. Internalisering som en prosess skaper en «skillnad mellan det yttre (kommunikation mellan människor) och det inre (tänkandet) som är

3 Platons læringsparadoks eller Menons paradoks kommer fra Platons dialog om Menon: Hvordan kan vi lete etter noe vi ikke vet hva er? Hvis vi finner det, hvordan vet vi at det var det vi ikke visste? Spørsmålene har opptatt filosofer i årtier.

oförenlig med ett sociokulturellt perpektiv» (Säljö, 2000, s. 107). Et slikt skille advarte også Vygotskij mot i sin teori om indre tale: «indre tale er ikke den andre siden av ytre tale – den er en helt egen funksjon» (Vygotskij, 2001, s. 214).

Som en oppfølging av definisjon av tenking lanserer Sfard en sammenslåing av kognitiv og kommunikativ til et nytt adjektiv: «commognitive» eller, på norsk, kommognitiv.

Diskursbegrepet har sin opprinnelse hos Foucault (Schrage, 1999) hvor diskurs ble brukt for det spesielle språket som oppstår i en institusjon. Det er i tråd med den tradisjonen at Sfard (2008, s. 91) definerer diskurs som: «The different types of communication, and thus of commognition, that draw some individuals together while excluding some others». Definisjonen avgrenser ikke diskursen til et språklig repertoar, som hos Foucault, men omfatter hele kommunikasjonsaspektet.

Som ny i et fagfelt, eller emner i et fagfelt, vil deltakeren tre inn i en ny diskurs. Metaforene kan hjelpe nybegynneren gjennom informasjon og den konstituerende rollen en metafor kan gi. Når metaforer avgrenses til et poetisk eller retorisk verktøy, imøtekommes det av Sfard (1998, 2008) og Lakoff og Johnson (1980). Metaforen får, hos disse, rollen som opphavet til vår kunnskap og læring. En formulering krever bruk av det figurative som fører til en eller annen metafor. Formuleringer som «x går mot null», snakke om «grenser», uttalelser om at en graf er «bratt» eller «stiger mye», er bruk av metaforer. Metaforen vil være et møte mellom det kjente og det nye ukjente som utgjør en viktig del av alles tenking. Nye ord, nye betydninger av gamle ord virker overveldende, men diskursen krever at vi benytter uttrykkene eller ordene i kommunikasjon med de andre deltakerne. Det krever oversettelse. I den situasjonen kommer metaforen til hjelp. Den er et svar på hvordan begrep kan benyttes uten å kjenne definisjonene. Lånord fra andre diskurser gjør det mulig å overføre ord. Når en i økologidiskursen møter uttrykk som produsent, forbruker eller næringskjede, eller i genetikkdiskursen møter ordet budbringer-RNA, eller i matematikkdiskursen hører toppunkt, er det noe kjent. Sjøl om en aldri har hørt ordene før spiller de på det kjente fra andre diskurser. Gjennom denne metaforiske bruken av allerede kjente uttrykk kan deltakelsen i den nye diskursen forenkles. Erfaringene kan organiseres basert på allerede kjente mønster. Gjennom å ta med de «gamle» ordene i den nye diskursen blir inntreden enklere. Metaforen blir en støtte: «They are crutches to help us get up the abstract mountain» (Bruner, 1986, s. 48)

Matematikk som en diskurs

Et av de store vitenskapteoretiske spørsmål er hva matematikk er, hvor matematikken kommer fra og hva et matematisk objekt er. Ontologien er ikke enkel. Når Euklid slår fast at det fins uendelig mange primtall, eller hvor det i matematiske teorem uttrykkes at det eksisterer et tall, er det en antydning om en eksistens et eller annet sted. Etter Platon, hans huleliknelse og ideverden, har en slik eksistensoppfatning fått navnet platonsk. Mot denne står synspunktet om matematikken som sosialt konstruert, som en felles matematisk erfaring unnfanget i matematikernes hoder (Ernest, 1991). Dette er en utfordrende filosofi for et fag bygd på formalisme og absolutthet hvor matematikkfaget kan summeres opp som «true facts about imaginary objects» (Davis & Hersh, 1999, s. 408). Lar vi ontologien hvile og ser på beskrivelsen av «true facts» summerer Sfard opp matematikken som «a product of mathematicians´pursuit of the Holy Grail of infallible communication» (2008, s. 128) og definerer matematikk som en diskurs om matematiske objekter.

Hun definerer også et begrep ut fra matematikken som en diskurs. Tradisjonelt har begrep, og det å begripe, en svært konkret betydning. Vi fatter, griper om eller får tak i «noe» for å skape mening. Ordenes etymologi avslører tidligere tiders mer konkrete diskurs, og ontologiske opphav, og krever en definisjon. Sfard knytter sin begrepsdefinisjon tett opp mot språket med definisjonen: «concept is a symbol together with its uses» (Sfard, 2008, s. 111). Definisjonen bygger på Vygotskijs analyseenhet i den språklige tenkinga, som han argumenterer for fins i «ordets indre aspekt, ordets betydning» (Vygotskij, 2001, s. 26). Sfard utvider Vygotskijs definisjon til å omfatte mer enn ordets mening i verbal kommognisjon. Hos Sfard gjelder det all kommognisjon, også ikke-verbal. Sfard støtter seg også på Wittgenstein når hun knytter definisjonen opp mot bruken. Wittgenstein sier at ordets mening ikke er noe annet enn ordets bruk i diskursen: «Let the use teach you the meaning» (Wittgenstein, 2009, s. 223). Begrepsdefinisjonen hos Sfard bryter derfor med tilegnelsesmetaforen.

Hva et matematisk objekt er gis ikke en definisjon hos Sfard. Det unngås, men hun operasjonaliserer det hun kaller et diskursivt objekt. Det defineres seinere i kapittelet, men kan inntil en presisering, og avgrensing, kan objekt leses som en enhet eller et begrep i mer tradisjonell forstand.

Sfard (2008) skiller matematikken fra andre diskurser ved å trekke fram fire egenskaper: ordbruk, visuelle mediatorer, ytringer[4] og rutiner. I alle diskurser er ordbruken avgjørende. Visualiseringer brukt som mediatorer finner vi også i andre diskurser, men matematikken skiller seg ut i bruken av symboler. De matematiske ytringene bygger i større grad enn andre på deduktive forhold mellom hverandre. Rutinene er de gjentakende mønstrene en kan finne i diskursen.

Visuelle mediatorer i matematikken

En effektiv kommunikasjon krever visuelle mediatorer som gjør det mulig å identifisere objektene vi samtaler om og koordinere samtalen. I den matematiske diskursen spiller de visuelle mediatorene en helt spesiell rolle. En visuell mediator kan være alt fra en gjenstand, en figur, en forestilling eller et tegn. I matematikken oppstår behovet for en visuell mediator ved at vi i liten grad har direkte tilgang til de

4 Sfard bruker «narratives» som kan oversettes til narrativer. Jeg velger å kalle det ytringer

matematiske begrepene. Mens vi kan peke på konkrete gjenstander, som en bil eller gyngestol, har vi ikke den muligheten med de abstrakte matematiske begrepene. Variabler, funksjoner, grupper eller matriser lar seg ikke peke på. En deltakelse i den matematiske diskursen krever derfor visuelle mediatorer.

I det teoretiske grunnlaget for oppgaven, basert på Sfards kommognitive teori, er den visuelle mediatoren betraktet fra et annet perspektiv enn i andre teorier, f.eks. den klassiske semiotikken.

Semiotikken er studiet av tegnsystemer og meningen vi kan trekke ut av tegn (Eco, 1979). En av semiotikkens grunnleggere, Pierce, opererer med tre begrep i sin semiotiske modell ved å innføre subjektene *sign* (tegn), *object* (objekt) og tolkingen, som han kalte *interpretant (1998)*. I interpretant la han alle ideene som assosieres med tegnet: «the idea in the mind that the sign excites, which is a mental sign of the same object» (Peirce & Houser, 1998, s. 13). Samme utgangspunkt har også Frege (1892) som opererer med en triade: *Zeichen* (tegn), *Sinn* (oppfatning) og *Bedeutung* (mening). I *Bedeutung* legger Frege en objektive ide om det objektet tegnet står for. Med den ideelle eksistens er han her i Platons ideverden hvor objekter eksisterer uavhengig av vår kjennskap eller forståelse av dem. *Sinn* er en personlig oversetting av tegnet. På samme måte er individets fortolking av matematiske begrep gjennom tegn, viktig innafor didaktisk teori (Duval, 2006; Steinbring, 2000, 2006). Det fører til et tilegnelsesperspektiv hvor den den individuelle oppfatningen må fortolkes og analyseres. I Sfards teori (2008) unngås fortolkingsaspektet. Betegneren knyttes direkte til språket gjennom en realisasjon.

> Definition: Realizations of the signifier S is a perceptual accessible thing S´so that every endorsed narrative about S can be translated according to well defined rules into an endorsed narrative about S´ (Sfard, 2008, s. 154)

Realisasjonen, som jeg vil gjøre rede for seinere i kapittelet, er det konkrete som er betegnet. Foreløpig kan det leses som representasjon. Betegneren kan typisk være et ord eller et tegn som erstatter realisasjonen i en ytring. Grammatisk vil betegneren være et substantiv. Et gjennomgående eksempel i denne oppgaven er $f´(x)$, et etablert symbol for den deriverte. Symbol hører med blant tegnene og skiller seg fra andre tegn ved at de enten er en konvensjon eller er definert til å stå for noe. En realisasjon av betegneren $f´(x)$ kan være grafen eller funksjonsuttrykket til den deriverte. I en matematisk akseptert ytring (eng. endorsed narrative) vil betegneren $f´(x)$ kunne erstattes med realisasjonen.

Individualisering av matematiske objekter

Operasjonelle og strukturelle sider ved objekt i matematikkdiskursen

I matematikken identifiserer flere teoretikere prosesser og objekter (Asiala, Cottrill, Schwingendorf, & Dubinsky, 1997; Gray & Tall, 2001; Sfard, 1991, 1992, 2008). Objektifisering er å lage objekt av prosesser. Betegnere som $4+5$, $\frac{3}{4}$ eller x^2 kan både betegne en prosess og et objekt, som er resultat av en prosess. Resultatet er en dualitet i et operasjonelt og et strukturelt aspekt. Slik kan x^2 betegne enten prosessene multiplikasjon eller kvadrering, eller objektet kvadratet. Brøken $\frac{3}{4}$ kan enten betegne prosessen «tre dividert på fire» eller objektet trekvart, verdien som tilsvarer 0.75. Til og med i dagligtalen vår kommer denne dualiteten fram: Når vi benytter ordet «løsning» gjør vi det som betegner for både hvordan vi har gjort en oppgave, framgangsmåten, og resultatet. «Løsningen» betegner både algoritmen og sluttproduktet, mens et skille blir gjort i andre tilfeller. Et eksempel er «bygging» om en prosess og «bygning» om resultatet av prosessen.

Et av problemene ved individualisering av matematiske objekt ligger i å kunne håndtere noe som tilsynelatende er en prosess og lage et eget objekt. Sfard kaller dette en tingliggjøring (1991, 2008), en objektifiseringsprosess hvor handlingen erstattes med et objekt. Ved en deltaking i en diskurs dannes et nytt diskursivt objekt gjennom en omdannelse fra det operasjonelle. Et eksempel som er gjennomgående i undersøkelsen er den matematiske funksjonen. Funksjonen kan enten oppfattes operasjonelt, som en prosess for å finne samhørende størrelser, eller strukturelt som et matematisk objekt vi kan referere til som en tingliggjort helhet, en statisk struktur som eksisterer i seg sjøl[5]. Det er viktig at de to aspektene ikke er gjensidig ekskluderende, men komplementære: den ene kan ikke eksistere uten den andre. Det er to sider av akkurat samme sak: «we are dealing here with duality rather than dichotomy» (Sfard, 1991, s. 9)

Sfard (1991) argumenterer for en hierarkisk tredeling av individets prosess fram mot tingligjøringen. Hun deler den i tre faser: interiorisering[6] (eng. interiorization), kondensering (eng. condensation) og tingliggjøring (eng. reification[7])

Sfards tre stadier fra det operasjonelle til det strukturelle starter med interiorisering. I Sfards ordbruk er dette fasen hvor eleven lærer seg å beherske utregninger og prosedyrer: «In the case of function, it is when the idea of variable is learned and the ability of using a formula to find values of the 'dependent' variable is acquired» (Sfard, 1991, s. 19)

5 Eksistens refererer ikke til ontologi, men benyttes i en diskursiv sammenheng
6 Interiorisering er min norske oversettelse av Sfards interiorization. Her kan vi lett gå oss vill. Både Vygotskij, Piaget, Dubinsky og andre benytter uttrykkene interiorisering eller internalisering. Interiorisering benyttes som hos Piaget.
7 Reification kommer fra latinske res (ting) og facere (å lage eller gjøre)

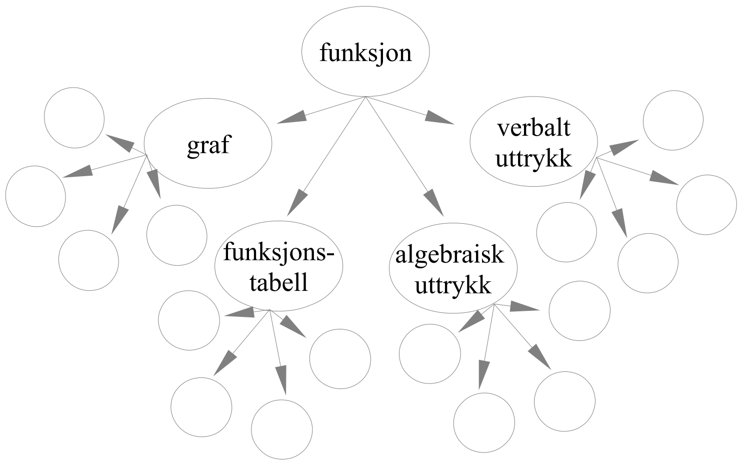
Kondensering er fasen hvor eleven oppnår å se prosessen som en helhet og bruker den i underprosesser i andre prosesser. Eleven blir mer i stand til å se på prosessen som en helhet uten å måtte gå i detaljene. Et eksempel er å kunne se en funksjon i form av en funksjonsmaskin med inn- og utverdier, «a periode of squeezing lenghty sequences of operations into more manageable units» (Sfard, 1991, s. 19).

Tingliggjøringsfasen eller reifikasjonsfasen er i motsetning til de to andre ikke en gradvis forandring. Tingliggjøringen inntrer plutselig når en person kan betrakte prosessen strukturelt som et helt eget objekt. Et ontologisk skifte «a sudden ability to see something familiar in a totally new light» (Sfard, 1991, s. 19). Med fortsatt bruk av funksjonen som eksempel, blir den egen «ting», et eget objekt.

Når Sfard skrev dette i 1991 var hun påvirket av den konstruktivistiske diskursen, og hvordan overgangen fra det operasjonelle til det strukturelle kom til uttrykk, manglet. Å se dette som en diskursiv handling, slik hun gjør i 2008, operasjonaliserer prosessen og gjør den bedre forskbar (Sfard, privat kommunikasjon). Ved å knytte tenkingen og objektifiseringen direkte til språket vil en diskursiv analyse av hvordan elever kommuniserer om objektene studeres. Det gir direkte tilgang til hva som skjer og en unngår antakelser om hva som har skjedd kognitivt hos eleven. I dette ligger styrken i Sfards omforming av egen teori fra tilegnelsesperspektivet til den diskursive deltakelsen. Før jeg utdyper teorien kreves en definisjon av realisasjoner og realisasjonstrær.

Realisasjoner og realisasjonstrær

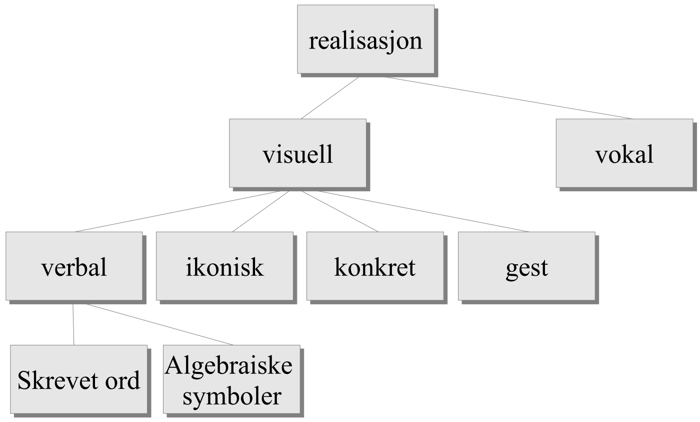
Funksjonen, som matematisk objekt, kan framstilles både i form av en graf, tabell, algebraisk uttrykk og andre varianter. Hver av disse kaller Sfard (2008) en realisasjon av betegneren «funksjon». En realisasjon er karakterisert ved at den, i motsetting til de fleste matematiske objekt, er sansbar. Grafen, tabellen og det algebraiske



Figur 2.1: Realisasjonstre

uttrykket kan vi se. Alle er de realisasjoner av funksjonsobjektet og slik er det med de fleste matematiske objekt: Et objekt kan ha flere realisasjoner.

Realiseringer av objekt kan være mer enn hva vi er vant til å tenke på som representasjoner. I Janviertabellen finner vi representasjoner av funksjonsbegrepet, men realisasjonene kan i tillegg anta andre former. Sfard (2008) deler opp i enten



Figur 2.2: Realisasjoner (etter Sfard, 2008, s. 155)

visuelle eller vokale etter om vi kan se eller høre realisasjonen og tar med flere former enn f. eks, Janvier (1987). Både gester og skrevne ord regnes blant realisasjonene. Framstilt strukturelt i en figur finner vi disse realisasjonsklassene:

At hun skiller mellom objektet og de konkrete realisasjonene gir hun flere grunner for:

> First, realizations are characterized by being perceptually accessible – a property one does not expect to find in a genuine mathematical object. Second, one signifier would usually have many visual realizations and determining which one of them deserves to be singled out as «the» object would be difficult. Finally, as already mentioned, the distinction between signifier and realization is relative. (Sfard, 2008, s. 164)

Det relative forholdet mellom objekt og realisasjon kan eksemplifiseres med utgangspunkt i figur 2.2. En realisasjon i form av en funksjonstabell kan like gjerne tjene som et objekt. Objektet i form av funksjonstabellen kan realiseres som et algebraisk uttrykk. Skiftet mellom objekt og realisasjon fører til at nesten alle realisasjoner kan gå over i rollen som betegner for nye realisasjoner. Det som i det ene øyeblikket er en realisasjon blir i neste øyeblikk en betegner og fører til trestrukturen i figuren. En trestruktur som er mer kompleks enn det vi kan finne i det lineære uttrykket meningskjede (Presmeg, 2002).

Det er viktig å understreke at realisasjonstrærne er personlige og variere fra individ til individ. Samme betegner kan derfor realiseres på mange forskjellige individuelle måter. Nettopp i realisasjonstreet og overgangene mellom realisasjoner og transformasjon mellom objekt og realisasjon finner vi den matematiske kompetansen og det som omtales som «matematisk forståelse»:

> Making skillful transitions from one realization to another is the gist of mathematical problem solving. In addition, a person´s tendency to apply mathematical discourse in solving practical problems depends on her ability to decompose signifiers into trees of realization with branches long enough to reach beyond the discourse, to familiar reallife objects and experiences. (Sfard, 2008, s. 166)

Diskursive objekter

Sfard definerer et diskursivt objekt som: «The (discursive) object signified by S (or simply object S) in a given discourse on S is the realization tree of S within this discourse» (Sfard, 2008, s. 166).

Når det diskursive objektet beskrives som realisasjonstreet, og realisasjonene i treet igjen kan betegne nye objekt, kan en kompleks struktur dannes. Her vil det diskursive objektet benyttes for å beskrive den enkeltes diskurs i forhold til den matematiske diskursen.

Individualisering av diskursive objekt

Når diskursive objekt skal individualiseres må et realisasjonstre opprettes. Bruker vi treet som metafor, må røtter og greiner dannes. Det kan også skje uten at vi må starte forfra og danne realisasjonstreet fra ei ny rot. I enkelte andre tilfeller kan vi knytte til oss allerede danna realisasjonstrær gjennom at en betegner for et eksisterende objekt blir en realisasjon. Dette kan minne om Piagets begreper assimilasjon og akkomodasjon, men det er viktig å skille mellom hans kognitive skjema og realisasjonstrær. Hos Sfard unngås igjen individets forestilling eller antakelser om mentale skjema.

Et diskursivt objekt som funksjonsobjektet bør ha ulike realisasjoner som greiner under en betegner. Er betegneren ordet «lineær funksjon» skal de ulike realisasjonene som funksjonstabellen, den rette linja i et koordinatsystem og algebraiske uttrykk på formen $ax+b$, utgjøre et rikt realisasjonstre. Den lineære funksjonen er da individualisert som et diskursivt objekt.

Jeg vil nå se på Sfards teori (2008) for hvordan en objektifisering kan skje gjennom en diskursiv prosess. Først må et primært objekt defineres. I tillegg til de diskursive objektene (d-objekt) definerer Sfard også primære objekt (p-objekt):

> The term primary object (p-object) refers to any perceptually accessible entity independently of human discourse, and this includes the things we can see and touch (material objects, pictures) as well as those that can only be heard (sounds) (Sfard, 2008, s. 169)

De primære objektene er perseptuelt tilgjengelige objekter som ennå ikke har blitt betegnet, og derfor ikke er blitt en del av diskursen. Når objektet blir en del av diskursen vil det bli et d-objekt som betegner et p-objekt. Alternativt kan det skje ved at flere etablerte d-objekt betegner ett enkelt p-objekt.

En drivkraft i denne prosessen er at det skjer for å forenkle kommunikasjonen. Utviklingen av de diskursive objektene starter med at det dannes en enkel variant av d-objektet. Gjennom å sette navn på det observerbare p-objektet tilordnes et substantiv eller pronomen til det spesielle p-objektet. Det dannes et par av substantiv[8] og objekt. Substantivet vil nå utgjøre betegneren og kan benyttes i kommunikasjonen av objektet. Et eksempel jeg vil beskrive seinere er hvordan tangenten først kan observeres som et p-objekt i form av en kurve med en tangent i ett eller flere punkt. Tangenten som ei rett linje i et punkt på ei kurve er perseptuelt tilgjengelig. For å danne et diskursivt objekt må den rette streken få et navn. En navngiving er dannelsen av den enkle formen for d-objekt. I en mer avansert prosess skapes de sammensatte diskursive objektene. Igjen skjer det ved å knytte substantiv til eksisterende d- eller p-objekt. Prosessen skjer ved enten sammenlikning, innkapsling eller tingliggjøring.

Sammenlikning (eng. saming) er en søken etter felles attributter. En betegner tilordnes til flere objekt som har noe til felles. I kommunikasjonen kan nå betegneren benyttes som en erstatter. Et eksempel kan være å benytte betegneren «brøk» for tall på formen a/b, «parabel» for alle grafer til andregradsfunksjoner eller «tangent» for alle visuelle framstillinger av tangenter. Ved sammenlikning assosieres én betegner til mange realisasjoner.

Når vi gjennom sammenlikning samler flere, så langt ubeslekta objekter, under én betegner står vi overfor en utfordring. Alle objektene har vært benyttet i kommunikasjonen og vi ønsker at bruken fortsatt skal være gyldig. Etter sammenlikning forandrer betegnerens bruk seg og det kan føre til motsigelser. Etter å ha fått utvidet realisasjonen av betegneren «tall» ved å ha blitt kjent med rasjonale tall vil f.eks. ytringer som «multiplikasjon gir alltid et større tall» miste sin gyldighet. I tilfeller som observeres seinere vil jeg se på sammenlikningen mellom sirkeltangenter og tangenter i punkter på grafer uten likheter med sirkelen. En ytring som «tangenten går bare gjennom ett punkt» mister gyldighet og fører til konflikt.

Et annet problem i sammelikningsprosessen, som særlig kommer fram i matematikken, er hvilke aspekter det er vi skal sammenlikne ut fra. Uttrykkene $5+3(x+2)$ og $3x+11$ er ekvivalente, men visuelt forskjellige. Det er realisasjonene i form av funksjonsverdier som er de samme. Å vektlegge ekvivalensen krever at eleven har realisasjoner som gjør det mulig å trekke en slik sammenlikning. Sammenlikningen er også situert. Betegneren $\frac{1}{4}$ vil fungere som betegner for flere realisasjonstrær, avhengig av hvilken situasjon, uten at flere realisasjonstrær knyttet til «en kvart», «en delt på fire» blir kombinert til ett objekt. I prosessen med å sammenlikne vil det også være store forskjeller fra individ til individ og også ut fra kontekst eller situasjonen individet befinner seg i.

Innkapsling (eng. encapsulating) kalles det å tilordne en betegner til en mengde objekter. I diskursen begynner deltakeren å bruke betegneren i entall i ytringene hvor objektet inngår. Det tilordna paret består av et substantiv og en mengde av objekter. På den måten blir flere objekter gjort om til et enkelt for kommunikasjonsformål. Benytter vi uttrykket «andregradsfunksjonen» er det en innkapsling av alle

8 Kan også være et pronomen

funksjoner som kan uttrykkes med den generelle formelen ax^2+bx+c. Å oppdage innkapslinger er enklere i andre språk enn det norske. På engelsk kan en lettere se om verbene «is» eller «are» benyttes etter substantivet. En innkapsling jeg vil se på er innkapslingen av alle punktderiverte i den deriverte funksjonen.

Tingliggjøring (eng. reifying) er å erstatte handlinger med objekt ved å introdusere et substantiv for handlingen. I kommunikasjonen erstattes en fortelling om handlingen i form av prosesser med objekter. Når betegneren $\frac{3}{4}$ før tingliggjøring kan gi ytringen «jeg delte på fire og tok tre av disse», vil en etter en tingliggjøring kunne si «jeg har trekvart av det hele». For elevene i undersøkelsen er betegneren *f(x)* viktig. Seinere skal jeg vise hvordan dette symbolet oppfattes som en betegner for prosessen «å sette inn i funksjonsuttrykket og regne ut en verdi». Målet er en tingliggjøring av funksjonsobjektet hvor *f(x)* betegner funksjonen som et d-objekt og kan realiseres som «sammenhengen mellom x og y».

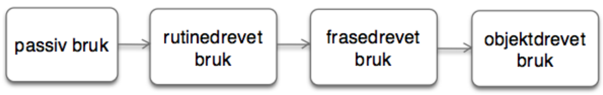
Resultatet av alle de tre prosessene er et nytt objekt. De sammensatte p-objektene og betegnerne til de sammensatte d-objektene ender opp som realisasjoner av det nye objektet. Det nye objektet vil inngå i kommunikasjonen og danne grunnlag for ytringer og fortellinger hvor et substantiv eller pronomen betegner objektet.

<table>
<tr><td colspan="2">p-objekt</td><td rowspan="2">konkrete objekt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">d-objekt</td><td>Konkrete d-objekt
• d-objekt konstruert ved sammenlikning og innkapsling</td></tr>
<tr><td>Abstrakte d-objekt
• d-objekt konstruert ved tingliggjøring</td><td>abstrakte objekt</td></tr>
</table>

Alle konkrete objekter er enten p-objekt eller diskursive objekt som oppstår gjennom de to prosessene sammenlikning eller innkapsling av kjente p-objekt. Realisasjonstrærne til de konkrete objektene er fri for tingliggjøring. I eksemplene over kan se tangentene som linjestykker. «Tangent» er derfor et konkret d-objekt som er et produkt av sammenlikning av flere visualiseringer av tangenter.

Abstrakte objekter er d-objekt som har sin opprinnelse i en tingliggjøring av diskursive prosesser. Dette minner om Piagets skille mellom empirisk og reflektiv abstraksjon, men Piaget tok utgangspunkt i det han kaller kognitive strukturer og ikke i den diskursive prosessen (Piaget, 1985). I Sfards teori unngår vi forutsetningene om mentale modeller slik som Piagets kognitive strukturer. Sjøl om det abstrakte d-objektet ikke er perseptuelt tilgjengelig er det bruken i kommunikasjonen som forteller om tingliggjøringen.

Som deltaker i en matematisk diskurs vil alle deltakere utsettes for andres bruk av objektifiserte ord eller symboler. Deltakerrollen krever kommunikasjon hvor objektene inngår. Ved en inntreden i en ny diskurs er det mer erfarne samtalepartnere, f.eks. en lærer, som styrer kommunikasjonen. For nybegynneren er det ukjente ord og symboler som benyttes i diskursen. I utgangspunktet gir ikke disse mening, men gjennom deltakelse tvinges alle til å benytte ord eller symboler i ytringer. Det krever oversettelse. Gjennom å måtte knytte sammen nytt med gammelt realiseres den nye betegneren i en mulig kombinasjon med de objektene som er kjent i diskursen. Heldigvis skjer ikke dette ved tipping. Deltakeren rettledes gjennom eksempler og eksplisitte definisjoner som tilbys av mer erfarne samtalepartnere, lærere eller andre. En viktig teknikk og støtte i denne prosessen er metaforen. Den gjør det mulig å sette inn en ny betegner i kjente diskursive maler og kan skape en bevissthet om hva som kan være en passende ytring om det nye objektet som ennå ikke er ferdig dannet. Seinere vil bruken justeres i forhold til hvordan mer erfarne diskursdeltakere benytter den samme betegneren. Denne konstruksjonen av en kobling mellom betegner og realisasjon skjer gradvis. Eleven vil i starten ikke bruke ordet i egne setninger, men bare være i stand til å utføre rutinereaksjoner etter andres ytringer hvor ordet inngår. Det kalles passiv bruk. Neste steg vil være bruk av ordet i egne ytringer. Denne bruken er aktiv, men vil bære preg av å være rutiner hvor bruken inngår som repetisjoner av andres ytringer. Når ordet tas i bruk i egenproduserte fraser kaller vi det frasedrevet. Hele frasen ordet inngår i utgjør grunnlaget for ytringen.



Figur 2.3: Ytringsfaser

Siste fase er når ordet får et eget liv som et substantiv og kan knyttes til et realisasjonstre. Betegneren vil nå kunne karakteriseres som transparent. En umiddelbar assosiasjon med realisasjonen vekkes på en slik måte at realisasjonen og ikke betegneren blir gjenstand for oppmerksomheten. Ordbruken er nå styrt av objektet sjøl gjennom at brukerens assosiasjon til realisasjonstrærne og de kontekstuelle kravene kommunikasjonen stiller.

Rutiner som matematisk handling

Når matematikkfaget utøves produseres ytringer. Enhver setning, sagt eller skrevet, beskrivelse av objekter, forhold mellom objekter eller aktiviteter med objekter er en ytring. Matematisk teori er bygd opp av ytringer i form av definisjoner, aksiom, teorem og bevis. Den typen ytringer kalles begrunna og aksepterte (eng. endorsed narratives). Begrunna fordi ytringene er bygd på logiske regler og akseptert fordi det matematiske fellesskapet er enig i at oppbyggingen er korrekt. Gjennom arbeidet for å komme fram til ytringen må felles regler benyttes for å underbygge det som fortelles. Bruken av reglene må også kunne aksepteres av de andre deltakerne i diskursen for at ytringen skal kunne aksepteres. Nå trenger ikke alle ytringene å være kompliserte matematiske teorem. Ytringene kan også være enklere utsagn i matematikktimen.

Likninger, bevis, verbale fortellinger eller besvarelser er alle å betrakte som ytringer innafor matematikkdiskursen.

De matematiske ytringene er et resultat av bestemte former for rutiner i form av gjentatt handlingsmønster. I matematikkdiskursen styres handlingene av regler for hvordan kommunikasjonen skal skje. Reglene overtas av diskursdeltakeren ved at reglene individualiseres. «It is by reproducing familiar communicational moves in appropriate new situations that we become skillful discursants and develop a sense of meaningfulness of our action» (Sfard, 2008, s. 195).

Rutiner er metaregler som beskriver en repeterende diskursiv handling. Det er to spørsmål som dukker opp i forbindelse med rutiner. For det første hvordan vi skal følge rutinen og for det andre når vi skal benytte den. Ved de første forsøk på en individualisering av andres rutiner vil ytringene bære preg av å bli utført uten å forstå meningen med dem, men med tiden vil de ende opp som individualiserte.

Sfard (2008) deler rutinene opp i tre: utforskinger, aksjoner og ritualer[9]. Oppdelingen foretar hun etter hva vi oppnår når vi utfører dem. Utforskingens mål er å produsere en ytring for å bidra til økt kunnskap. Aksjonen er handling med objekter.

I Sfards terminologi vil rutiner uten å ha forstått meningen bak kalles ritualer. Hensikten bak et rituale er sosial aksept. Ritualer utføres for fellesskapet. Eleven utfører et rituale uten å forstå meningen bak det han gjør. Det utføres fordi det er sosialt forventet. Ritualer er «sequences of discursive actions whose primary goal (closing condition) is neither the production of an endorsed narrative nor a change in objects, but creating and sustaining a bond with other people (Sfard, 2008, s. 241).

Et rituale utføres altså ikke for å ende opp i en matematisk ytring. For at ritualet skal utvikles til en aksjon eller utforsking er det ikke nok å vite hvordan rutinen skal utføres. Både i hvilken situasjon, intensjonen og det endelig målet med rutinen må være klart. Aksjoner er rutiner hvor handlingen utføres på objekter, resulterer i en forandring av objektet og ikke nødvendigvis i en ytring. Utforskinger innebærer å bevisst finne ut noe for å ende opp med en ytring. De to typene rutiner er på to forskjellige nivå i diskursen. Aksjonen er på et objektnivå, mens utforskingen er på et metanivå. Det metadiskursive nivået kjennetegnes ved at det er regler for hvordan diskursdeltakeren skal forholde seg og ikke hvilke regler som gjelder for håndtering av objektene. Utforsking kan betraktes som mer krevende enn aksjonen. Utforskingens mål er å produsere en ytring om det objektet som forandres i aksjonen. Å forandre objektet kan være enklere enn å fortelle historien om hva som har skjedd og hvorfor det skjedde.

9 Sfard bruker ordene «exploration», «deeds» og «rituals»

3 METODOLOGI

I dette kapittelet vil jeg beskrive forskingsmetodologien som skal gi svar på oppgavens spørsmål og vise konteksten forskingen ble utført i. Konsekvensene av forskingsspørsmålet diskuteres først og i neste del beskriver jeg designforskingen jeg har valgt å benytte. Etter å ha sett på den metodologiske teorien tar jeg opp hvordan jeg har gått fram og beskriver miljøet forskingen skjedde i. Til slutt beskrives datainnsamlingen og oppgavens gyldighet diskuteres

Forskingsspørsmålets metodologiske konsekvenser

I innledningskapittelet ble forskingsspørsmålet presentert:

> *Hvordan legge til rette for en individualisering av den deriverte som diskursivt objekt gjennom en teknologirik undervisning?*

Siden spørsmålet starter med «hvordan legge til rette...» vil svaret gis i form av heuristiske retningslinjer som et undervisningsopplegg kan tuftes på. Svaret kan i en kortform formuleres som: «For å legge til rette for en individualisering av den deriverte bør rådene [...], under forutsetning av [...] følges». Retningslinjene ønsker jeg å samle i en lokal instruksjonsteori, et uttrykk som spesifiseres seinere i kapittelet. I oppgaven vil derfor instruksjonsteorien utgjøre en viktig del. Et slikt forskingsspørsmål krever derfor en praksisnær metodologi hvor undersøking, utprøving og intervensjon er en del av metodologien. Forskeren kan ikke innta en passiv observatørrolle, men må interagere med miljøet rundt og gjennom det undersøke, evaluere og forbedre grunnlaget for undervisningen.

Spørsmålet inneholder også en forutsetning om en teknologirik undervisning. Når forskingen skjer i en undervisningssituasjon hvor elevene integreres som deltakere i et teknologirikt miljø, og hvor IKT benyttes som et redskap for læring, stiller det visse krav. Etableringen av det teknologirike miljø, og gjennomføringen, krever en tilpassa undervisning som ikke fins ferdig utvikla. Både programvaren som benyttes, og måten den benyttes på, krever en innovativ undervisning som ikke er etablert praksis. Det er også med på å forsterke betingelsen om at forskingen skjer under en utprøving og krever en metodologi som kan bidra til forskingsresultater i en undervisningssituasjon hvor mange parametere er i forandring.

Forskingsspørsmålets karakter ledet meg derfor mot intervensjonsforsking og i van Akkers beskrivelse av designforsking som metodologi fant jeg en beskrivelse som dekket mine behov:

> The major knowledge to be gained from development research is in the form of [...] 'design principles' to support designers in their task. Those principles are usually heuristic statements of a format such as: 'If you want to design intervention X [for the

> purpose/function Y in context Z], then you are best advised to give that intervention the characteristics A, B, and C [substantive emphasis], and to do that via procedures K, L, and M [procedural emphasis], because of arguments P, Q, and R '. (Akker, 1999, s. 9)

Videre i kapittelet vil jeg beskrive mer i detalj hva metodologien går ut på og hvordan den er tilpassa forskingen min.

Designforsking

Designforsking som forskingsmetodologi ble introdusert i 1992 av Brown (1992) og Collins (1992) som en alternativ metode for å gjennomføre, teste og forbedre et undervisningsdesign (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004). Hva som i dag kan samles under betegnelsen designforsking varierer i stor grad (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer, & Schauble, 2003), men jeg vil forsøke å plassere metodologien innafor noen rammer. Det mest karakteristiske er den nære knyttingen til undervisningspraksisen. Designforskingen er en metodologisk reaksjon på en teoretisering og praksisfjern metodologi for mer relevant og anvendbar didaktisk forsking (Akker, 1999; Collins et al., 2004)

Designforsking som metodologi

Når Collins og Brown (Brown, 1992; Collins, 1992) introduserte metodologien benyttet de navnet designforsking (eng. design research) i sine artikler, men etter det er metodologien er også kjent under navnet designeksperiment (eng. design experiment). Bak ordbruken er det ofte samme metodologi som skjuler seg, men sjøl benytter jeg ikke de to uttrykkene synonymt. Metodologien jeg benytter velger jeg å kalle designforsking ut fra at assosiasjonen til det klassiske vitenskaplige eksperimentet unngås. Når designeksperiment benyttes om denne metodologien er det viktig å merke seg at *eksperiment* ikke viser til et klassisk vitenskaplig eksperiment med kontrollgruppe og mulige generalisering. Eksperiment henviser til det å sette opp et eksperimentelt klasserom hvor den innovative undervisningen utgjør eksperimentet. En slik assosiasjon unngås ved å kalle metodologien for designforsking. Når jeg i enkelte sammenhenger benytter ordet designeksperiment er det i en mer praktisk enn metodologisk mening. I denne oppgaven reserverer jeg uttrykket designeksperiment for en praktisk uttesting av et design.

Et av kjennetegnene på designforsking er at designet står i fokus. I den didaktiske designforskingen vil designet kunne være en utforming av et læringsmiljø, et redskap eller en undervisningspraksis. Forskeren prøver å forfine designet ved å basere seg på teoretiske prinsipper fra tidligere forskning, egne erfaringer og analyser fra utprøvingen. Prosessen gjentas i sykler med stadig grad av forfining. Den iterative designsyklusen med implementering, analyse og redesign er det metodologiske fundamentet (Design Based Research Collective, 2003).

Gjennom en syklisk tilnærming, og en stadig forbedring av undervisningsprinsipper, er forskingsmålet praksisnært. Det er i den iterative prosessen forskeren opptrer i rollen både som observatør, tolker og påvirker. Forskeren er i direkte aksjon med en virkelighet han ønsker å påvirke. Rollen er ikke passiv observatør, men en påvirker og intervensjonist. Den sykliske prosessen starter med et design basert på teori, så følger utprøving av designet, evaluering og revurdering. Gjennom hele prosessen er det undervisningsopplegget og det teoretiske grunnlaget som er målet.

Cobb et al. (2003) gir fem karakteristikker som kjennetegner designforsking som metodologi. For det første er det at målet er å utvikle en teori. En teori både for læring og undervisningsmetodene som skal til for at læring skal skje. Både lærerens rolle, undervisningsmetodikken, den sosiale praksisen og andre påvirkningsfaktorer beskrives og analyseres. Det andre er utviklingen av et nyskapende undervisningsopplegg gjennom intervensjon fra forskerens side. Designforskingen er, i følge Cobb et al. typisk «test-beds for innovation». Tredje karakteristikk er blandingen av de to første karakteristikkene. Gjennom utvikling og refleksjon påvirkes den underliggende teorien. Antakelser utfordres eller stadfestes og nye hypoteser dannes og kan utnyttes videre. Det skjer gjennom hele designforskingen og gjør forskerens rolle både analytisk, reflekterende og konkluderende. Fjerde kjennetegn er den gjentakende sykliske arbeidsmåten. Designforsking er en iterativ metodologi med hypotesetesting, analyser og refleksjon i flere sykler. I mikrosykluser kan den iterative prosessen skje over svært korte tidsintervall, mens større sykluser over år også kan finne sted. Siste karakteristikk er den pragmatiske. Den praksisrelaterte teorien er knyttet til et undervisningsopplegg som skal fungere og ikke til teoretiske spekulasjoner om undervisning.

Ut over disse karakteristikkene kan metodologien variere i stor grad (Cobb et al., 2003). Designforskingen jeg benytter som metodologi har hentet inspirasjon fra nederlandske forskingsmiljø. Nederlenderen Freudenthal[10] var tidlig ute med det han kalte «developmental research» (Gravemeijer, 1994). En metodologi som, ut fra karakteristikkene over, faller under designforsking. Freudenthals metodologi er seinere utviklet av Gravemeijer (Cobb & Gravemeijer, 2006). Metodologien jeg benytter er basert på Gravemeijers videreutvikling (1994, 2004a, 2004b; 2006) med presiseringer og tilpassinger fra Drijvers (2003) og Doorman (2005).

Designforsking går i sykler som alle er fasedelte. Collins et al. (2004) indentifiserer fem faser i hver syklus, mens Cobb og Gravemeijer (2006) slår sammen til tre avgrensa faser. Felles er at hver av fasene er avgrenset, med hver sin fokus, og at hver fase avsluttes med en konklusjon eller målbeskrivelse. Etter Cobb og Gravemeijer starter designforskingen med en forberedende fase for å legge til rette for undervisningseksperimentet. En klar målformulering hvor læringsmålene etableres og de teoretiske intensjonene klargjøres. Undervisningseksperimentets start- og

10 Hans Freudenthal (1905-1990) matematiker, filosof og didaktiker. Han grunnla i 1971 det som i dag kalles Freudenthal Institute (FI) ved Universitetet i Utrecht.

sluttpunkt må beskrives. Under hele designeksperimentet er en lokal instruksjonsteori (eng. local instruction theory) et viktig instrument. Den inneholder de teoretiske intensjonene for hvordan elevene kan nå læringsmålene. En lokal instruksjonsteori formuleres i startfasen, men både vurdering og reformuleringer av den lokale instruksjonsteorien skjer gjennom hele designeksperimentet. Den lokale instruksjonsteorien er derfor ikke en statisk teori som er slått fast en gang for alle. Cobb og Gravemeijer bruker av den grunn *antatt* lokal instruksjonsteori (eng. conjectured local instruction theory). Jeg legger antakelsen implisitt i uttrykket lokal instruksjonsteori og lar lokal instruksjonsteori være synonymt med antatt lokal instruksjonsteori. Ordet *lokal* refererer til det faglige emnet det forskes på og ikke til en fysisk lokalitet. Når den lokale instruksjonsteorien skal implementeres skjer det i en hypotetisk læringsbane. En mer detaljert beskrivelse av de to verktøyene følger seinere i kapittelet.

Neste fase er designeksperimentet, utprøvingen av undervisningsopplegget som er teoretisk fundamentert i den lokale instruksjonsteorien. Hva som skjer i denne fasen observeres og rapporteres, og data fra undervisningen samles inn.

Data og observasjoner tas med til den siste fasen som er en retrospektiv analyse av designeksperimentet. Læringsmålene og midlene for å nå målet analyseres. Konklusjonen danner enten grunnlag for en ny syklus eller avslutter forskingen.

Syklene og fasene over beskriver det Gravemeijer (1994) kaller makrosykler. Innafor en makrosyklus kan også mikrosykluser identifiseres. I undervisningssituasjonen kan spontane avgjørelser tas på grunnlag av respons fra elevene. Respons som fører til en revurdering av deler av den lokale instruksjonsteorien eller den hypotetiske læringsbanen kan føre til en analyse og omlegging av undervisningen. En slik situasjonsbestemt spontanitet er et eksempel på «theory guided bricolage» (Cobb & Gravemeijer, 2006, s. 57). Den franske bricoleur er en altmuligmann med ferdigheter til å utnytte det som er for hånden for å løse praktiske problem. Designsforskeren, som altmuligmann, er ikke begrenset til mikrosyklusene og de spontane situasjonene. Målet som skal nås gjennom utformingen av et design krever evnen til å benytte de midler som er tilgjengelig. Da er både improvisasjonsevne og teoretisk grunnlag viktige komponeneter. Mikrosyklusene må rapporteres.

Lokal instruksjonsteori og hypotetisk læringsbane

I den sykliske prosessen er det to viktige metodologiske begrep. Jeg har allerede nevnt den lokale instruksjonsteorien og den hypotetiske læringsbanen.

Den lokale instruksjonsteorien er en teoretisk formodning om grunnlaget for å nå målene som er satt i den forberedende fasen. Teorien både utvikles i forkant av designeksperimentet, vurderes underveis og til slutt. Den kan utvikles gjennom hele designforskingen og revurderes gjennom videre forsking. Rollen til den lokale instruksjonsteorien varierer mellom de metodologiske variantene av designforsking.

Den kan være analyseenheten eller danne grunnlag for utviklingen av en undervisningsprototyp som i sin tur er gjenstand for analyse.

En hypotetisk læringsbane[11] (HLB) (eng. hypothetical learning trajectory) er utformingen av undervisningen grunnlagt på den lokale instruksjonsteorien. Ut fra den lokale instruksjonsteorien kan en mulig vei for å nå målet konstrueres. Beskrivelsen av veien, sammen med instruksjonsmateriell, planlegging, oppgavevalg utgjør den hypotetiske læringsbanen[12]. Opprinnelsen til uttrykket finner vi hos Simon (1995), men da i form av antatt undervisningsopplegg basert på konstruktivistisk mulig vei fram mot et læringsmål. Uttrykket var uten tilknytting til en forskingsmetodologi.

Gravemeijer refererer til samme Simon når skillene mellom den lokale instruksjonsteorien og HLB trekkes opp:

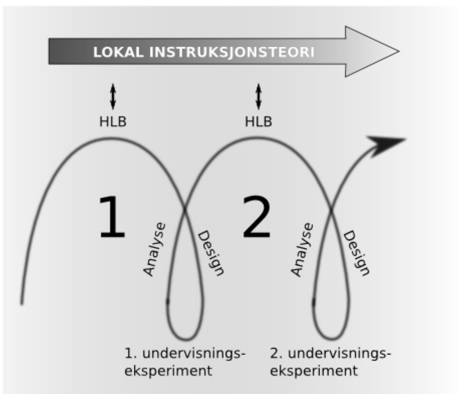
> The relation between then hypothetical learning trajectory and local instruction theories can be elucidated with Simon´s (1995) travel metaphor, in terms of a travel metaphor, the local instruction theory offers a «travel plan», which the teacher has to transpose into an actual «journey» with his or hers students (Gravemeijer, 2004b, s. 107)

I metaforen trer skillene fram, men i designforskingen kan det være vanskelige å si hvor den ene slutter og den andre begynner. I flere studier vil HLB og den lokale instruksjonsteorien være nært forbundet og overgangsfaser av hverandre (Drijvers, 2003; Gravemeijer, 1994).

Utviklingen av den hypotetiske læringsbanen (HLB) er en viktig del av designeksperimentet. Gjennom å anta start- og sluttpunkt og utvikle aktiviteter danner HLB hele undervisningsopplegget inkludert antakelser om virkningen av det. Denne sekvensen av aktiviteter, planer og antakelser om hvorfor undervisningen vil lykkes er det som utprøves. Antakelsene i HLB må derfor være mest mulig testbare.

I den refleksive analysen etter designeksperimentet analyseres HLB for å se om antakelsene holdt. Analysene fører til en revurdering av syklusens HLB og den nye HLB kan utprøves i nye sykler. Heller ikke den lokale instruksjonsteorien er en rigid struktur. Ved endringer av HLB kan den lokale instruksjonsteorien påvirkes og forandres. Gjennom designforskingen utvikles både en HLB og en lokal instruksjonsteori. De to er slutt produktet av designforskingen.

Figur 3.1 illustrerer det refleksive forholdet og hvordan både HLB og den lokale instruksjonsteorien



Figur 3.1: Sykluser, læringsbane og instruksjonsteori

11 Det norske ordet bane er valgt for det engelske trajectory. Sti er også et ord som benyttes på norsk.

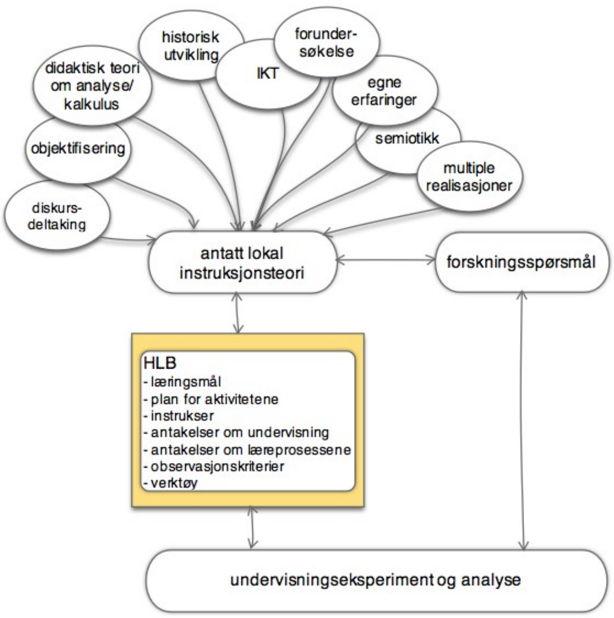
12 Ut fra beskrivelsen av den hypotetiske læringsbanen følger det at den avhenger i stor grad av læringssynet som legges til grunn. I en kognitiv tradisjon vil en læringsbane kunne beskrives ut fra hvordan kognitive strukturer kan påvirkes. Andre læringssyn vil, i lik måte, gi en annen fortolking av læringsbanen.

utvikles gjennom makrosyklene. Illustrasjonen tar utgangspunkt i designforskingen i denne oppgaven og beskriver to sykler. I andre tilfeller kan eksperimentet strekke seg over mange og større sykluser enn i dette tilfellet.

Designeksperimentet i praksis

Utviklingen av en lokal instruksjonsteori og en hypotetisk læringsbane

I den forberedende fasen ble en lokal instruksjonsteori, som et hypotetisk og foreløpig svar på forskingsspørsmålet, utviklet. Fasen startet med en studie av didaktisk teori, historisk utvikling av de matematiske emnene og en analyse av egen og andres



Figur 3.2: Oppgavens struktur

erfaringer. Litteraturstudier av tidligere didaktisk forsking om elevers møte med den matematiske analysen ble studert, vurdert og implementert i den lokale instruksjonsteorien.

En forundersøkelse ble utviklet for å samle mer erfaring og knytte teorien til elevgrupper i samme miljø som de som skulle delta i designforskingen. Oppgavene i forundersøkelsen var delvis hentet eller utviklet fra den didaktiske teorien.

Utviklinga av den lokal instruksjonsteorien blir beskrevet i detalj i kapittel 4 . De viktigste komponentene i den lokal instruksjonsteorien er for det første å betrakte eleven som en deltaker i en diskurs og det å lære matematikk som en diskursiv prosess. Den historiske utviklinga av den matematiske analysen ga viktige bidrag til kompleksiteten og utfordringene et undervisningsdesign står overfor. En skjematisk oppsummering av de viktigste elementene fins i figur 3.2. Den lokale instruksjonsteorien ble et antatt grunnlag for et svar på forskingsspørsmålet. En formodning om utformingen av undervisningsopplegget, mål, planer, aktiviteter og undervisningsmateriell ble deretter formulert i designets HLB. Både antakelsene om en læringsbane og observasjonskriterier for holdbarheten ved antakelsene ble beskrevet. Etter designfasen ble HLB implementert gjennom undervisningseksperimentet. Som instruktør, observatør, bricoleur og analytiker fulgte jeg eksperimentet. Hver undervisningsøkt kan sees på som en mikrosyklus. Etter hver time ble det samlet data fra elevene. Sammen med en logg jeg skrev ble data raskt analysert umiddelbart etterpå. Designet ble vurdert og i noen tilfeller ble designet justert etter analysen.

Etter at designet var utprøvd i sin helhet ble det gjennomført en avsluttende prøve. Besvarelsene ble analysert sammen med de innsamla dataene gjennom undervisningsperioden. Analysen ble utført med mål om å gi svar på i hvilken grad HLB kunne forsvares i forhold til forskingsspørsmålet. Konklusjonen dannet utgangspunkt for neste syklus i designforskingen. Den lokale instruksjonsteorien og HLB ble justert etter konklusjonen i den retrospektive analysen. En annen forandring i neste syklus var IKT-miljøet. I siste syklus ble det en mer integrert del av undervisningen.

Gjennom to sykluser var målet å empirisk grunngi valgene og antakelsene som ble gjort for å komme fram til et undervisningsdesign. I en avsluttende diskusjon og en konklusjon ble designeksperimentet avsluttet. Avslutningen er satt innafor rammene av oppgaven. Ideelt sett burde syklusene fortsettes gjennom delaktighet fra andre lærere pedagogiske miljø.

Elevene som deltok i designforskingen

Designforskingen ble gjennomført i ei matematikkgruppe på første trinn, vg1, ved en videregående skole som snart nærmer seg 100 år. Skolen ligger sentralt plassert i en by og har mange søkere, noe som fører til oversøking og høye inntakskrav. Under opptak prioriteres elevene som bor innafor et område geografisk avgrensa av en 6 km avstand fra skolen.

For elevene på første årstrinn var laveste inntakspoeng 41. Poengsystemet baserer seg på karakterer fra grunnskolen og poengsummen betyr at laveste karaktergjennomsnitt for å komme inn var 4.1. Karaktergjennomsnittet betyr at elevgruppa ved skolen preges av gode karakterer fra grunnskolen.

For elevene på vg1 står valget mellom to matematikkurs. En praktisk variant av matematikkfaget, 1P, eller det teoretiske kurset 1T. Den teoretiske varianten er ment å være en forberedelse for matematikkursene som følger på program for realfag i de neste trinnene i den videregående skolen. Etter oppstart velger elevene sjøl hvilken variant de vil ta. For å hjelpe elevene i dette valget arrangeres to tester og elevene rådgis ut fra ønsker og forutsettinger som testene viser.

Designeksperimentet ble utført i faget 1T. Grunnen til at kurset 1T ble valgt er at det er der begynneropplæringa i analyse skjer. Skolen har fire 1T-grupper og valget av gruppe var helt tilfeldig. Som faglærer fikk jeg tildelt ei gruppe elever som var ukjent for både meg og for det administrative personalet som satte sammen gruppene.

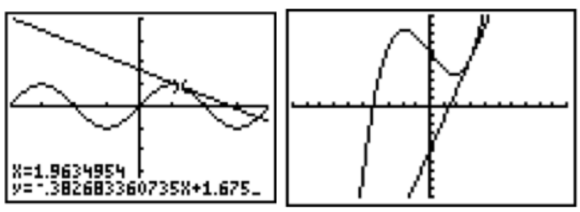
I første syklus besto elevgruppa av 27 elever, 14 jenter og 13 gutter. Undervisningen i temaet derivasjon skjedde i mars. Ved vurdering etter første termin ble gjennomsnittskarakteren i matematikkgruppa 3.4. Ved sluttvurderingen etter endt årskurs oppnådde de samme elevene 3.5 i gjennomsnittskarakter.

I den andre syklusen var elevenes inntakspoeng omtrent det samme. Elevgruppa oppnådde en høyere gjennomsnittskarakter etter første termin enn elevene i forrige syklus. Med 4.17 i gjennomsnittskarakter består gruppa av elever med en stor grad av måloppnåelse. Denne gangen var kjønnsfordelingen blant de 22 elevene 9 gutter og 13 jenter.

Under utarbeidelsen av den lokale instruksjonsteorien ble det utført en forundersøkelse for å analysere derivasjonsdiskursen i et videregående matematikkurs. Elevene i forundersøkelsen gikk alle i ei matematikkgruppe på andre trinn (vg2) ved samme skole og tok kurset R1. R1 er det mest teoretisk prega matematikkurset på vg2. Faget inngår i program for realfag og danner grunnlag for kurset R2, et kurs for de som ønsker høyeste kompetanse i matematikk etter videregående skole. Elevgruppa i R1-kurset består av elever som sjøl har valgt en fordypning etter første år. Tradisjonelt velger elever som har nådd en måloppnåelse over gjennomsnitt i rekrutteringskurset, 1T, å gå videre til R1-kurset. På det tidspunkt undersøkelsen ble gjennomført hadde flere elever sluttet i R1-gruppa og gått over til mer praktiske kurs. Begrunnelsen for omvalget var at de følte de ikke mestret det faglige. Med et høyt karaktergjennomsnitt ved inntak fra grunnskolen, et eget valg om mer fordypning i R1 etter 1T, og en mulighet for omvalg til andre kurs, består gruppa av et spesielt utvalg av ungdomsgruppa. Elevene var satt sammen av elever fra flere 1T-grupper med forskjellige lærere. De fleste kom fra samme skole, men to hadde bakgrunn fra andre skoler. Jeg var faglærer for R1-elevene, men hadde ikke vært faglærer for noen av disse elevene i 1T.

Det teknologiske miljøet

I første syklus hadde alle elevene egen grafisk kalkulator. De aller fleste hadde enten TI83 eller TI84. Begge er produsert av Texas Instruments og har svært lik funksjonalitet. Når læreplanene i



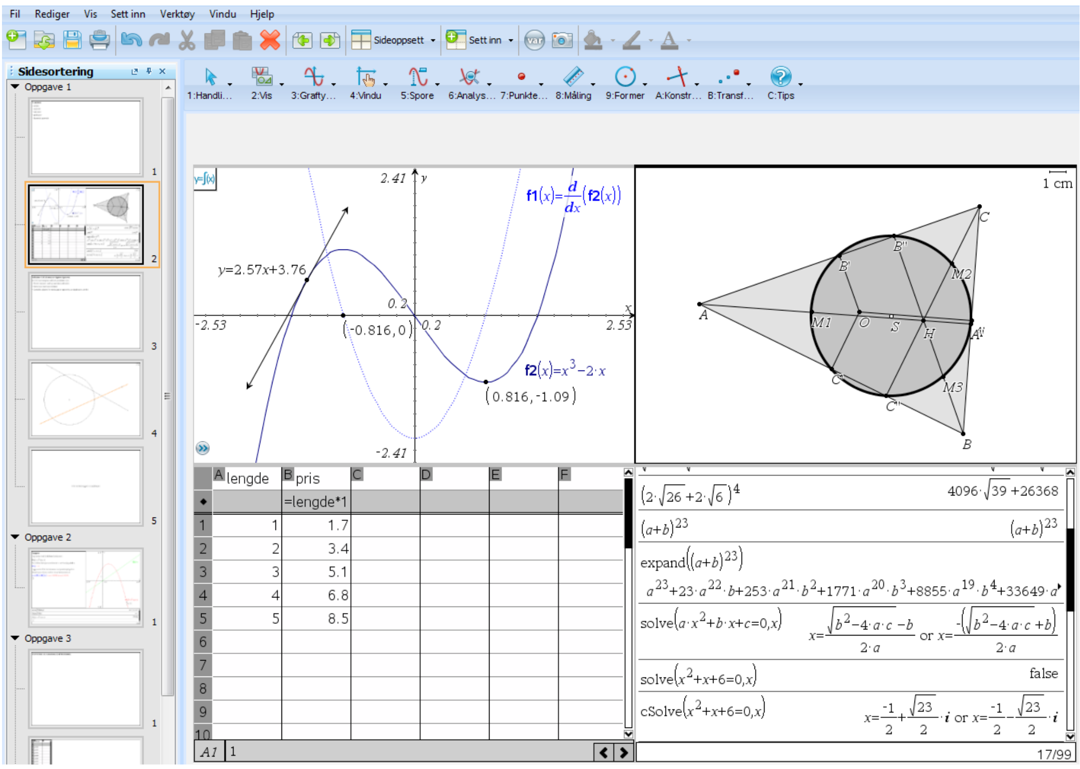
Figur 3.3: Skjermbilder fra grafisk lommeregner

den videregående skolen ble reformert i 1994, i det som fikk navnet Reform 94, ble den grafiske lommeregneren et viktig verktøy. Alle elever skulle ha en grafisk lommeregner. Både TI83 og TI84 er grafiske lommeregnere. I det ligger det at de både kan utføre numeriske operasjoner, tegne funksjonsgrafer og noen enkle geometriske figurer. Som et redskap i kalkulus kan elevene tegne opp grafen til en funksjon og få tegnet opp en numerisk generert graf av den deriverte til funksjonen. De kan også tegne tangenter i gitte punkt på grafene og få beregnet stigningstallet til tangenten. Topp- og bunnpunkt kan også beregnes i den grafiske modulen.

I den andre syklusen hadde alle elevene egne bærbare datamaskiner. Ved skoleårets begynnelse fikk alle elevene utlevert samme type datamaskin fra skoleeier. Med egen datamaskin ble det ikke stilt krav til elevene om egen kalkulator. Bare et par av elevene hadde grafisk kalkulator mens de andre benyttet en kombinasjon av programvare, enklere kalkulatorer eller kalkulatoren på mobiltelefonen.

Programvaren TI-Nspire

Alle elevene, i begge sykluser, brukte programvaren TI-Nspire. Nspire er en programvarepakke[13] fra Texas Instruments (TI) som ble lansert for første gang i 2006. Nspire inneholder godt integrerte verktøy som CAS[14]-kalkulator, graftegner, regneark, dynamisk geometri, tekstbehandler, statistikkverktøy og programmeringsmuligheter.



Figur 3.4: Eksempel på grensesnitt TI-Nspire

13 I tillegg til programvaren fins en håndholdt enhet med samme navn, men den har ikke elevene brukt
14 CAS er en forkortelse for det engelske Compter Algebra System

CAS-delen utfører både eksakt rasjonal, reell og kompleks aritmetikk samtidig som den kan utføre symbolsk algebra med manipulasjon og løsning av algebraiske uttrykk. I tillegg fins flere numeriske løsningsmuligheter. CAS har vært tilgjengelig på datamaskiner[15] og lommeregnere[16] i flere år[17], men har ikke vært godkjent til ordinær eksamen i den videregående skolen før de siste årene.

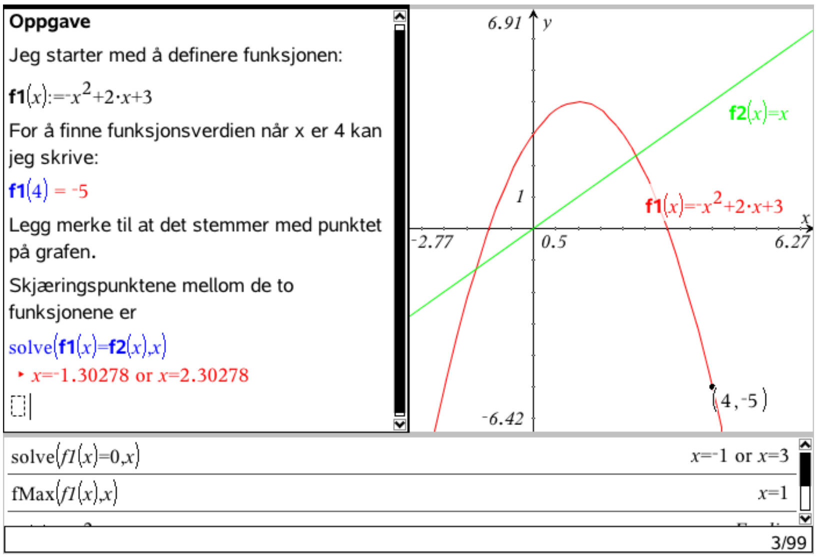
Graftegnerdelen kan, i tillegg til å tegne grafer av flere typer funksjoner, benyttes i et blandet miljø med dynamisk geometri. Her kan geometriske figurer plasseres i eller utenfor koordinatsystemet og avstander, vinkler og areal måles.

I en egen modul finner vi et enkelt regneark med listebehandling. Også denne modulen er godt integrert med de andre og alle variabler er tilgjengelig i de andre modulene.

Statistikkdelen inneholder verktøy for statistiske beregninger med data fra regnearket eller listene.

Tekstbehandleren er den delen som har gjennomgått størst utvikling gjennom versjonshistorien til Nspire. I utgaven som ble brukt i denne undersøkelsen er formateringsmulighetene for tekst begrenset, men tekstbehandleren gjør det mulig å skrive de aller fleste matematiske tegn samt å få utført all funksjonaliteten vi finner i kalkulatordelen.

Alle modulene kan settes sammen i forskjellige kombinasjoner slik at de utgjør ett skjermbilde eller de kan fordeles på flere sider.



Figur 3.5: Bruk av flere vinduer

I undervisningsoppleggene ble to forskjellige versjoner av TI-Nspire brukt. Den første elevgruppa brukte versjon 1.7. Våren 2010 dukket det opp en stor oppgradering til

15 Kjent programvare for datamaskin er Mathlab, Maple, Mathematica, Mathcad, Mupad, Derive, TI-Interactive, Scientific Notebook o.l.

16 Noen eksempler på CAS-lommeregnere er Casio Cassiopeia, Casio ClassPad 300, Hewlett-Packard 40G, Hewlett-Packard 200 LX, Texas Instruments TI-89 og Texas Instruments Voyage 200

17 Mathlab ble utviklet allerede i 1964. Derive, som kom i 1988, var mitt første møte med CAS.

versjon 2.0. Det som skulle bli viktigst for oss var introduksjonen av farger og at notatmodulen inneholdt langt bedre muligheter for kalkulasjon og å få blandet tekst og utregninger.

Datainnsamling, analyse og metode

Den deriverte som diskursivt objekt impliserer en diskursiv analyse hvor elevenes bruk av begrepet den deriverte, og alle de diskursive tilknyttingene, analyseres. En diskursiv analyse stiller krav til data hvor elevenes bruk av språket er samla inn. Den grunnleggende teorien bygger på Sfards kommognitive tenking (2008). Det er en teori utvikla, gjennom flere tiår, fram mot en operasjonalisering av tidligere kognitive teorier (Sfard personlig kommunikasjon). Mens analysen tidligere besto i spekulasjoner om skjema eller indre kognitive strukturer, har den kommognitive teorien samsvar mellom analysen og læringsteorien: diskursen og kommunikasjonen er både det som analyseres og uttrykket for læring. Språkbruken forteller direkte individualiseringen av objekter. Analysen er direkte knytta til teorien.

For å samle inn data endte mange av undervisningsaktivitetene med en skriftlig innlevering, enten på papir eller digitalt. Hver elev skrev sin egen korte rapport eller oppgavesvar. Deler av undervisningen ble også videofilmet. Valget av videoopptak begrunnes ut fra at det er mulig å samle inn både auditive data og elevenes gester. Jeg har valg å loggføre egne observasjoner fra undervisningen. Gjennom, og etter hver, undervisningsøkt noterte jeg hva som skjedde sammen med korte analyser.

Validitet og reliabilitet

Vitenskaplig forsking er en systematisk søken etter viten og slik basert på det filosofiske spørsmålet om hva sannhet er. Når forskingsspørsmålet i denne oppgaven skal besvares skjer det i en hermeneutisk tradisjon med forskeren som fortolker av observasjonene som blir gjort. I tillegg til en kvalitativ forskingsmetode er oppgaven bygd på et epistemologisk grunnlag om kunnskap som en sosial konstruksjon. Det plasserer oppgaven utafor en klassisk positivistisk posisjon og de kvantitative, og naturvitenskaplige, kravene til reliabilitet og validitet. Med disse begrepene diskuteres vanligvis det vi i dagligtalen kaller troverdighet og gyldighet. Jeg vil følge Kvale (2009) og legge begrepene validitet og reliabilitet opp mot dagligtalen. Det er et valg i tråd med designforskingens tradisjon. Designforskingen som metodologi tar, i de fleste varianter, et pragmatisk utgangspunkt hvor: «The main question becomes, 'Will it work?' rather than, 'Is it valid or true?'» (Sloane, 2006, s. 19)

Pragmatikken som kjennetegner metodologien fritar ikke forskingen fra diskusjonen om reliabilitet, validitet og generaliserbarhet. Et viktig middel for å ta vare på alle disse kvalitetskravene i designforskingen er grundig rapportering (eng. thick description) og en systematisk analyse (Akker, 1999; Design Based Research Collective, 2003; Gravemeijer, 1994).

Reliabilitet blir til et spørsmål om gyldighet knytta til forskingsresultatene. Tradisjonelt er reliabilitet forbundet med reproduserbarhet og spørsmålet om i hvilken grad resultatene lar seg reprodusere av andre forskere. I en situert læringskontekst er ikke reproduksjon og overføring enkle kriterier. Mange parametre påvirker et læringsmiljø og lar seg ikke kontrollere i samme grad som i et klassisk vitenskaplig eksperiment. Reliabiliteten, tolket som gyldighet og en mulig adapsjon, søkes ivaretatt gjennom grundig rapportering slik at andre kan rekonstruere eller følge undervisningsopplegget og begrunnelsene for valgene.

> Development research means: 'experiencing the cyclic process of development and research so consciously, and reporting on it so candidly that it justifies itself, and that this experience can be transmitted to others to become like their own experience'.
> (Freudenthal, 1991, s. 161)

Det krever en grundig beskrivelser av prosessene og hvordan aktivitetene ble utført. Rapporteringen av antakelsene og begrunnelsene for den lokale instruksjonsteorien og den hypotetiske læringsbanen vil også være viktig for oppgavens reliabilitet.

Validitet knyttes til troverdigheten i forskingen eller «håndverkmessig kvalitet» (Kvale & Brinkman, 2009, s. 253). Intern validitet omfatter kvaliteten på data og spørsmålet om jeg virkelig måler det jeg ønsker. Den interne validiteten utfordres av min dobbeltrolle som både forsker og lærer. Jeg skal både ta avgjørelser og være en «kritisk venn» som stiller seg kritisk til avgjørelsen og finner alternativer. Når jeg har samlet inn data gjennom både audio- og videoopptak og i tillegg samlet inn skriftlig materiale er det for sikre en størst mulig grad av variert datagrunnlag for seinere analyse. Ved analysen har jeg hatt mulighet til å analysere et variert datamateriale for å se etter sammenhenger.

Den ytre validiteten besvares gjennom spørsmålet om i hvilken grad konklusjonene kan overføres til andre situasjoner og kontekster (Hjardemaal, Tveit, & Kleven, 2002, s. 141). Utgangspunktet med læringen som situert og distribuert utfordrer en ytre validitet i form av generalisering. Designforskingen har en økologisk validitet som mål hvor resultatene kan bidra som basis for en tilrettelegging i andre situasjoner (Cobb & Gravemeijer, 2006). Det er en metodologisk tilpassing av det ytre validitesbegrepet. Igjen blir beskrivelsene av både resultatene og prosessen en viktig del av det økologiske validitetskravet. I en kvantitativ forsking kan resultatene generaliseres ut fra statistiske teknikker. I designforskingen blir den økologiske validiteten en form for analytisk form for generaliserbarhet. Gjennom de grundige beskrivelsene kan leseren sjøl støttes i en analogisk analyse som kan ende opp i en adapsjon til en ny situasjon. Den grundige beskrivelsen støtter økologiske validiteten og gjør det mulig å avgjøre i hvilken grad leseren kan tilpasse funnene til egne erfaringer og til nye situasjoner.

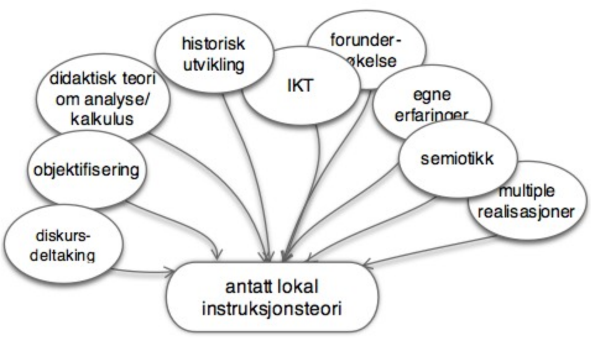
4 EN LOKAL INSTRUKSJONSTEORI

Går vi tilbake til det latinske uttrykket *derivare* er det utledet fra *de-*, som betyr ned eller bortover og *rivus*, som betyr elv. Det etymologiske opphavet til den deriverte er noe som kommer flytende ned elva. Assosiasjonene til tilfeldig drivgods stemmer dårlig for den innvidde i den matematiske diskursen, men kan nok synes mer dekkende ved elevens møte med derivasjon. Et møte med den den deriverte funksjonen og analysen kan være krevende:

> It is not easy to get into the conceptual field of elementary analysis (i.e. Calculus). Educational research developed in this area over the past 15 years shows this very clearly. (Artigue, 2000, s. 1)

I dette kapitlet vil jeg beskrive og argumentere for en lokal instruksjonsteori med antakelser for hvordan den deriverte bør introduseres for elever i den videregående skolen. Den lokale instruksjonsteorien tar ikke mål av seg til verken å være den eneste eller den optimale, men ambisjonene er å finne et antatt godt teoretisk grunnlag for et undervisningsopplegg med objektifisering av den deriverte som målsetting. Den praktiske implementeringen av instruksjonsteorien vil være et undervisningsopplegg utformet som en hypotetisk læringsbane (HLB) for gjennomføring av undervisningen. HLB, gjennomføringen og analysen av det praktiske designeksperimentet vil bli beskrevet i kommende kapitler.

Den lokale instruksjonsteorien er tuftet på flere grunnlag (se figur 4.1). I teorikapittelet har jeg beskrevet det epistemologiske og filosofiske synet om eleven som deltaker i en diskurs. Objektifisering som læringsteori og det semiotiske utgangspunktet er også beskrevet der. Nå vil jeg vil se på den historiske utviklingen



Figur 4.1: Grunnlag for den lokale instruksjonsteorien

av de involverte matematiske objektene og ta utfordringene tidligere matematikere har stått overfor med i vurderingen av hvordan dette skal presenteres til dagens 16-åringer. Den historiske utviklinga av analysen og parallellene til matematikkundervisningen er vektlagt av flere didaktikere (Cornu, 1991; Lakoff & Nuñez, 2001; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992), uten at en internasjonalt ser slike hensyn implementert i læreplaner og undervisning (Ely, 2007). For meg er det vanskelig å se at vi i Norge skiller oss ut.

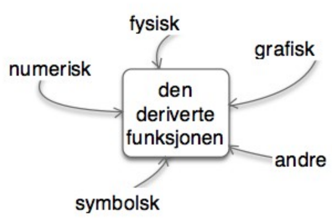
Didaktisk teori og tidligere forsking vil være et annet fundament. I tillegg har jeg gjennomført en innledende undersøkelse blant elever som året før hadde vært gjennom samme matematikkurs som elevene i undersøkelsen. Oppgavene gitt i forundersøkelsen er lagt ved i vedlegget. Til sammen danner dette grunnlaget for antakelsene i en lokal instruksjonsteori.

En analyse av den deriverte som et diskursivt objekt

De didaktiske problemene forbundet med innføringen i den matematiske analysen stammer fra hvor sammensatt derivasjonsobjektet er (Artigue, 2000). Kompleksiteten, og alle realisasjonene, gjør oppgaven med å individualisere den deriverte til en utfordring.

Den deriverte er en funksjon som gir sammenhengen mellom to størrelser: en uavhengig variabel og funksjonsverdien, som kan være den momentane veksten, stigningstallet til tangenten, farten, akselerasjonen eller andre tolkinger. Den deriverte innkapsler derfor flere diskursive objekt som til sammen utgjør den deriverte funksjonen. Hvert av objektene, med tilhørende diskurs, er mulige innfallsvinkler for et undervisningsopplegg. Hver av innfallsvinklene vil bestå av diskursive prosesser som involverer diskursive objekt.

Både en fysisk-, grafisk-, symbolsk- og numerisk diskurs danner alle innfallsvinkler til den deriverte. I et forsøk på å framstille det skjematisk har jeg satt sammen de forskjellige diskursene og de diskursive objektene i figur 4.2.



Figur 4.2: Dekomponering av den deriverte funksjonen

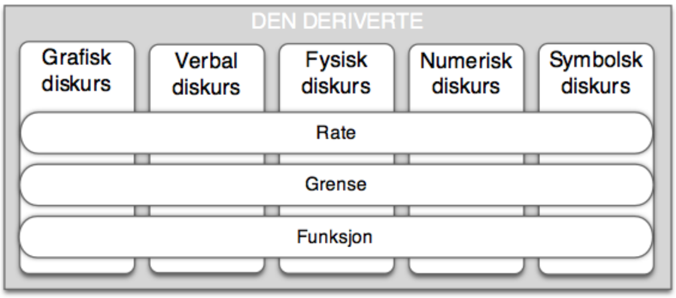
En analyse av den deriverte krever en detaljert beskrivelse av hver av diskursene. De diskursive objektene må identifiseres og objektifiseringen av hver av objektene må analyseres. Den lokale instruksjonsteorien vil derfor inneholde en strukturering av objektifiseringene som må skje. Struktureringen min er basert på ideer fra Zandieh (2000) som utviklet et analyseverktøy for kategorisering av oppfatninger av den deriverte[18]. Hun har tatt utgangspunkt i Sfards (1991) teori om dikotomien ved det matematiske begrepet. Gjennom å sette sammen de involverte begrepenes strukturelle og operasjonelle aspekt og forskjellige representasjoner kom hun fram til et rammeverk i tabellform. Min omarbeiding av Zandiehs rammeverk, hvor jeg har hensyn til Sfards

18 Zandiehs klassifisering er basert på et konstruktivistisk fundament og ikke ment som et utgangspunkt for en læringsbane: The framework is not meant to explain how or why students learn as they do, nor to predict a learning trajectory. Rather the framework is a “map of the territory,” (Zandieh, 2000, s. 103). Den lokale instruksjonsteorien er bare inspirert av rammeverket.

videreutvikling av sin opprinnelige teorien (Sfard, 2008), danner basis for antakelsene om objektifiseringsrekkefølgen i den lokale instruksjonsteorien.

Zandiehs tabell for kategorisering av derivasjonsforståelse har representasjonene eller kontekstene som kolonner. For hver kolonne identifiserer hun tre lag: rate, grense og funksjon. I hvert lag er det et matematisk begrep som krever en objektifisering, fra operasjonelt til strukturelt (Sfard, 1991), før neste lag kan bli nådd.

Min tillemping til en strukturert analyse av de diskursive prosessene for bruk i den lokale instruksjonsteorien består i å betrakte objektifiseringen innafor et diskursivt perspektiv og identifisere de involverte diskursive objekter.



Figur 4.3: Diskurser og objekter

Når valget mitt for den lokale instruksjonsteorien falt på den grafiske, symbolske, verbale, numeriske[19] og den fysiske diskursen skyldes det at de er typiske i skolematematikken.

I den grafiske diskursen er den deriverte et tingliggjort diskursivt objekt som innkapsler alle stigningene til alle tangentene. En individualisering av den deriverte i den grafiske diskursen skjer som deltaker i en diskurs hvor stigningen til tangenten opptrer i tre forskjellige lag. Hvert lag starter med en prosess og ender med et diskursivt objekt. Som rate møter eleven en grafisk framstilling av raten som helningsvinkel til ei linje i et koordinatsystem. Grenselaget ender med objektet grafisk punktderivert, som gir stigningen i et punkt. Grenseprosessen vil enten være å se på hva som skjer med helningsvinkelen ved en overgang fra sekant til tangent eller en innzoomingsprosess som ender i en lokal linearisasjon. Funksjonsobjektet individualisert gjennom innkapsling av alle punktderiverte utgjør den deriverte i den grafiske diskursen.

Tilsvarende forløp finner vi i de andre diskursene. Holder vi oss til fart som eksempel, må vi først regne ut raten utgjort av forandringen av avstand i forhold til tid. En objektifisering av prosessen er gjennomsnittlig fart. Grenseprosessen består i å se på den gjennomsnittlige farten over kortere og kortere tidsintervaller, for å ende opp med det momentane fartsobjektet ved et bestemt tidspunkt. I funksjonslaget er målet objektifisering av en funksjon med farten som funksjonsverdi.

19 Zandieh har utelatt den numeriske konteksten. En numerisk representasjon kan betraktes som implisitt i de andre. Kendal og Stacey (2003) vektlegger, i tillegg til den grafiske og symbolske representasjonen, den numeriske. Når jeg velger å eksplisitt inkludere den numeriske er det fordi den numeriske realiseringen blir så tydelig for elevene.

Den symbolske diskursen følger samme diskursive prosess. Den symbolske definisjonen av den deriverte, $f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, inneholder alle de tre diskursive prosessene hvor rate-, grense- og funksjonsobjektet må objektifiseres. Raten, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, må objektifiseres etter operasjonelle handlinger. Grensen innledes operasjonelt ved grensebetraktninger og bør ende med et grenseobjekt. Funksjonen består igjen av en objektifisering med innkapsling av alle punktderiverte. I de andre, vertikalt framstilt i figur 4.3, diskursene kan vi identifisere samme forløp.

Rate-, grense- og funksjonsobjektet er diskursive objekt på tvers av de vertikale diskursene. Et rikt rateobjektet må kapsle inn alle ratene fra de forskjellige diskursene. Det samme gjelder grenseobjektet og funksjonsobjektet.

Et rikest mulig derivertobjekt omfatter fullstendig tingliggjorte objekt i alle de vertikale diskursene i figuren. I tillegg må rate, grense og funksjon objektifiseres med realisasjonstrær i hver av diskursene. Forutsetningen om at objektifiseringen må struktureres gjennom rate, grense og funksjon er er et viktig grunnlag i den lokale instruksjonsteorien.

Tangentobjektet som diskursiv rot

Tall bruker uttrykket kognitiv rot for begrepsdannelsens grunnlag og argumenterer for at den kognitive rota til den deriverte er tangenten (Tall, 1989, 2003). Tall grunngir valget av tangenten som rot med at tangentbegrepet er en meningsfull introduksjon for elevene samtidig som tangenten gir utvidelsesmuligheter videre. I den lokale instruksjonsteorien velger jeg tangenten som en diskursiv «rot». Utgangspunktet blir å undersøke og sikre at elevenes realisering av tangenten kan utvides gjennom undervisningen og at tangentens egenskaper, som helling og stigningstall, kan objektifiseres som et rateobjekt.

Tangenten fra en geometrisk til en grafisk diskurs

Hos de gamle grekerne i antikken ble tangenten definert som ei linje gjennom ett eneste punkt på en sirkel. Det er denne definisjonen vi skal se en del elever har med seg fra ungdomsskolen. Grekernes geometri finner vi bevart i Euklids bøker. Euklid definerer det vi i dag kaller en tangent i sin tredje bok. I definisjon 2 skriver han, i Heaths oversettelse: «A straight line is said to touch a circle which, meeting the circle and being produced, does not cut the circle» (Heath, 2002, s. 51). Etter å ha presentert denne definisjonen viser han i proposisjon 16 både hvordan vi kan konstruere en sirkeltangent som normalen til diameteren:

> The straight line drawn at right angles to the diameter of a circle from its extremity will fall outside the circle, and into the space between the straight line and the circumference another straight line cannot be interposed. (Heath, 2002, s. 63)

I korollaret til denne proposisjonen er det vi finner Euklids bemerking om at denne linja «touches the circle» (Heath, 2002, s. 64). I tillegg til å definere tangenten som ei linje gjennom ett punkt på sirkelen er det interessant å merke seg Euklids forestilling om å kunne zoome seg inn for å vise at det ikke kan være noen andre linjer i mellomrommet.

Definisjonen var mer ment for anvendelse enn som rigorøs og uangripelig. Både Arkimedes[20], som arbeidet med spiraler og Appolonius[21], med kjeglesnitt, fant metoder for å konstruere tangenter (Katz, 1998). Begge baserte seg på forståelsen fra Euklid om tangentlinjen som ei linje som «touches, but does not cut» kurven.

Det er erfaringer basert på denne definisjonen elevene kan møte i geometridiskursen i grunnskolen. Ingen av kompetansemålene i læreplanen for matematikk i grunnskolen nevner tangenter eksplisitt. Når konstruksjon av tangenter til en sirkel er en ferdighet hos elever etter 10. årstrinn (se kapittel 5) er det fordi det tas opp under et av målene for geometrikompetanse i læreplanen. Her står det at målet for opplæringa er at eleven skal kunne «utføre og grunngje geometriske konstruksjonar og avbildingar med passar og linjal og andre hjelpemiddel» (Kunnskapsdepartementet, 2010). Vinner (1991) har observert at erfaringene fra det første møtet med tangenter som sirkeltangenter gir elevene nettopp denne oppfatningen av tangenten som ei linje som går bare gjennom ett punkt og ikke krysser grafen og at dette skaper en konflikt i nye situasjoner. Det kan føre til en oppfatning om at tangenter bare kan tegnes på sirkelforma kurver og utfordre individualiseringen av tangenten som diskursivt objekt gjennom sammenlikning.

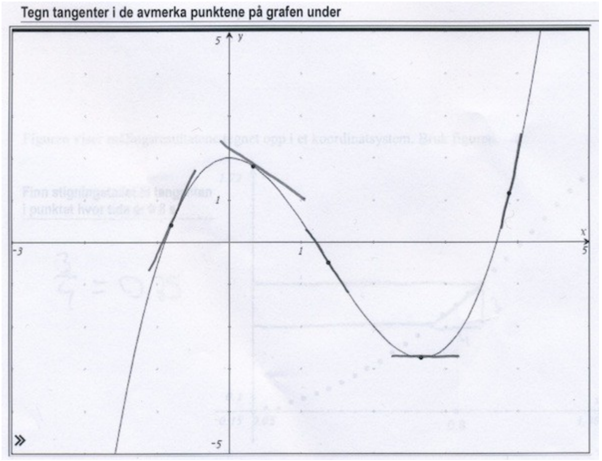
Tangenten bestemt av grensebetraktninger av sekanten kom først med Torricelli på 1600-tallet (Boyer, 1959). Sjøl om ikke Torricelli uttalte dette direkte, men baserer bevisene sine på en statisk definisjon, ligger dette implisitt i arbeidet hans. På omtrent samme tid fant både Fermat og Descartes metoder for å finne tangenter basert på en sekantbetraktning (Katz, 1998). I forhold til den antikke statiske geometriens forståelse ble nå tangenten basert på en dynamisk betraktning av sekanter over stadig kortere kurvesegmenter. Dette er en tankegang vi ønsker at våre elever skal følge. I den matematiske diskursen er det verd å merke seg at utviklinga tok minst to tusen år.

Tangentobjektet i forundersøkelsen

Grunnlaget for å velge tangenten som en diskursiv rot ble lagt i forundersøkelsen. Det ble undersøkt hvor godt elevene kunne framstille visuelle realisasjoner av tangenter i en grafisk diskurs. I oppgaven (se vedlegg 1) hvor elevene skulle tegne en tangent i et punkt til en sirkel hadde alle deltakerne, med unntak av to, levert tangenttegninger som tyder på at de kan visualisere sirkeltangenter. De skulle også tegne tangenter på

20 Arkimedes (287 – 212 f. Kr.)
21 Appolonius (250 – 175 f. Kr)

grafen til en funksjon. Med unntak av de to som hadde problemer med sirkeltangenten, var de typiske tangentene tegnet omtrent som eksemplet i figur 4.4.



Figur 4.4: Typiske tangenter i forundersøkelsen

De to som ikke tegnet sirkeltangenten hadde begge tegnet sekanter mellom punktene.

Det ser ut til at den visuelle realisasjonen av tangentobjektet er individualisert hos majoriteten av elevene i forundersøkelsen.

Antakelser for en lokal instruksjonsteori for tangenten

Møtet med tangenten har tradisjonelt skjedd i en geometrisk diskurs som sirkeltangenter. I denne diskursen er tangentobjektets realisering ei linje som konstrueres slik at den treffer sirkelen i bare ett punkt. En slik erfaring fra sirkelgeometrien introduserer en oppfatning om at tangenten bare berører ett punkt og ikke vil krysse grafen i andre punkt (Biza, 2007; Tall, 1987; Vinner, 1991) og vil som ledende realisasjon føre til kommognitive konflikter.

Sirkeltangenten vil ikke uttrykke funksjonsveksten i en grafisk diskurs. Ved at en tangent kan skjære grafen til funksjonen i flere punkter vil et tangentobjekt som ikke er utvida til en grafisk diskurs ende med en kommognitiv konflikt. Det kan hindre at tangenten realiserer en momentan vekst. Elevenes tangentoppfatning må undersøkes og undervisningens målsetting må være å etablere tangenten som en del av grafen.

Tangenten defineres matematisk ut fra den deriverte funksjonen, målet for designeksperimentet. En definisjon faller derfor utafor en mulig oppstart.

Grenseobjektet

I læreboka (Oldervoll et al., 2009, s. 212), som alle elevene i undersøkelsene har brukt, blir den deriverte definert slik:

> Den deriverte til en funksjon f for x = a er gitt ved

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Det skjer etter at grenseverdien kort forklares ved et eksempel der det vises, ved innsetting av verdier nær null, at grenseverdien $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$ blir 2. Det forklares at «grenseverdien er 2, betyr at vi kan få f(x) så nær 2 vi vil, bare ved å velge x nær nok 0» (Oldervoll et al., 2009, s. 208)

I definisjonen av den deriverte er grenseverdien sentral og krever en objektifisering. Slik grenseverdien introduseres i læreboka er en objektifisering problematisk. «Vi nærmer oss» et eller annet, men kommer ikke helt til målet. Læreboka innbyr til et grensebegrep som ikke kan realiseres som en verdi, bare som en tilnærming (Cornu, 1991) og bruker metaforer som kan virke forvirrende for elevene (Monaghan, 1991). Den lokale instruksjonsteorien må utformes som et alternativ til en slik introduksjon.

Grenseverdibegrepet er problematisk og en fullstendig utviklet forståelse viser seg krevende (Juter, 2006). En tingliggjøring av grenseverdien, fra prosess til objekt, til et diskursivt objekt er en utfordring. Ser vi tilbake i historien ser vi det samme.

Utfyllingsmetoden (se Euklid P. X-1) vi finner i antikken bærer preg av grenseprosesser. Det er som argumentasjonsmetode for geometriske bevis metoden tas i bruk og det er ideen om gjentatte iterasjoner, med tilnærminger mot en verdi, vi kan se som et opphav til det moderne grenseverdibegrepet (Boyer, 1959; Katz, 1998). Problematikken ble aktualisert i den analytiske geometrien og ønsket om å finne et uttrykk for tangenten. Både Fermat og Descartes måtte bruke grenseprosesser i sine utledninger. I Fermats metode for å bestemme tangenten til en kurve brukte han en infinitesimal, en størrelse som er svært liten og alltid kan velges mindre, en tankegang som ikke er ulik den vi finner i antikkens utfyllingsmetode. Til slutt overser han denne verdien siden den er blitt så liten, ikke ulikt det vi kan se matematikkelever gjøre i dag.

Newton introduserte, i 1671, størrelsen o i sin teori:

> We may therefore here aptly introduce the Symbol o, not to stand for absolute nothing, as in Arithmetick, but a vanishing Space or Quantity, which was just now finite, but by continually decreasing, in order presently to terminate in mere nothing, is now become less than any assignable Quantity. (Newton, 1737, p. 253)

Akkurat som Fermat overser Newton en objektifisering av grensebegrepet: En forsvinnende størrelse som ender opp i ingenting, en verdi han overser i de videre kalkulasjonene sine. Først seinere skulle Newton problematisere størrelsene sine og bidra til grenseverdiens utvikling. Når han nærmet seg temaet i Principia i 1687 tok han tidlig i boka med et eget lemma og kom med et forsvar som minner om vår definisjon av grenseverdier.

> LEMMA I. Quantities, and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and before the end of that time approach nearer the one to the

> other than by any given difference, become ultimately equal. (Newton, 1995, p. 31)

Boyer skriver at Newton kom ikke helt fram til et konsekvent grensebegrep fordi «Newton's view of a limit, like that of these earlier worker, was bound up with geometric intuitions which led him to vague and ambiguous statements» (Boyer, 1959, s. 197). Newton befant seg i den geometriske diskursen uten å ha tingliggjort objektet grenseverdi.

Også Leibniz prøvde å rettferdiggjøre utledningene sine ved å forklare at all bruk av infinitesimalene kunne grunngis ut fra de samme prinsipper som vi finner i utfyllingsmetoden hos Arkimedes og også å argumentere ut fra kontinuitet. «If any continuous transition is proposed terminating in a certain limit, then it is possible to form a general reasoning, which covers also the final limit» (Katz, 1998, s. 531). Vi vil nok si at han da blander premiss og argument med vår kontinuitetsoppfatning tuftet på nettopp grensebegrepet. Den som til slutt skulle komme med den endelige definisjonen var Cauchy (Cauchy, 1821). Hans grenseverdi *er* den verdien vi kan få en variabel så nær vi ønsker ved å sette inn påfølgende verdier. Cauchy gir en objektifisert beskrivelse.

Først i 1854 kommer en stringent definisjon av grenseverdien. Da lanserte Weierstrass symbolbruken når han skrev: « $\lim_{u \to 0} f$ » (Cajori, 1993, s. 256) og ga oss den eksplisitte definisjonen med ε og δ: Gitt $\varepsilon > 0$. Da fins $\delta > 0$ slik at dersom $0 < | x-a | < \delta$, så vil $0 < | f(x) - L | < \varepsilon$. Med symbolbruken til Weierstrass, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, og grenseverdien *er* verdien *L*.

Vi ser samme utviklinga som for funksjonsbegrepet. Fra antikken og til Cauchy på 1800-tallet. Det tok flere hundre år med prosessoppfatninger, gjennom flere diskurser, før vi kom fram til det diskursive objektet «grenseverdi». Bare fra Newton og Leibniz tid og analysens fundamentalteoremet, som sier at derivasjon og integrasjon er inverse operasjoner, gikk det 200 år fram til grenseverdien fikk den endelige definisjonen.

Den deriverte som grenseverdi i forundersøkelsen

Elevene fikk i oppgave å forklare uttrykket $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Så mange som elleve av de nitten svarte ikke på denne oppgaven.

Ingen av elevene viser en fullstendig individualisering av den deriverte i den symbolske diskursen. Bare tre av utsagnene har jeg kategorisert som aksepterte. Alle tre forklarer uttrykket ved stigningstallet til tangenten, et eksempel er:

1. HL: Stigningstallet til tangenten i et punkt. Uttrykket kommer fra endringen av y = Δy dividert med endringen av x = Δx. Sånn finner vi stigningstall og Δy = f(x+h)-f(x) og Δx = h

For HL visualiserer figuren et realisasjonstre som omfatter både det grafiske og det symbolske rateobjektet og han kobler stigningstallet til tangenten til den symbolske raten. Stigningstallet til tangenten er den momentane raten, *f´(x)*, og ikke raten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, men som en av tre gir han en tolkning av den symbolske definisjonen til den deriverte i den grafiske diskursen.

JK skriver denne forklaringen:

2. JK: Den deriverte er lik grenseverdien til $\frac{y_2 - y_1}{\Delta x}$, eller for å si det på en annen måte. Stigningstallet til tangenten *l*. Stigningstallet eller $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

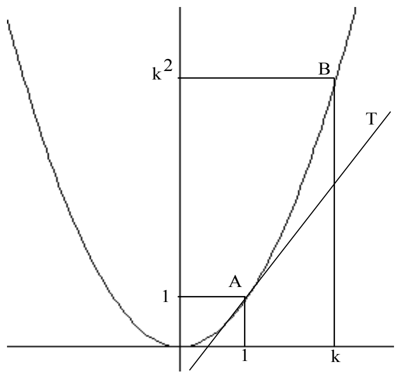
Figuren i oppgaven inneholder ikke verken y_2, y_1, x_2 eller x_1. JK har merket av y_2, y_1, så det er grunn til å tro at han benytter de andre symbolene korrekt. På figuren har tangenten fått navnet *l*. JK har som den eneste benyttet begrepet grenseverdi, men uten tilleggsopplysninger om grensen.

Den tredje ytringen benytter seg av en annen metafor:

3. JØ: Stigningstallet til tangenten til to uendelig nærme punkt

Sekantbegrepet hadde vært bedre egna i denne ytringen, men den visuelle realisasjonen han bygger ytringen på er basert på en grafisk metafor om to punkt som ligger svært nær hverandre.

Overgangen mellom den grafiske og den symbolske diskursen er krevende. Tall (1985) utførte en undersøkelse hvor han tok utgangspunkt i figuren over og ga denne oppgaven:



Figur 4.5: Fra Tall (1985)

On the graph $y = x^2$, the point A is *(1,1)*, the point B is (k,k^2) and T is a point on the tangent to the graph at A.
(i) Write down the gradient of the straight line through A,B...
(ii) Write down the gradient of AT... Explain how you might find the gradient of AT from first principles

Etter å ha testet «several hundred» studenter er fasiten: «To date no-one who has studied the calculus has offered a 'limiting' argument for the gradient of the tangent»

(Tall, 1985, s. 49) Orton (1983) viser også at elevene har problemer med å se for seg sekanten «gå over» til å bli en tangent. Definisjonen av den deriverte er knyttet til en slik grensebetraktning. Det vanskeliggjør en forklaring av den formelle definisjonen.

Zandieh (1998) viser at flertallet av de undersøkte studentene ikke greier å formulere definisjonen av den deriverte og at de som greier det har pugget definisjonen uten å kunne gi en forklaring. I en undersøkelse fant Vinner (1992) at bare 6 % kunne gi en akseptert forklaring på den deriverte. Hele 23 % refererer til prosessen det er å finne den deriverte.

Antakelser for en lokal instruksjonsteori

Svært mange studier viser hvor vanskelig grenseprosessen og grenseobjektet er for elever (Cornu, 1991; Cottrill, Vidakovic, Dubinsky, Schwingendorf, & Thomas, 1996; Juter, 2006; Orton, 1983; Tall, 1992; Tall & Vinner, 1981).

Artigue (1991, 2000) og Tall (1986, 1992) anbefaler å unngå for mye fokus på den formelle definisjonen av grenseverdien ved introduksjonen av den deriverte. En alternativ tilnærming til grenseobjektet velges i den lokale instruksjonsteorien. Utenom den symbolske diskursen finner vi grenseprosesser i overgangene fra gjennomsnittlig vekst til momentan vekst, sekantens tilnærming til tangenten (Asiala et al., 1997), gjennomsnittlig fart til momentan fart (Doorman, 2005) og ved lokal linearitet (Tall, 2003). Samuels viser til en enighet om «a growing body of research suggest that local linearity, not limits is the appropriate way to introduce the derivative» (Samuels, 2010, s. 15). Lokal linearitet velges som overgang til grenseobjektet ut fra problemer med den formelle grenseverdien og problemer med overgangen fra sekanten til tangenten (se tidligere). Tall (2003) argumenterer også for at lokal linearitet er et godt utgangspunkt for undervisningen.

Målet er å knytte tangenten til funksjonens momentane endringsrate[22]. En overgang vil støttes av IKT ved en dynamisk innzooming og figurer som mediatorer. Biza (Biza, 2007, 2008; Biza, Diakoumopoulos, & Souyoul, 2007) viser til utilsikta effekter som kan oppstå. Det vil jeg søke å unngå ved å kontrollere prosessen gjennom mikrosykluser. Tester som kan avsløre svakheter kan benyttes til å justere undervisningen underveis. Gray og Tall (2001) viser også til at det er lurt å bruke gester som å flytte handa bortover en graf for å etterlikne tangenter. En slik perseptuell aktivitet bør inngå i tillegg til datamaskinbruk.

Funksjonsobjektet

Undervisningseksperimentet både starter og ender med den matematiske funksjonen. Den deriverte er et verktøy i funksjonsdrøftingen. Analysen av en funksjon skjer, på

22 Endringsrate, vekstfart og veksthastighet benyttes synonymt i oppgaven.

den måten, med en ny funksjon som forteller den momentane endringsraten. Elevens individualisering av funksjonsobjektet er helt avgjørende gjennom hele undervisningsdesignet. En tingliggjøring av funksjonen er krevende for elevene og det utgjør en utfordring. Objektifiseringen av funksjonen er en utfordring som gjenfinnes i historien.

Tingliggjøring i historisk utvikling

Sfard oppsummerer funksjonsbegrepets utvikling med at «the function´s turbulent biography can be viewed as a three-centuries long struggle for reification» (Sfard, 1992, s. 62). På de tre hundre årene har funksjonsdefinisjonen gått fra et prosessorientert analytisk uttrykk til det tingliggjorte objektet i definisjonen til Dirichlet-Bourbaki, en definisjon som benyttes i moderne matematikk (bl. a. Lindstrøm, 1995, s. 216; Skvarcius & Robinson, 1986, s. 104; Stoll, 1979, s. 34)

> En funksjon fra en mengde A til en mengde B er en relasjon F som tilfredsstiller to betingelser.
>
> 1. For alle $x \in A$, eksisterer det $y \in B$ slik at $(x, y) \in F$
> 2. For alle $x \in A, y \in B, (x, y) \in F \; og (x, z) \in F \Rightarrow y = z$

Utgangspunktet for «the struggle for reification» finner vi i begynnelsen på 1700-tallet. Euler var «the first mathematician to give prominence to the function concept and to make a systematic study and classification of all the elementary functions» (Boyer, 1959, s. 243). Det var i boka Introductio in Analysin Infinitorum fra 1748 han definerte funksjonen slik: «A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities» (Katz, 1998, s. 567).

Funksjonsbegrepet ble definert som et analytisk uttrykk, en handling eller prosess. Funksjonen, i Eulers definisjon, er et algebraisk uttrykk. Et uttrykk som han skriver kan være hva som helst. Når Euler kom med sin definisjon i 1748 hadde allerede hans lærer Johan Bernoulli definert funksjonen i 1718 som «a variable quantity composed in any manner whatever of this variable and of constants» (Sfard, 2008, s. 17). Euler omformulerte definisjonen sin noe seinere, i 1755, hvor han skrev: «A quantity should be called a function only if it depends on another quantity in such a way that if the latter is changed, the former undergoes change itself». Han endte dermed opp med en eksplisitt operasjonell definisjon. (Sfard, 1992, s. 63). Lagranges bidrag baserer seg på Eulers første definisjon, men presiserer hva som ligger i det analytiske uttrykket:

> One names a function of one or several quantities any mathematical expression in which the quantities enter in any manner whatever, connected or not with other quantities which one regards as having given and constant values, whereas the quantities of the function may take any possible values (Katz, 1998, s. 587).

I definisjonen legger vi merke til at fortsatt er funksjonen satt lik et uttrykk og med det en prosess. Cauchy var den som dreide definisjonen over mot en verdi og som gir en definisjon av funksjonen ut over det å være et analytisk uttrykk (Cauchy, 1821). Funksjonen defineres, av Cauchy, som den størrelsen som avhenger av den uavhengige variabelen og kalles funksjonen av den uavhengige variabelen.

Fra definisjonen i 1718 og til Cauchy i 1821 har det gått over hundre år. Et hundre år hvor utviklinga gikk fra en direkte ekvivalens mellom funksjonen og det analytiske uttrykket og til funksjonen som et eget objekt, en verdi, en størrelse.

Tosidigheten ved funksjonen var langt fra over med nye definisjoner. Dualiteten skapte, og skaper, forvirring etter hva en vektlegger. Frege kommenterte denne forvirringen i 1904 i artikkelen Was ist eine Funktion

> Welche Bedeutung das Wort „Funktion" in der Analysis habe, ist noch nicht über jeden Zweifel erhaben, obwohl es seit langer Zeit in häufigem Gebrauche steht. In den Erklärungen finden wir zwei Ausdrücke immer wiederkehrend, teils miteinander verbunden, teils einzeln, den des Rechnungsausdrucks und den der Veränderlichen. Auch bemerken wir einen schwankenden Sprachgebrauch, indem bald das, was die Art der Abhängigkeit bestimmt oder vielleicht die Art der Abhängigkeit selbst, bald die abhängig Veränderliche Funktion (Frege, 1904, s. 107)

Statusrapport fra 1904 er klar. Funksjonsbegrepet beveger seg mellom det å være en prosess og et eget objekt i det matematiske fellesskapet, en parallell til hva som skjer hos elever av i dag.

Objektifisering hos elevene i forundersøkelsen

Elevene ble bedt om å skrive ned et svar på spørsmålet om hva en funksjon er. I alt nitten svar ble samlet inn. Av de nitten var det bare én ytring som inneholdt en eksplisitt sammenheng mellom to størrelser:

4. IN: En funksjon er en sammenheng mellom x og y?

Når IN skriver at funksjonen *er* en sammenheng er det et tegn på en objektifisering og et individualisert diskursivt objekt som er tingliggjort. Et spørsmålstegn til slutt uttrykker usikkerhet enten om eget svar eller, aller helst, til forventningene til spørsmålsstilleren. I forklaringen knytter hun funksjonen til de to symbolene som brukes hyppigst i likningsdiskursen og funksjonsdiskursen, x og y.

De andre elevenes svar viser funksjonen som et primært objekt. Svarene deler seg i to kategorier etter hvilke realisasjoner de spontant knytter til funksjonsbegrepet. I svarene henspeiler ordbruken på enten det algebraiske uttrykket eller grafen til funksjonen. Noen av elevene tar med begge eller blander de to sammen, men det karakteristiske er henvisningen til en av de konkrete visuelle realisasjonene. Karakteristisk er det også at flere bruker ordet likning synonymt med funksjon. Forskjellene mellom likning, uttrykk, formel, funksjonsuttrykk, funksjonsforskrift og funksjon er ikke enkle å skille for elevene.

Blant elevenes svar finnes det ikke informasjon som tyder på at noen av elevene har individualisert en fullstendig tingliggjøring av funksjonsobjektet. Det umuliggjør en tingliggjøring av funksjonen den deriverte. En objektifisert form av funksjonsobjektet er påkrevd for å kunne individualisere et tingliggjort derivertobjekt.

Symbolet f(x)

I et annet spørsmål skal elevene gi en tolking av symbolet *f(2)*. Til hjelp har elevene en grafisk framstilling av funksjonen (se vedlegg 1). Svarene forsterker inntrykket av funksjonen som en prosess. Svaret til HÅ er typisk:

5. HÅ: vi skal løse funksjonen gitt ved 2

Alle er tydelige på at betegneren *f(2)* betegner en handling. HÅ var en av dem som skrev at funksjonen var ei likning. Nå betegner «*f(2)*» det «å løse funksjonen gitt ved 2». «Gitt ved» er en frasedrevet diskursiv handling hentet fra skolematematikken hvor oppgavene tradisjonelt starter med «gitt en funksjon...» for så å beskrive funksjonsuttrykket.

Symbolet *f(x)* og hvordan det betegner en prosess for elevene gikk igjen i flere av oppgavesvarene i forundersøkelsen. Resultatene vil belyses lenger ut i kapittelet.

Ytringene i besvarelsene viser at alle elevene ser *f(2)* som en betegner for en prosess og ikke et objekt. Halvparten av elevene finner fram til funksjonsverdien sjøl om de ikke har det algebraiske uttrykket til å hjelpe seg. Det er verd å merke seg at dette gjelder elever i det meste teoretiske matematikkurset i den videregående skolen.

Antakelser for en lokal instruksjonsteori

Den deriverte er en funksjon og en tingliggjøring av den deriverte er avhengig av funksjonsobjektet. I denne forundersøkelsen finner en igjen det samme som tidligere forskning har vist. Elevdefinisjonene av funksjonen viser, med vektlegginga av det algebraiske uttrykket og manglende krav til entydighet, en parallell til den historiske utviklinga. Det er noe tidligere forsking også viser (Ely, 2007; Sfard, 1991, 1992; Sierpinska, 1992). Ytringene om funksjonen viser også at det operasjonelle aspektet ved funksjonen er det framtredende og at en objektifisering, i stor grad, ikke har funnet sted. Realisasjonen, enten i form av funksjonsgrafen eller det algebraiske uttrykket, er en ledende realisasjon. Elevenes realisering av funksjonen som lineær viser at andre typer funksjoner bør vektlegges i undervisningen. I utviklingen av en HLB må elevene presenteres for en diskursiv praksis med et mangfold av realisasjoner av funksjonsobjektet. HLB må også vektlegge overgangene mellom realisasjonene slik at sammenlikningsprosessen kan støttes.

Et annet problem er betegnere av typen *f(2)*. Forundersøkelsen viser at symbolet knyttes til en utregning og ikke et objekt i den grafiske diskursen. Det stemmer overens med tidligere funn (Asiala et al., 1997; Habre & Abboud, 2006; Tall, 1992).

Det må utvikles en HLB som kan få elevene til å realisere symbolet.

Endringsraten må objektifiseres

Gjennomsnittlig endringsrate

I forundersøkelsen ble det gjort undersøkelser av elevenes objektifisering av endringsraten. Oppgaven var knyttet til et tilfelle der en ball triller ned et skråplan (se vedlegg s. 126). Ved å slippe ballen og måle avstanden med en avstandsmåler knyttet til ei datamaskin fikk vi en samling data med avstand etter tid. Tidsintervallene for avstandsmålingene ble satt til 0.1 sekunder. Elevene skulle finne ut gjennomsnittsfarten til ballen mellom 0.6 og 0.8 s. For å løse oppgaven hadde de en tabell med alle målingene tilgjengelig. Tabellen inneholdt kolonnene tid og avstand og kunne benyttes til å finne at etter 0.6 s hadde ballen trillet 0.4738 m og etter 0.8 s hadde den trillet 0.7517 m. Utregningen av gjennomsnittsfarten skulle bli: $\frac{0.7517-0.4738}{0.8-0.6}\approx 1.39\frac{m}{s}$. Bare fem av elevene kom fram til dette svaret, mens sju hadde gjort oppgaven slik: $\frac{0.4738+0.6098+0.7517}{3}=0.6117$. Flertallet, fjorten R1-elever, finner ikke gjennomsnittsfarten.

Doorman viser til samme funn i studien sin:

> Another issue of confusion is in the formalisation of average velocity. The quotient $\Delta s/\Delta t$ is related to calculating average velocity, while student in mathematics classes learn to calculate an average by adding values of one quantity and dividing by the number of these values. (Doorman, 2005, s. 17)

Nå er det grunn til å tro at elevene, på dette nivået, vet forskjell på avstand og fart. Allikevel velger de å finne gjennomsnittet av avstandene de finner i tabellen. Når det skjer kan det forklares med behovet for å fullføre oppgaven uten å vite hvordan det bør skje. En rituell handling. Ordet «gjennomsnitt» er en prosessbetegner og prosessen er å legge sammen verdier for så å dele på antallet. I den fysiske diskursen, som oppgaveteksten bygger på, er gjennomsnittsfarten forandringen av avstand i løpet av et tidsintervall. Beregningen av verdien til gjennomsnittsfarten skiller seg fra tidligere beregninger av gjennomsnitt.

Fart

Når neste spørsmål var å finne farten etter 0.8 s, var det et forsøk på å finne ut om det i elevenes realisasjoner kunne knyttes en sammenheng til en grenseprosess med de verdiene de hadde til rådighet. En mulig tilnærming ville være å finne gjennomsnittsfarten i intervallene $[0.7\ ,\ 0.8]$ og $[0.8\ ,\ 0.9]$ og komme med en uttalelse basert på resultatene. Ingen av elevene valgte å gjøre det på denne måten, mens hele tretten fant gjennomsnittsfarten fra ballen ble sluppet til den hadde trillet i 0.8 s ved utregningen: $v=\frac{s}{t}=\frac{0.7517}{0.8}=0.9396\frac{m}{s}$.

I den påfølgende oppgaven skulle elevene angi stigningstallet til tangenten i punktet der $t = 0.8$. Oppgaven var ment for å se om elevene koblet tangentens stigningstall til farten de nettopp hadde regnet ut. Det ville bety en kobling mellom den grafiske diskursen og den fysiske ved et felles rate- og grenseobjekt.

Sjøl om de ikke hadde funnet gjennomsnittsfarten i forrige oppgave hadde to av elevene funnet en tilnærma gjennomsnittsfart ut fra stigningstallet til en tangent de hadde tegnet. Resultatet viser at rateobjektet ikke er objektifisert hos flertallet av elevene. Betegneren «gjennomsnittlig» utløser hos mange elever en rutine som er til hinder for objektifiseringen av raten. Overgangen mellom den grafiske og fysiske diskursen utfordres også av dette. Den diskursive overgangen krever en objektifisering gjennom en sammenlikning av endringsraten i de to diskursene. I utformingen av undervisningseksperimentet må det tas hensyn til dette.

Symbolbruk i endringsraten

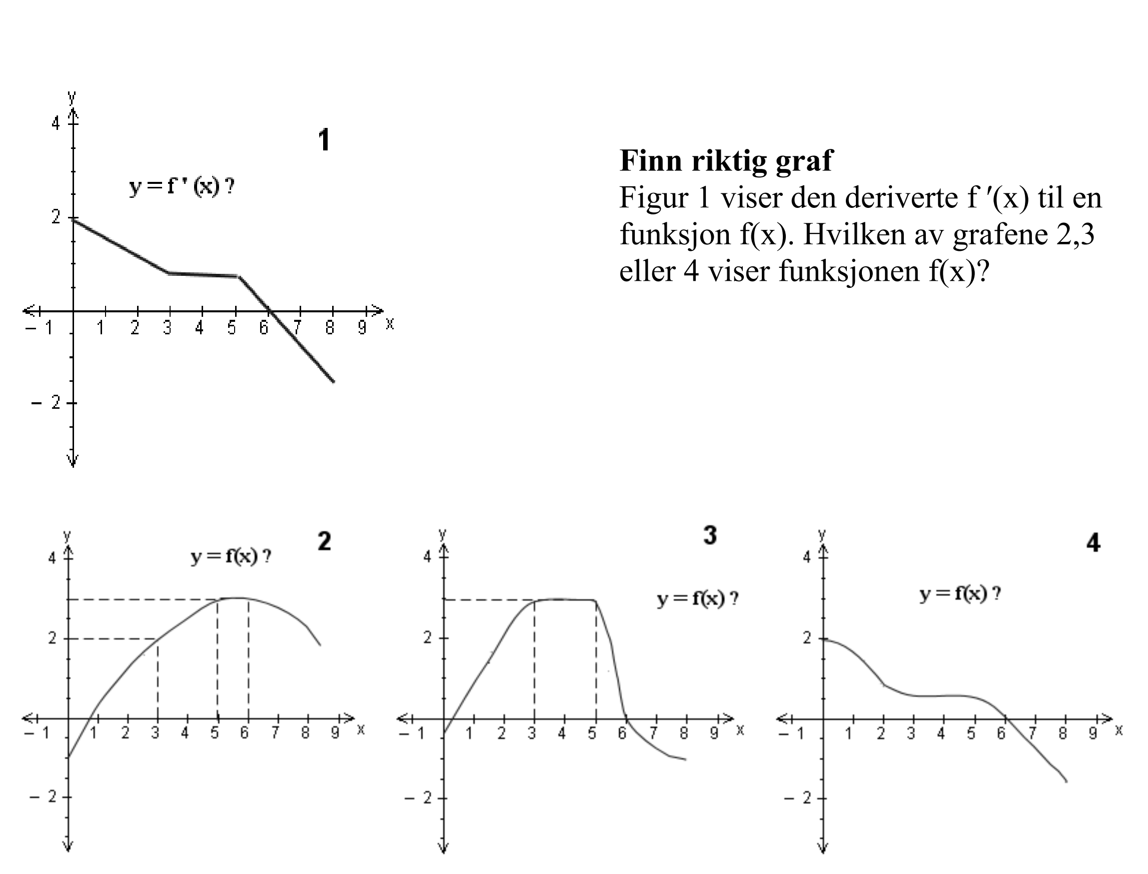
I symbolform definerer lærebøkene i 1T (Heir et al., 2009; Oldervoll et al., 2009) endringsraten som varianter av $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Når elevene ikke gjennomfører en numerisk beregning av det samme forholdet i en konkret kontekst, betegner ikke denne generelle skrivemåten en objektifisert endringsrate. Tidligere i kapittelet har jeg sett på betegneren *f(x)*. Flertallet av elevene i forundersøkelsen realiserer ikke betegneren. I tilfeller hvor *f(x)* betegner et objekt inneholder symbolet *f(a+h)* en ytterligere utfordring. Argumentverdien er i seg sjøl et objekt. Et eksempel er AJ, som fant *f(2)* grafisk og ved innsetting, når han stiller dette spørsmålet

6. AJ: Skal jeg gange inn f?

For AJ betegner *f(x)* en funksjonsverdi, men *f(a+h)* en multiplikasjon. Dette viser at en HLB må legge vekt på den semiotiske utfordringen ved symbolene. Å sørge for en symbolene betegner ønsket objekt er en nødvendighet. Aktiviteter som støtter en objektifisering og realiserer symbolet må utvikles.

Den deriverte i en grafisk diskurs

Framstillingen av den deriverte i en grafisk diskurs er en realisering i form av en graf. Funksjonsanalysen i lærebøker og til eksamen skjer ofte i den grafiske diskursen. En instruksjonsteori må vektlegge elevenes grafiske tolkingsferdigheter. Hvordan elevene tolket grafen til den deriverte ble prøvd i forundersøkelsen.



Figur 4.6: Fra forundersøkelsen (se vedlegg)

En av oppgavene elevene fikk besto i å finne sammenhengen mellom grafen til den deriverte og funksjonen den var den deriverte av. Etter å ha fått oppgitt grafen til *f ´(x)* hadde elevene tre grafer for *f(x)* å velge mellom[23].

Ni av de 19 elevene valgte figur 2. Sjøl om elevene ble bedt om å grunngi valgene sine hadde flere ikke grunngitt dette. Av elevene som forklarte valget var det typiske varianter av denne forklaringen:

7. RO: 2 – siden f´(x) er positiv helt x = 6 da er den negativ... når f´(x) er negativ synker f(x)...når f´(x) er positiv stiger f(x)

RO identifiserer hvor grafen til den deriverte ligger over og under x-aksen. For RO bestemmer fortegnet til den deriverte stigningsegenskapene til funksjonen. Dette baserer han sitt valg på. Vektleggingen av fortegnet eller om grafen ligger over eller under x-aksen er tilfellet blant flere av elevene. Siden dette er en egenskap som vektlegges i oppgavene i læreboka er ikke dette uventet.

EE har festet seg ved en annen egenskap. Den konstante funksjonsverdien til *f ´(x)* i intervallet <3,5> gjør at han velger figur 2.

23 Figurene og grafene er basert på en oppgave av Cornu gjengitt av Tall (1986)

8. EE: 2 – det er fordi den har lineær stigning mellom 3 og 6

Bare én av begrunnelsen ser ut til å bygge på en tolking som ikke er konsistent.

9. ÅL: 2 Når den deriverte synker, stiger grafen

Grafen i figur 2 viser negativ vekst for x-verdier over $x = 6$ og stiger følgelig ikke.

Av de andre alternativene som ble valgt, dominerer valget av figur 4. Fem av elevene har gjort det valget og argumentert ut fra likhet mellom funksjonsgrafen og grafen til den deriverte av funksjonen. Monk (1992) beskriver elevers tendens til å være overtolkende i oversettingen av den visuelle informasjonen som kan hentes ut fra en graf. Nemirovsky og Rubin (1992) viser også at studenter har problemer med å se sammenhengen mellom funksjonen og dens deriverte og at «students had the tendency to assume resemblances between the behavior or apperance of the function and its derivative» (Nemirovsky & Rubin, 1992, s. 1). Kaput (1987) viser elevers tendens til å lete etter likhet også ut over grafer. I en undersøkelse viser han hvordan formen på en bilbane knyttes til den grafiske framstillingen av fart og tid. Monk (1992) kaller dette en ikonisk translasjon. Det ikoniske ved det visuelle bildet bevares og brukes i den videre mediasjonen. Flere av elevene betrakter grafen til funksjonen f og grafen til $f´$ som avspeilinger av samme ikoner. Her er noen eksempler:

10. HI: 4 – De er «like»

11. HL: 4 stigningstallet er negativt og signaliserer at grafen går nedover dermed blir stigningstallet omtrent 0 som viser at grafen ikke endre y-verdi noe særlig. Så blir det enda kraftigere stigningstall som er negativt. -Tegner jeg tangenter på den stemmer det også!

12. JK: 4 – Graf 4 viser funksjonen f(x) fordi graf 1 har tegnet tangenter i ulike punkter for graf 4. Vi ser at vi kan finne stigningstallet i ulike punkter ved hjelp av tangentene.

13. MR: 4 – fordi fortegnsskjema til grafen 1 blir (tegning) hvor ---- betyr grafen går nedover. mellom 3 og 5 er grafen positiv/lik 0 og fortegnet blir positivt, etter 5 går grafen nedover og fortegnet blir negativt.

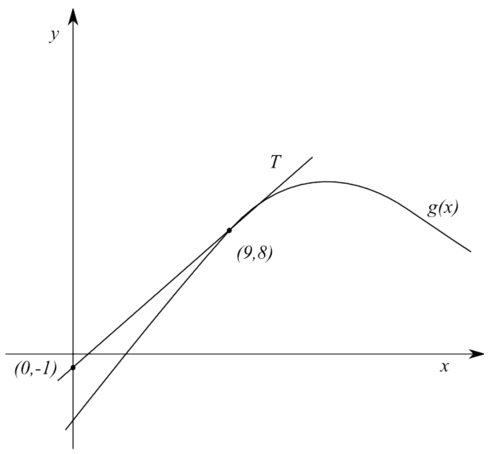
En ikoniske translasjonen skjer ofte i mangel av annen tolking hvor elevene føler seg forpliktet til å avgi et svar og ender med likhet som kriterium (Monk, 1992). Tilfellene viser at grafen ikke er en realisasjon av den deriverte. Et problem i den grafiske diskursen er at grafene til den deriverte og den opprinnelige funksjonen framstilles i samme koordinatsystem, men med forskjellig tolking av funksjonsverdiene. Funksjonsverdien til den deriverte funksjonen er den momentane endringsraten, mens den opprinnelige funksjonsverdien har en annen tolking. I koordinatsystemet er elevene vant til å framstille flere grafer som alle har tolking av funksjonsverdien. I en HLB må det utvikles aktiviteter som hjelper elevene i graftolkingen av den deriverte.

Objektifisering og overgangene

I den strukturelle framstillinga av den lokale instruksjonsteorien (4.3, s. 33) er det identifisert flere diskurser. Det må velges overganger mellom de diskursive objektene. Med tangenten som en diskursiv rot må tangentobjektet slås sammen med veksthastighet i et overordna rateobjekt. Neste steg vil være en grensebetraktning som knytter rateobjektet til grenseobjektet. Gjennom en innkapsling av alle grenseobjektene i et nytt funksjonsobjekt kan den deriverte individualiseres som et diskursivt objekt. Sekvensen inneholder mange sammenslåinger, overganger og objektifiseringer. Hver en av disse stiller store krav til deltakeren. En praktisk implementering av overgangene vil bli behandlet i de hypotetiske læringsbanene.

Grenseobjektet som et eksempel på overgangen mellom diskurser

Den lokale instruksjonsteorien hviler på en sammenslåing av flere diskurser. I den skjematiske framstillinga er det identifisert både horisontale og vertikale overganger. Ser vi på grenseobjektet som eksempel finner vi grensen benyttet i både den grafiske-, verbale-, fysiske-, numeriske- og symbolske diskursene. Ut fra instruksjonsteorien velger jeg å vektlegge grenseobjektet i en numerisk og grafisk diskurs. Overgangen mellom de to diskursene knyttes til tangentens stigning og den numeriske verdien for tangentens stigningstall. For å se på R1-elevenes grafiske tolking av den deriverte i et punkt, og hvordan de knyttet den grafiske diskursen med den numerisk, fikk de i oppgave å svare på spørsmålene under[24].



Anta at linja T er tangenten til grafen til funksjonen g(x) i punktet (9,8).

- Finn g(9). Husk en kort forklaring.
- Finn g'(9). Husk en kort forklaring.

Figur 4.7: Fra forundersøkelsen (se vedlegg)

Igjen blir elevene bedt om å realisere en betegner av typen *f(x)*. Denne gangen er det *g(9)* og i en grafisk kontekst. Det krever at både den symbolske, numeriske og grafiske

24 Fritt etter (Asiala et al., 1997)

realisasjonen av *g(9)* inngår. I tillegg må grafen til funksjonen *g* tolkes som en realisasjon av funksjonen. Flere av elevene mangler realisasjonen for betegneren *g(9)* og hele sju elever svarer ikke på spørsmålet. Bare fire av elevene ytrer seg på en måte som antyder en objektifisering, slik disse eksemplene viser:

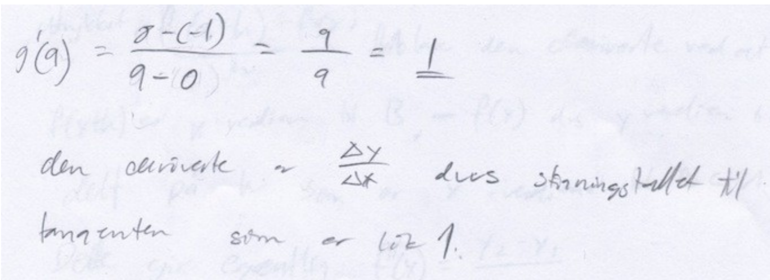
14. MR: g(9) = 8 når grafen er uttrykt ved x = 9 blir y lik 8 (fordi punktet er 9,8)

15. HE: g(9) = 8 fordi i punkt (9,8) er 9 xen og 8 yen. Når vi skal finne g(9), skal vi finne y når x er 9 -altså 8

SZ kan være eksempel på de av elevene som ikke greide overgangen mellom den numeriske og grafiske diskursen. Hun fant ikke *g(9)* fordi hun manglet uttrykket for funksjonen:

16. SZ: g(9) = ... må ha en formel, regner videre med formelen, deretter skal man få svaret g(9)

Når neste oppgave var å finne *g´(9)*, var det et forsøk på å undersøke i hvor stor grad elevene kunne tolke symbolet *g´(9)* som stigningstallet til tangenten i punktet hvor $x = 9$. Den grafiske realisasjonen av det diskursive objektet den deriverte bør inneholde en innkapsling av alle stigningstallene til tangentene. Seks av elevene skrev ned svar og bare ett av svarene var at *g´(9) = 1*. MR:



Figur 4.8: MR: Oppgavesvar

Svaret, *g´(9)=1*, er korrekt, men ytringen som kommer i etterkant bærer preg av å være frasedrevet.

Forundersøkelsen viser at overgangen fra den grafiske figuren til den deriverte som stigningstallet var krevende for elevene. Igjen viser det seg at symbolbruk på formen *g(9)* betegner en prosess hvor 9 settes inn i en formel og uttrykket kalkuleres (se f.eks. ytring 16. hos SZ). Tilsvarende funn er gjort i andre undersøkelser (Asiala et al., 1997; Sfard, 1991). Elevene viser også en manglende objektifisering av den punktderiverte som grenseobjekt ved sammenslåing av flere diskurser. Tolkingen av tangenten som uttrykk for funksjonens momentane stigning viste seg individualisert hos flere elever uten at det ble knyttet til andre diskurser. Et undervisningsdesign må ha sammenslåingen av diskursene som mål og da antas teknologien å kunne bidra. Flere realisasjoner kan visualiseres og sammenhengene mellom dem kan vises dynamisk.

IKT som læringsartefakt

Det teknologirike miljøet utgjør en viktig del av instruksjonsteorien og det antas at IKT vil være et viktig redskap for objektifisering. Säljö (2000, 2005) deler redskap i to kategorier. Intellektuelle redskap som metoder, språk og erfaringer og fysiske redskaper som konkreter utvikla for et formål. De fysiske redskapene kaller Säljö artefakter og bruker en spade som eksempel (Säljö, 2005, s. 28). Artefakter er et viktig hjelpemiddel for å sette den lokale instruksjonsteorien ut i livet. I undervisnigsdesignet vil artefaktene omfatte programvare i form av programmer for dynamisk geometeri, numerisk kalkulasjon og CAS. Blant elevenes artefakter inngår også grafisk kalkulator i tillegg til de tradisjonelle som skriveredskaper, linjal, papir mm.

IKT som artefakt kan benyttes på flere måter. Enten som en kalkulator som erstatter manuelle algoritmer eller som et læringsverktøy, et redskap for analyse og resonnering av matematikken eller en mediator. Dataprogrammet som ble benyttet, TI-Nspire, inneholder både et CAS, dynamisk geometri og en tekstbehandler. Til sammen muliggjør teknologien en bruk av en realistisk kontekst, et utforskende utgangspunkt, en visualisering og sammensetting av flere realisasjoner, dynamiske situasjoner og fleksibilitet. For den lokale instruksjonsteorien og utviklingen av en HLB vil dette utnyttes for å oppnå overgangene mellom realisasjonene.

Bruk av teknologi er en forutsetning i forskingsspørsmålet. Den deriverte innføres i en teknologirik diskurs. Det er flere grunner til valget av et teknologirikt miljø. For det første stiller læreplanene et krav om digital kompetanse. Den digitale kompetansen er både en av de fem grunnleggende kompetansene og en del av den matematiske kompetansen, men viktigst for innlemmingen i forskingsspørsmålet er mulighetene teknologien gir for å realisere og muliggjøre handlinger med de matematiske objektene. For å kunne gjennomføre prinsippene i den lokale instruksjonsteorien er bruk av IKT en nødvendighet. Det ligger flere muligheter i utnyttelsen av teknologien. En omstokking av den naturlige rekkefølgen av tema kan la seg gjøre med teknologi. Gjennom bruk av CAS og til dels numeriske verktøy kan teknologien utføre enkelte prosedyrer før elevene kan utføre tilsvarende algoritmer.

Et prinsipp for undervisningen med CAS, «The White Box/Black Box principle», er lansert av Buchberger (1990). Buchberger opererer med to begrep: «White Box phase» og «Black Box phase». I «White Box phase» konstruerer elevene matematiske begrep, algoritmer eller matematisk teori. De nødvendige ferdighetene i regning utvikles uten bruk av CAS. Tidligere emner som inngår i denne fasen anvendes som svarte bokser. «Black Box phase» er fasen hvor elevene benytter de teknikkene som «svarte bokser» og anvender kunnskapene ved problemløsing. Satt sammen som «The White Box/Black Box principle» har vi et undervisningsprinsipp hvor emnene introduseres som hvite bokser på tradisjonell måte, og anvendelsene skjer ved bruk av CAS. Alternativt kan en tenke seg dette gjort den andre veien som et «The Black

Box/White Box principle» hvor «Black Box phase» er fase med eksperimentering hvor teknologien kan behandle de svarte boksene. Adoptert til et diskursivt perspektiv vil de svarte boksene kunne realisere diskursive objekt. Det vil være mulig for elevene å delta i diskursen med IKT som en mediator og behandler av de svarte boksene. I både den lokale instruksjonsteorien og den hypotetiske læringsbanen vil det være et bærende prinsipp. For det første ligger potensialet i den objektliknende formen et algebraisk uttrykk har i verktøyet. I et IKT-verktøy med CAS må det matematiske uttrykket eller formelen behandles som en enhet. Det samme må det diskursive objektet. De realiserer snarere «ting» enn «handlinger» (Drijvers, 2003, s. 92) og kan forenkle tingliggjøringen.

De andre potensialene IKT-artefaktene utgjør er visuell mediering og et dynamisk miljø. Objektifiseringen vil avhenge av visuelle mediatorer gjennom både sammenlikning og innkapsling. En viktig utfordring er hvordan overgangene mellom realisasjonene skal kunne stimuleres. En artefakt kan vise mange realisasjoner og utfordre deltakerne til å finne sammenhenger, noe som jeg antar bidrar til dannelsen av diskursive objekt ved sammenlikning og innkapsling.

Det dynamiske miljøet vil utnyttes gjennom å skape aktiviteter hvor elevene utfører handlinger med objekter og må trekke konklusjoner av hva som skjer. Interaktiviteten utnyttes i undervisningsdesignet for å vise egenskapene ved objektene.

Et teknologirikt miljø antas å være viktig både som et medierende og et dynamisk redskap. Teknologien antas nødvendig for å kunne gjennomføre diskursovergangene i og vil være integrert i den lokale instruksjonsteorien. I de hypotetiske læringsbanene vil jeg utdype hvordan mulighetene kan tjene gjennomføringen av den lokale instruksjonsteorien.

En oppsummering

En lokal instruksjonsteori må ta hensyn til de forskjellige diskursene og realiseringene av den deriverte. I den grafiske diskursen møter elevene den deriverte realisert som en graf, i de andre diskursene vil den deriverte ha andre realiseringer. En tingliggjøring av den deriverte som et diskursivt objekt krever alle realisasjonene for objektifiseringen i form av sammenlikning og innkapsling. Rike realisasjonstrær og overganger mellom realisasjonene er det vi mer upresist kaller forståelse. Den lokale instruksjonsteorien har en individualisering av den deriverte som mål. Både teori, egen erfaring og forundersøkelsen viser at en objektifisering av den deriverte funksjonen er utfordrende. I den fysisk-numeriske diskursen viser det seg at de numeriske beregningene kan være rituelle. I undervisningsdesignet må det søkes en overgang for flere elever til utforsking eller aksjoner.

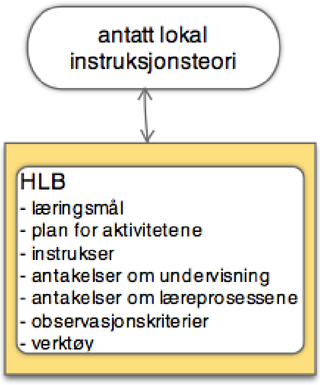
Symbolbruken er en hovedutfordring for undervisningsdesignet. Et grunnleggende problem er symbolet for funksjonsverdien, eksempelvis $f(2)$. Mangler betegneren en realisasjon, et diskursivt objekt, vil det få avgjørende konsekvenser. Forundersøkelsen viste at ingen av R1-elevene kunne forklare symbolet $f(x+h)$. Undervisningsdesignet må inneholde aktiviteter som støtter elevenes objektifisering og symbolrealisasjon.

5 DET FØRSTE UNDERVISNINGSEKSPERIMENTET

I dette kapittelet beskriver jeg første syklus i designforskingen. Først utformes en hypotetisk læringsbane basert på den lokale instruksjonsteorien. Etter utformingen prøves læringsbanen ut blant elevene. Jeg vil presentere observasjoner fra undervisningen og benytte de gjengitte episodene til å vurdere den hypotetiske læringsbanen, den lokale instruksjonsteorien og det teknologiske miljøet. Til slutt vil det føre mot en konklusjon og konsekvenser for neste syklus.

En hypotetisk læringsbane for den deriverte

Den hypotetiske læringsbanen (HLB) er en praktisk implementering og tilrettelegging av den lokal instruksjonsteorien bestående av alt som skal til for å iverksette teorien (se figur 5.1). Det betyr at alle planer for det som skal skje, instruksjonsmateriale, oppgaver og aktiviteter inngår i en HLB. Det gjør også beslutningene som ligger bak planer og aktiviteter. Til sammen utgjør det et stort materiale. Av den grunn må jeg velge ut hva som gjengis i oppgaven som deler av HLB, men utvalget er basert på hva som er viktig for forskingsspørsmålet.



Figur 5.1: Instruksjonsteori og HLB

Læringsmål

Undervisningsdesignet er en del av den ordinære undervisningen i matematikkfaget 1T for de deltakende elevene. Det er læreplanen og målene som står der som bestemmer sluttmålene for undervisningen. Læringsmålene for eksperimentet er undermål eller tolkinger av det som står i læreplanen for 1T.

Oppsummert blir læringsmålet en individualisering av den deriverte som tingliggjort diskursivt objekt. Det diskursive objektet må innkapsle både en numerisk-, grafisk-, fysisk- og symbolsk diskurs.

Kjennetegn på måloppnåelse

For å kunne operasjonalisere læringsmålene vil jeg knytte noen kjennetegn til måloppnåelsen. De vil også utgjøre observasjonskriterier under undervisnings-eksperimentet.

For tangentobjektet er et kjennetegn på læringsmålet at elevene kan tegne tangenter som ser visuelt korrekte ut. Med det mener jeg at de ikke skiller seg ut fra hvordan en korrekt tangent skal se ut.

Et annet kjennetegn er at stigningstallet til tangenten skal være objektifisert som momentan vekst. Gjennom lokal linearitet vil et av tegnene på måloppnåelse være at elevene realiserer tangenten som sammenfallende med grafen til en funksjon i et intervall. En slik realisering vil også omfattes av grenseobjektet. Det er ikke et mål for grenseobjektet at det realiseres som en grenseverdi i matematisk definisjon. Numerisk kjennetegnes måloppnåelsen for grensen ved den numeriske verdien for endringsraten når intervallbredden blir svært liten.

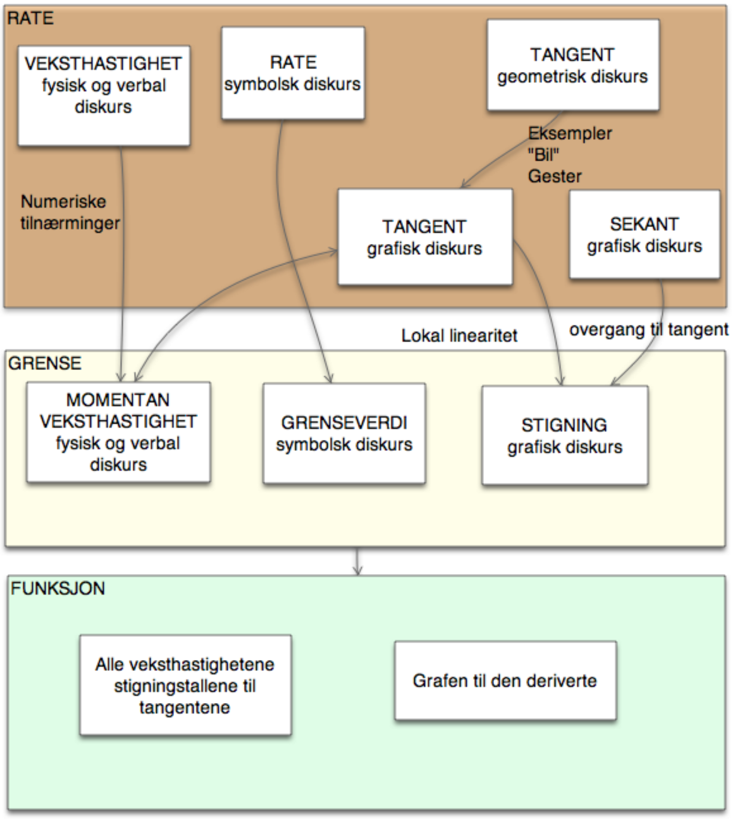
Funksjonsobjektet bør til slutt være en innkapsling av grenseobjektene i alle diskurser, men er også utgangspunktet og grunnlaget for hele undervisningsdesignet. Et kjennetegn, i alle diskurser, vil være en objektifisering av funksjonen. I den praktiske analysen av diskursen vil en hos elevene finne igjen det som en substantivisering av funksjonsverdien. Erstattes en funksjonsverdi med et substantiv tyder det på at målet om objektifisering er nådd. I den verbale- eller fysiske diskursen vil det typisk arte seg ved at eleven erstatter funksjonsverdien eller symbolet for funksjonsverdien, typisk *f(x)*, med et substantiv. Funksjonsverdien kan i en slik sammenheng typisk erstattes med substantivet «farten» eller «akselerasjonen». Undervisningsdesignet har også som mål at funksjonsobjektet oppfattes som en sammenheng mellom størrelsene og ikke bare som en av realisasjonene.

Strukturen i den hypotetiske læringsbanen

I den lokale instruksjonsteorien er den deriverte dekomponert og strukturert i flere diskursive objekt. I den hypotetiske læringsbanen velges en struktur for hvordan objektifiseringsprosessene ønskes organisert. Det gir rekkefølgen for hvordan realisasjoner og betegnere introduseres. Med utgangspunkt i analysen av den deriverte i den lokale instruksjonsteorien er strukturen i HLB framstilt i figur 5.2.

HLB har tangenten som startpunkt. Det antas at elevene kjenner tangenten i en geometrisk diskurs og første steg vil være en utvidelse av tangentobjektet til å kunne visualisere tangenter i et punkt på en graf. Utvidelsen, ved sammenlikning og innkapsling, støttes ved bruk av visualiseringer og animasjoner ved bruk av teknologi. I figuren er disse overgangene framstilt ved piler. Tangentens grafiske egenskaper i form av stigning må så knyttes til endringsraten.

Neste steg vil være en overgang fra tangenten til et grenseobjekt gjennom lokal linearitet. Ved en innzoomingsaktivitet hvor tangentlinja faller sammen med grafen til funksjonen kan tangentobjektet utvides til å realiseres som identisk med grafen i et intervall. Det er en grenseprosess som antas å bidra til en utvidelse av tangenten som et grenseobjekt. I den grafiske diskursen vil grenseobjektet være den momentane stigningen som tangentens helling. Den momentane grafiske stigningen knyttes også til momentan veksthastighet uttrykt numerisk gjennom utregninger. De numeriske verdiene vil sammenliknes med stigningstallet til tangenten.



Figur 5.2: Undervisningseksperimentets struktur

Etter denne sekvensen vil sekanten, og sekantens overgang til tangenten som grenseobjekt, introduseres. Gjennom interaktivitet med IKT-redskap i form av et dynamisk geometrisystem vil sekantens overgang til tangenten visualiseres.

Innkapslingen av alle grenseobjektene til en funksjon vil være neste steg. I en grafisk diskurs framstilles en innkapsling som grafen til den deriverte. I en fysisk, verbal eller numerisk diskurs vil den deriverte som et funksjonsobjekt være en innkapsling av alle veksthastighetene, stigningstallene til tangentene eller tolkinger av disse. Det vil igjen søkes oppnådd ved dynamisk og grafisk interaksjon i et teknologisk miljø.

Siste del av undervisningsdesignet vil være å følge en symboldiskurs gjennom de samme lagene for å ende opp med den symbolske definisjonen av den deriverte,

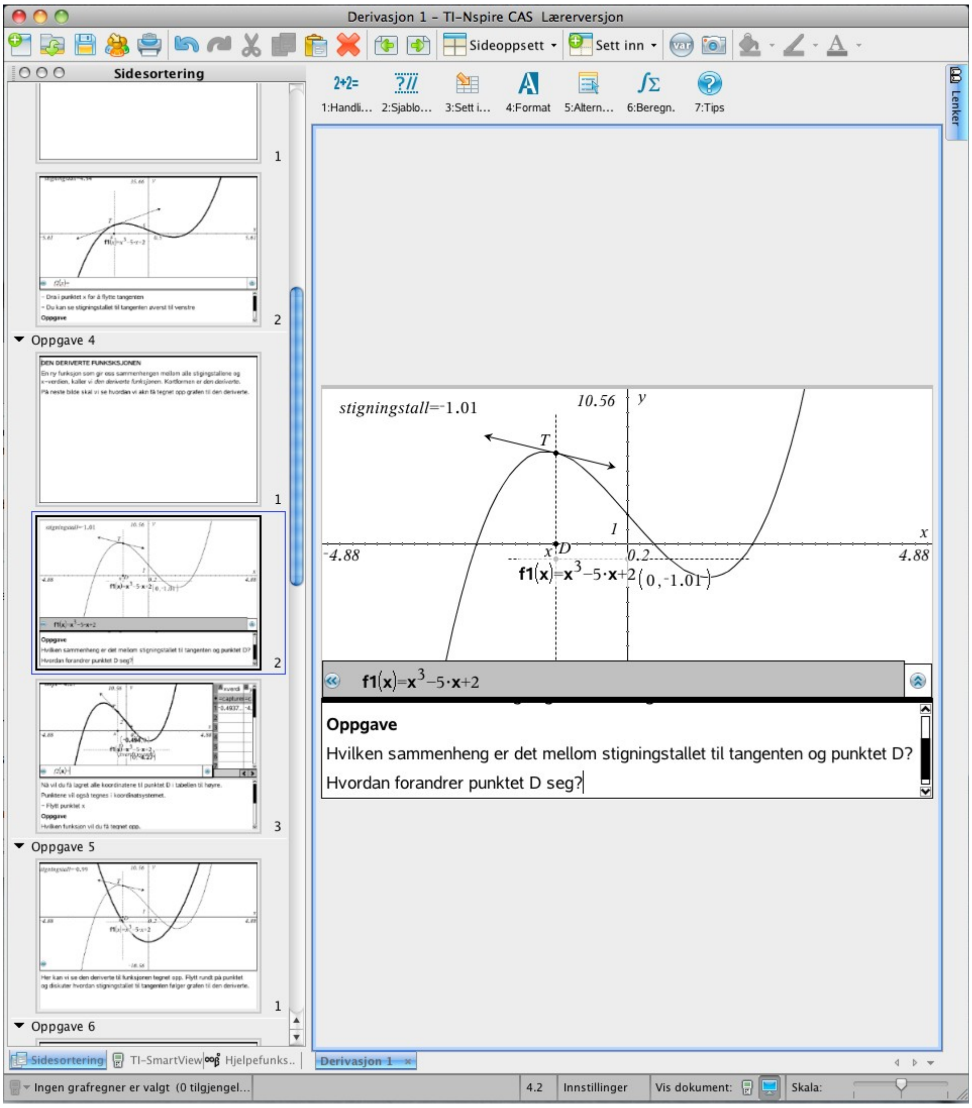
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Eleven som deltaker

Grunnlaget for den antatte instruksjonsteorien er betraktingen av eleven som deltaker i en diskurs. I rollen som diskursdeltaker kan en objektifisering finne sted (se kapittel 2). Et optimalt diskursivt miljø må skapes for en optimalisering av objektifiseringen. Elevene må tre inn i deltakerrollen. I praksis vil det si inndeling i grupper hvor de enkelte deltakerne i fellesskap skal møte, og benytte, de matematiske objektene. Gjennom deltaking i et praksisfellesskap antas ytringer og handlinger i gruppa, sammen med en lærerinitiert og lærerledet diskurs, å bidra til objektifisering.

Bruk av teknologi

Undervisningen i eksperimentperioden var sammensatt av blant annet forelesinger, multimediepresentasjoner med dynamiske figurer og illustrasjoner, lesing i læreboka, bruk av ressurser fra Internett, oppgaveløsing og individuell veiledning. Det ble lagt periodeplaner og hver time ble detaljplanlagt. Alt dette hører med i HLB, men vil i liten grad bli kommentert i denne oppgaven. Som svar på forskingsspørsmålet vil jeg konsentrere meg om hvordan den lokale instruksjonsteorien fungerte og hvordan teknologien fungerte som redskap for å få gjennomført denne.



Figur 5.3: Et eksempel på elevaktiviteter i TI-Nspire

Aktivitetene ble utarbeidet i Nspire versjon 1.7 og ferdig laget før undervisningseksperimentet startet. Jeg designet og utarbeidet aktivitetene, men de baserer seg i stor grad på tidligere undervisningsopplegg utviklet i tilsvarende programvare eller avanserte kalkulatorer. Inspirasjon og ideer er hentet fra både litteraturen som støtter den lokale instruksjonsteorien, fra kollegaer, kurs og lærebøker. Mange av ideene oppsto ved introduksjon av den grafiske kalkulatoren i 1994 og er forfinet og utvidet opp gjennom årene. Aktivitetene bærer preg av dette.

Mønsteret er at de bringer et dynamisk element inn i de statiske figurene fra lærebøker. I tillegg har jeg tilrettelagt for interaksjon etter instruksjoner. Arbeidet med aktivitetene var ment for grupper på to. I noen tilfeller kan gruppestørrelsen bli tre, men det er et krav at det skjer sammen med andre slik at aktivitetene ved datamaskina skjer med en medierende diskusjonspartner om medierende visuelle illustrasjoner.

Nspire inneholder en tekstbehandler og den ble benyttet til både å skrive instruksjoner til elevene og for tilbakemeldinger til meg. Egenskapene som ble observert, konklusjonene eleven trakk og utregningene ble elevene bedt om å skrive inn. Hele fila med aktivitet og svar skulle elevene levere på læringsplattformen (LMS) Fronter. På læringsplattformen ble det oppretta egne innleveringsmapper.

I tillegge til aktivitetene som er laget i Nspire ble det også brukt ferdige animasjoner funnet på Internett og aktiviteter jeg hadde designet som tilleggsprogram til nettsider (java appleter og javascript). Nettsidene med tilleggsprogrammene er tilgjengelig på adressen: http://osterlie.net/matte/. Siden er utdatert og ikke vedlikeholdt de siste årene, så den ble benyttet i begrenset grad.

Som nevnt tidligere var elevene avhengige av å forflytte seg til en datasal for gjennomføre aktivitetene der en utnytter programvare. Ved tegning av grafer og tangenter brukte elevene sin egen grafiske kalkulator. Sjøl om skjermoppløsningen er lav og skjermen er liten gir kalkulatoren godt lesbare grafer, funksjonstabeller, tangentlinjer og numeriske verdier for den deriverte. Gjennom numeriske beregninger kan også grafen til den deriverte tegnes opp i koordinatsystemet.

Gjennomføring

Jeg har avgrenset designet til å gjelde undervisning hvor målet er individualisering av den deriverte, men avgrensingene mellom hva som faller innafor eksperimentet og hva som ikke er med, er ikke helt klare. Den kompliserende faktoren for avgrensing er at enhver realisering av den deriverte knytter seg til andre objekt og andre realisasjonstre. Handlinger med, og objektifisering av noen disse objektene, kan elevene ha årelange erfaringer med. Undervisningseksperimentet avgrenses til å forsøke å sørge for at flest mulig av elevene individualiserer det diskursive objektet den deriverte funksjonen.

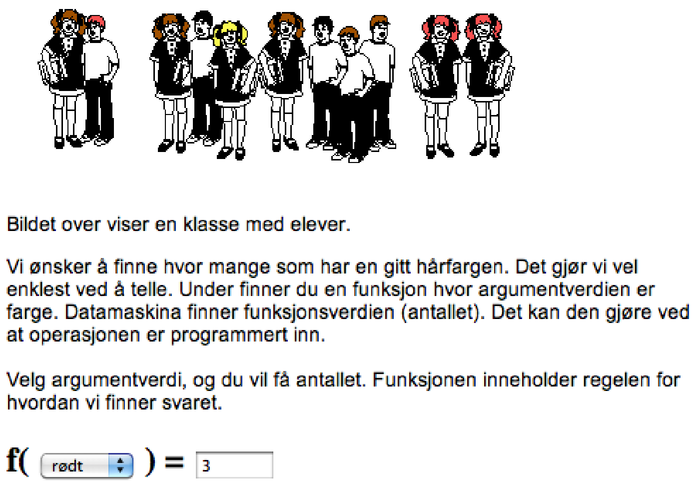
Undervisningseksperimentet ble starta med ei matematikkøkt på tre klokketimer. Hver fjerde uke har elevene en fagdag i matematikk og en av dem ble benyttet. Så fulgte åtte økter på åtti minutter hver. Undervisningseksperimentet ble avsluttet med en prøve på åtti minutter. Første undervisningsdag var 01.02. og prøven ble avholdt 08.03. Midt i denne perioden var det en vinterferie på ei uke.

Funksjonsobjektet

I den lokale instruksjonsteorien har en objektifisering av funksjonen en sentral plass. Undervisningsdesignet går ut fra at elevene har arbeidet med lineære, andregrads- og rasjonale funksjoner tidligere. Alle disse kategoriene har de møtt i matematikkurset 1T omtrent en måned tidligere. Ut fra den lokale instruksjonsteorien ble det startet med antakelsen om at det er den grafiske realisasjonen elevene knytter til betegneren «funksjon». Funksjonen som sammenhørende verdier antas ikke være tingliggjort for flertallet av elevene.

Målet er i første omgang å gi en gjeninnføring av funksjoner med en vektlegging av samhørende verdier og symbolbruk. Et viktig mål var realiseringen av symboler av typen *f(x)*. Det neste målet var en innkapsling av alle punktderiverte i den deriverte funksjonen.

Den første undervisningstimen ble startet med en gjennomgang og plenumsdiskusjon av hva en funksjon er. Elevene ble presentert for funksjoner de hadde arbeidet med tidligere. Tidligere i kurset hadde de arbeidet med en aktivitet hvor målet var å finne sammenhengen mellom antall personer som treffes og antall håndtrykk som skal til for at alle skal håndhilse på hverandre. Det er en problemstilling de har møtt flere ganger og til slutt endt opp med funksjonsuttrykket $h(n)=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$. I presentasjonen ble $h(n)$ flere ganger omtalt som antall håndtrykk når n personer møtes. Elevene ble bedt om å foreslå andre sammenhenger. Et av forslagene som dukket opp var funksjonen fra en prøve de hadde vært gjennom like før oppstart av undervisningsopplegget. Oppgaven tok utgangspunkt i en tankbil med eplesaft som hadde veltet. Funksjonen, uttrykt ved $f(t)=5000\cdot 0.977^t$, ga antall liter eplesaft som var igjen på tanken etter t minutter. Siden den ble foreslått og var godt kjent ble den funksjonen et gjennomgående eksempel for designet videre.



Figur 5.4: Hentet fra http://osterlie.net/matte/haarfarge.php

Gjennom klassediskusjonen fikk jeg ikke inntrykk av noen problemer. Elevene var aktive og responderte med ytringer som kunne tas som tegn på en realisering av funksjonen som samhørighet mellom to verdier og realisering av *f(x)* som funksjonsverdien.

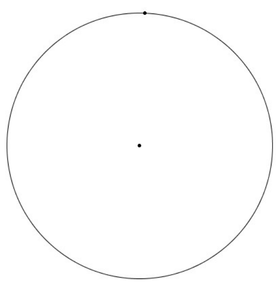
De neste aktivitetene var lagt til nettstedet jeg hadde utviklet. Den første viste et bilde av ei gruppe elever og ved å velge hårfarge i en nedtrekksboks var det mulig å få beregnet antall elever med den hårfargen. I en annen aktivitet, fra samme nettsted, var ei nettside som illustrerte funksjonsbegrepet ved en omregning av temperatur fra Celsius- til Fahrenheit. Elevene arbeidet også med en oppgave hvor de fant en funksjon ut fra figurmønster.

Med målet om den deriverte som innkapsling av stigningstallet til alle tangentene ble funksjonsobjektet et naturlig tema gjennom hele undervisningsdesignet og ble stadig vendt tilbake til.

Utgangspunkt i tangentobjektet

Undervisningsdesignet tok, etter et gjensyn med funksjonsobjektet, utgangspunkt i tangentobjektet og antakelsen om at elevene kjente tangenten fra den geometriske diskursen. Det ble startet med to innledende oppgaver hvor elevene skulle tegne tangenter på utleverte papirark. I tillegg til å visualisere sirkeltangenter og kurvetangenter, fikk de i oppgave å skrive ned sin oppfatning av en tangent. Elevene fikk utlevert et oppgaveark hvor det var tegnet en graf og en sirkel. Oppgaven gikk ut på å tegne tangenter i avmerka punkt, først på sirkelen, deretter på grafen.

Oppgave 1

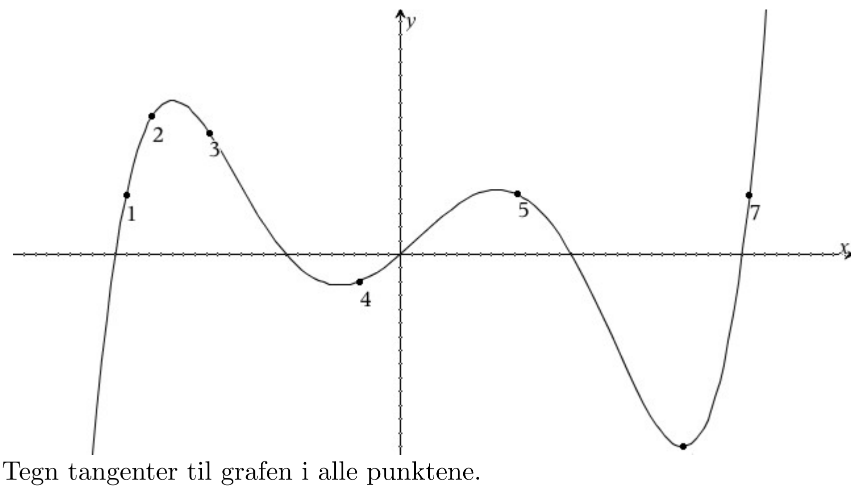


Tegn en tangent til sirkelen i punktet.

Figur 5.5: Sirkeltangenten

I den andre oppgaven skulle elevene tegne tangenter i gitte punkter på en graf.

Oppgave 2



Tegn tangenter til grafen i alle punktene.

Figur 5.6: Tangenter i punkter på en graf

Etter undersøkelsen om elevenes tangentbegrep fulgte en oppsummering hvor tangenten ble forsøkt formalisert. En IKT-aktivitet som demonstrerte tangenten som et kjøretøy på grafen og en aktivitet hvor elevene skulle etterlikne bevegelsene med håndflata ble gjennomført før elevene fikk i oppgave å diskutere hva tangentens egenskaper kan fortelle oss om funksjonens egenskaper. En plenumsdiskusjon om samme tema avsluttet undervisningsøkta. I neste matematikktime ble den lokale lineariteten vist gjennom bruk av programvare. Elevene kunne sjøl utføre det samme på de grafiske kalkulatorene sine.

Endringsrate i en numerisk og grafisk diskurs

Endringsrate var neste tema. Utgangspunktet var en antakelse om at alle elevene kjenner til stigningstall for ei rett linje og forhold som beskriver stigningstallet. Tidligere i kurset var det et læringsmål.

Veksthastighet

Veksthastighet kaller vi også vekstrate eller endringsrate. Uansett er det det samme: et uttrykk for hvordan funksjonen forandrer seg.
Vi ser på tanken med eplesaft. Funksjonen for å finne ut hvor mye saft det er igjen på tanken er: f(t)=5000·0,977t
I tabellen til høyre er det laget en tabell hvor funksjonsverdiene er regna ut (t er bytta ut med x i tabellen, men betyr det samme).

Oppgave

- Hvor mange liter eplesaft er det igjen etter 30 minutter?
- Hvor mye saft renner ut i tidsintervallet mellom 10 minutter og 15 minutter?
- Hvor mange liter per minutt blir det?
- Svaret over kaller vi veksthastigheten i det intervallet. Intervallene skriver vi som [10,15]. Hva blir veksthastighetene i intervallene:
  - [15,20]
  - [30,35]
  - [40,45]
  - [100,105]
- Hva skjer med veksthastigheten?

x	f1(x):= 5000*(0.9..
0	5000.
5	4450.85
10	3962.01
15	3526.86
20	3139.51
25	2794.69
30	2487.75
35	2214.52
40	1971.3
45	1754.79
50	1562.06
55	1390.5
60	1237.78
65	1101.84
70	980.82
75	873.097
80	777.204
85	691.844
90	615.858
95	548.218
100	488.007
105	434.409
110	386.698
115	344.227
120	306.42

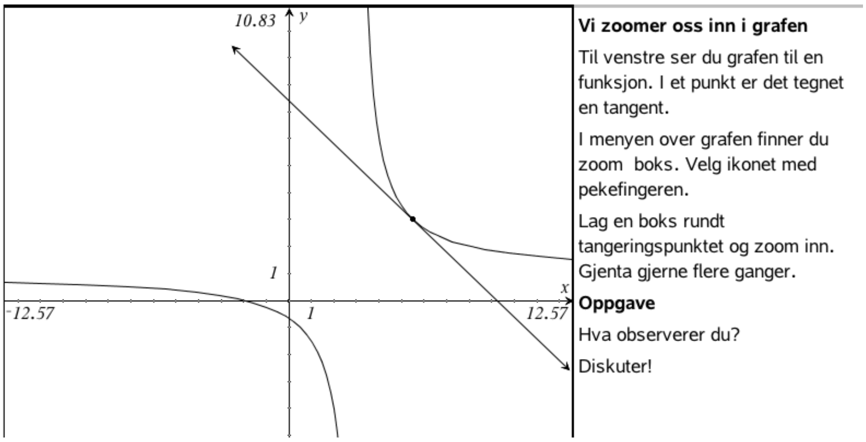
Et gjennomgående eksempel i undervisningseksperimentet er oppgaven om utslipp av eplesaft. Elevene kjente godt til situasjonen, og funksjonen som var modell for utslippet, og jeg valgte å bygge aktivitetene rundt den praktiske situasjonen slik at fokus skulle være på matematikken. I en felles gjennomgang ble det vekslet mellom oppgaveløsing i grupper og oppsummeringer på tavla.

Etter introduksjonen arbeidet elevene videre med å finne vekstfarten i de andre intervallene. Det var en oppgave alle elevene lyktes med. Ved at de hadde tabellen ble prosedyren den samme: Lese av verdiene, finne differansen og dele på intervallbredden.

I den påfølgende økta var målet å arbeide med endringsrate i en grafisk og numerisk diskurs. Målet ble å framstille de numeriske endringsratene grafisk i et koordinatsystem. I denne fasen ble teknologien brukt for å vise den grafiske realisasjonen. Elevene arbeidet med aktiviteter hvor det var ment at de skulle sammenlikne de to realisasjonene.

Grenseobjektet

Grenseprosessen ble innført ved en aktivitet med datamaskin og innzooming i et kort funksjonsintervall. Målet med aktiviteten var å gjennom lokal linearitet visualisere grenseprosessen som gir en momentan vekst (Biza, 2007; Biza et al., 2007; Tall, 2010; Tall, Smith, & Piez, 2008). Utgangspunktet var en hyperbel med en tangent (se figur 5.7)



Figur 5.7: Innzoomingsaktivitet

Elevene arbeidet også med definisjonen av den deriverte i en grafisk og symbolsk diskurs. Ved hjelp av programvaren arbeidet de med figurer som viser sekantens overgang til tangenten.

Refleksjoner over HLB og den lokale instruksjonsteorien

Den lokale instruksjonsteorien og HLB inneholder et foreløpig svar på forskingsspørsmålet og jeg vil i dette kapittelet reflektere over resultatene og gjennomføringen av undervisningsdesignet. Det er observasjonene og det innsamla materialet under gjennomføringen som danner utgangspunkt for refleksjonene, men noe av grunnlaget kommer også fra en avsluttende test. Testen var en del av en større prøve hvor den utgjorde en egen del. Den andre delen av prøven besto av oppgaver hvor derivasjon og funksjonsanalyse var sentralt. Elevene fikk ikke bruke noen hjelpemidler under testen. I alt 22 elever deltok. Testen er lagt ved i vedlegget, se s.129.

Tangentobjektet

Antakelsen om at tidligere erfaringer fra sirkelgeometrien introduserer en oppfatning om at tangenten bare berører ett punkt og ikke vil krysse grafen i andre punkt (Biza, 2007; Tall, 1987; Vinner, 1991) og at dette kan føre til kommognitive konflikter blir bekreftet i episodene som er observert og gjengitt seinere.

I den innledende oppgaven hvor elevene skulle tegne sirkeltangenter viste det seg at de fleste kjente sirkeltangenten.

I alt deltok 25 elever og resultatet er framstilt i tabell 1 hvor en korrekt tangent er kategorisert som en tegning av ei linje som visuelt er svært nær en korrekt framstilt sirkeltangent. Majoriteten av elevene så ut til å ha en god visuell realisasjon av en sirkeltangent. En av de tre, som ikke hadde tegna en sirkeltangent, tegnet seinere korrekte tangenter i den følgende oppgaven. Resultatet ble da at bare tre elever ikke greide å visualisere en sirkeltangent. Ved seinere samtaler viste det seg at grunnene til det besto i enten misforståelser eller begrepsforvirring. Resultatet og diskusjonene i etterkant viste at tegning av sirkeltangenten gikk svært greit.

Resultat	Antall
Korrekt tangent	21
Ingen tangent eller radius	4

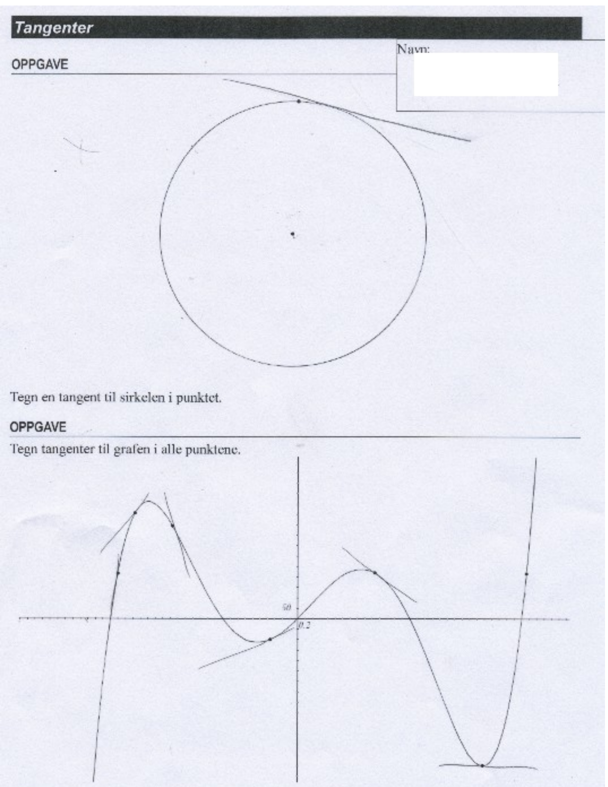
Tabell 1: Sirkeltangenten

I den andre oppgaven skulle elevene tegne tangenter i punkter på en graf. Denne oppgaven førte til større problemer for elevene. De 21 elevene som tegnet inn korrekte sirkeltangenter fordelte seg slik tabell 2 viser. Tolv elever hadde tegnet tangenter som så ut som korrekte realiseringer av tangenter i punktene. Fem av elevene hadde tegnet tangentene korrekt i alle punkter utenom punkt 1 og 7. Problemene med å tegne tangenter i punktene lengst til høyre og venstre, punkt 1 og 7 i figur 5.6, førte til nærmere undersøkelser. To av elevene ble intervjuet for at de skulle kunne forklare hva som lå til grunn for figurene de tegnet.

Resultat	Antall
Alle tangentene korrekte	12
Feil i punkt 1 og 7	5
Alle tangentene feil	4

Tabell 2: Tangenter på grafen

KA leverte inn en besvarelse hvor hvor hun har tegnet tangenter i alle punkt unntatt i punktene lengst til høyre (punkt 1) og venstre (punkt 7) (se figur 5.8 og figur 5.6 hvor punktene er nummerert fra høyre). Sjøl om hun bommet på det avmerka punktet, ser det ut til at hun tegnet sirkeltangenten korrekt på sirkelen.



Figur 5.8 : tangentene til KA

Episode 1

17.	I:	Hva skrev du at en en tangent var for noe?
18.	KA:	...Skal vi se...En strek som treffer ett punkt på sirkelen
19.	I:	Hvorfor har du skrevet det?
20.	KA:	Det sto i boka på ungdomsskolen og vi hadde om det i timene.
21.	I:	Men, hvordan tenkte du da du tegnet opp tangentene?
22.	KA:	Er det ikke bare å tenke seg sirkler i punktene, da?
23.	I:	Sirkler?
24.	KA:	Ja, sirkler! Eller egentlig halvsirkler. Du tenker bare på halvsirkler som ligger rundt streken (tegner opp sirkler i lufta som etterlikner krummingen på grafen rundt punkt 3). Da ser jeg hvor jeg skal tegne tangenten.
25.	I:	Mmm, smart...men hva med disse punktene? (peker på punktene 1 og 7)
26.	KA:	Nei, der vet jeg ikke hvordan...er veldig i tvil...Får ikke til halvsirkler

KA starter med sin gjengivelse av definisjonen hun kjenner fra grunnskolen som «en strek som treffer ett punkt». I overgangen til den analytiske diskursen tvinges KA til å tegne tangenter på ei kurve og ikke en sirkel. Hun løser denne kommognitive konflikten ved å «tenke seg sirkler i punktene». Tangenten i punkt 3 på grafen er et eksempel på teknikken, sjøl om den ikke er korrekt tegnet. En halvsirkel i form av en gest illustrerte utgangspunktet for tangenten, men gesten kan tyde på at hun forestiller seg en sirkel plassert med periferien i toppunktet mellom punkt 2 og 3. Det forklarer også tangentens heling i punkt 3. Når hun ikke tegnet noen tangenter i punktene 1 og 7 skyldes det at hun ikke greide å forme de samme halvsirklene. Den intuitive framgangsmåten til KA minner om samme ide i den formelle matematikken. Descartes tok utgangspunkt i halvsirkler for å finne tangenter (Descartes, 1954) og i kalkulus er en slik sirkel definert som krumningssirkelen (eng. osculating circle) ut fra funksjonens andrederiverte (se f.eks. Apostol, 1967, s. 537).

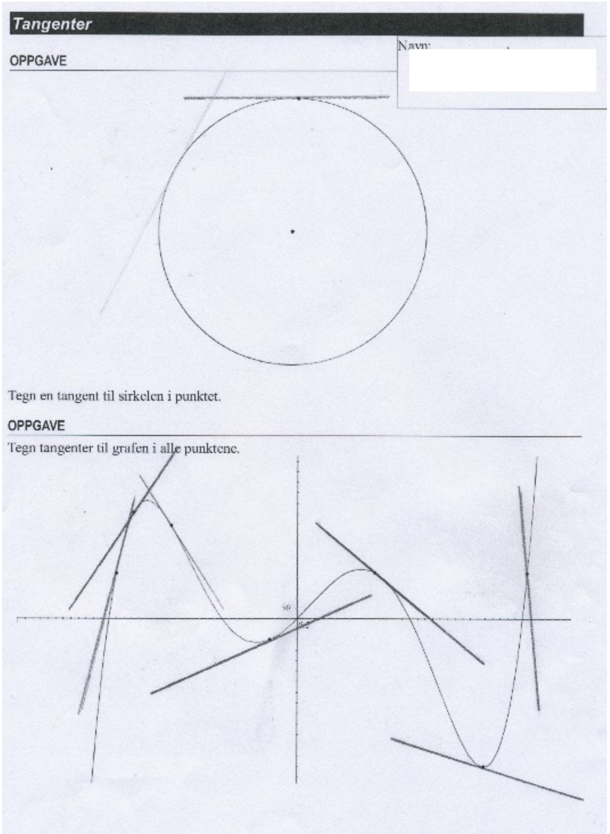
Vi finner samme tankegang hos flere av elevene. MJ leverte tegningene i figur 5.9.

I et intervju som forklarer tankegangen bak tangentene sier hun til intervjueren I:

Episode 2

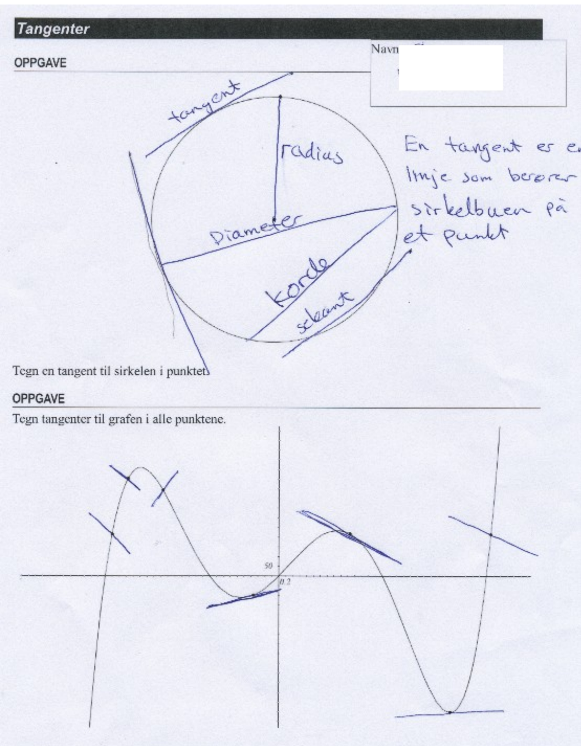
27. I: Kan du kommentere tangenten du har tegna her? (peker på tangenten i punkt 7)

28. MJ: Nei, der prøvde jeg meg bare. Aner ikke hvordan det skal være. Dro bare en strek som gikk gjennom punktet, men jeg passet på slik at den bare gikk gjennom ett punkt, da.



Figur 5.9: Tangentene til MJ

For MJ var det viktigste at tangenten gikk gjennom bare ett punkt. Hun var usikker, men ville løse oppgaven. Realisasjonen av et punkt i form av en prikk er også noe hun har med seg fra geometridiskursen. Et tangent som går gjennom punkt 7 greier hun ikke å visualisere.

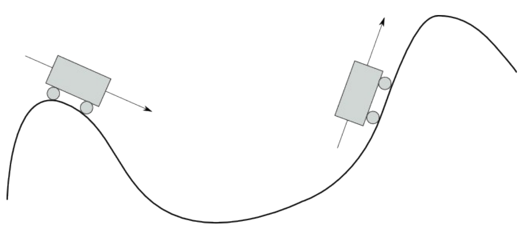


Figur 5.10: Tangentene til ST

ST er også svært tro mot definisjonen han har fått med seg fra geometrien på grunnskolen. Han unngår at tangentene går i ett med grafen sjøl om han har tegna sirkeltangenten korrekt. Tangentene i punktene 4, 5 og 6 likner mer på korrekte tangenter.

Aktivitetene som ble gjennomført utsatte elevene for mange visuelle realisasjoner av tangenter med antakelsen om en objektifisering i form av sammenlikning vil føre til en objektifisering av et nytt tangentobjekt. Diskursivt vil en slik overgang være det Sfard kaller en eksogen utvidelse av diskursen (eng. exogenous (2008, s. 119), dvs. at flere diskurser går sammen og danner en ny.

For at realisasjonen av sirkeltangenten og den generelle tangenten skal sammenliknes og danne et nytt objekt designet jeg en dynamisk demonstrasjon for vise tangenten som et kjøretøy som kjører på en graf. Med støtte i, og ide fra bl.a Tall (2010), ble aktivitet designet med verktøyet TI-Nspire. Noe som likner en karikering av en bil,



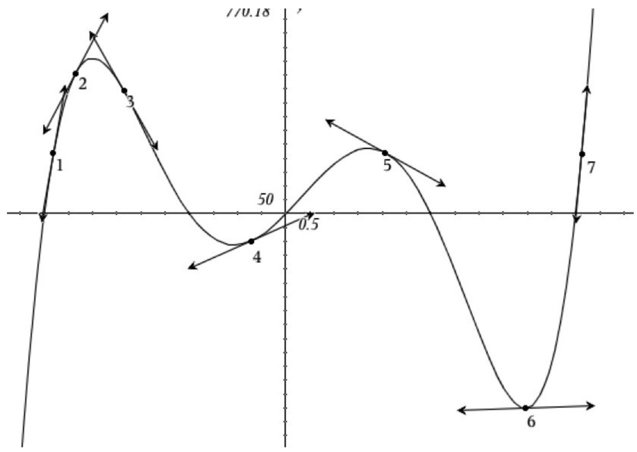
Figur 5.11: Kjøretøy på graf

eller vogn, ble konstruert. Dette kjøretøyet kan flyttes og elevene fikk i oppgave å flytte rundt på den samtidig som de observerte tangentens posisjon.

De fikk også i oppgave å bruke Nspire til å tegne tangenter i forskjellige punkter på grafen. I den dynamiske geometridelen gir Nspire mulighet for å tegne opp tangenter i punkter på grafen. Denne aktiviteten ble utført både på grafen fra papiraktiviteten og andre grafer. Tangenter, tegnet i ulåste punkt, kan også flyttes rundt på grafen. Det inngikk også i en av aktivitetene. Elevene ble også bedt om å følge bevegelsene med en blyant eller bare handa.

Det viste seg at aktiviteten med kjøretøyet og det å få tegnet tangenter med et verktøy, ga en ny realisasjon for flere av elevene.

Når KA brukte Nspire til å tegne opp tangenter på den samme grafen som i papiraktiviteten brukte hun kjøretøyet i realisasjonen sin av tangenten.



Figur 5.12: Tangenter tegnet i TI-Nspire

Episode 3

29. I: Ser du programmet tegner opp nesten samme tangenter som du gjorde.

30. KA: Ja.

31. I: Men, se på tangentene du ikke tegna! Hva ser du?

32. KA: Tja...De ligger helt inntil streken...hele veien liksom...hmm...akkurat som den bilen...kjører liksom bortover...ja, da blir det enkelt å tegne opp.

Metoden til KA med å tegne tangenter ved hjelp av forestilte halvsirkler førte ikke fram i punktene 1 og 7. Ved hjelp av metaforen med kjøretøyet ble hun i stand til å tegne tangenter. Hvorvidt dette førte til en forandring av tangentobjektet er mer usikkert.

En metodeforandring finner også sted hos ST, som også hadde problemer med å tegne tangenter i punkt 1 og 7. Under aktiviteten med verktøytegning av tangenter, og sammenlikning av hva ST hadde tegnet på papiret (se figur 5.10), utspant denne dialogen seg mellom to av elevene IK og ST.

Episode 4

33. IK: Ser du at det blir feil ytterst? (viser på papirtegningene)

34. ST: Hva?

35. IK: Tangentene der (peker på tangentene som skjærer grafen). Jeg trodde også at det skulle være slik, men bare tenkt på bilen som kjører bortover grafen. Hvordan hadde den kjørt her?

36. ST: Åja, den ja. Da hadde det blitt sånn (retter opp tangentene som er feil tegna)

Bil-metaforen viste seg viktig både for tegningen av tangentene og seinere i beskrivelser av «bratthet» og «oppoverbakker» i forbindelse med funksjonsanalysen. I flere episoder benyttes «bilen med tangenten» som visuell mediator både i kommunikasjonen mellom elevene og ved sjølkommunikasjon.

I løpet av eksperimentet nås målene som ble satt for tangentobjektet. I den grafiske diskursen har alle deltakerne en visuell realisasjon av tangentlinja og tegner tangenter både for hånd og ved bruk av IKT-redskap. Aktivitetene som var designet for å gi en realisasjon av tangenten fungerte derfor bra. Disse aktivitetene vil også bli benyttet i den neste syklusen.

Overgangen fra tangent til grenseobjekt ved lokal linearitet

HLB inneholdt flere aktiviteter hvor målet var at elevene skulle erfare og diskutere sammenhengen mellom stigningstallet til tangenten og veksten i et kort funksjonsintervall. Målet med aktivitetene var å, gjennom lokal linearitet, visualisere grenseprosessen som gir en momentan vekst (Biza, 2007; Biza, Diakoumopoulos, & Souyoul, 2007; Tall, 2010; Tall et al., 2008). I en utvalgt episode var utgangspunktet en hyperbel med en tangent (se figur 5.7)

Gjennom visualiseringen av lokal linearitet konkluderte en majoritet av elevene positivt i forhold til den lokale instruksjonsteorien og HLB. Her er noen typiske eksempler på ytringer som faller inn i den typiske kategorien:

Episode 5

37.	MJ:	Vi får et klarere bilde...og grafen blir rettere...stigningstallet blir klarere...at det er det samme som tangenten, altså

Terminologien i de andre observasjonene omfatter også ordene «rett», «klarere» slik disse utdragene er eksempler på:

Episode 6

38.	HÅ:	Vi får et klarere bilde og en rettere graf
39.	JM:	Tangenten legger seg mer og mer innpå grafen. Blir helt rett til slutt.
40.	MA:	Vi ser at stigningstallet til tangenten etterhvert blir lik grafen – de går i ett. Da er det enkelt å se sammenhengen.
41.	RH:	Tangenten blir mer nøyaktig og går til slutt helt parallelt med grafen. Hvis vi finner stigningstallet til tangenten vet vi egentlig den momentane veksten.

Et av tegnene på måloppnåelse i HLB er at elevene realiserer tangenten i et punkt som sammefallende med funksjonsgrafen i et intervall i nærheten av tangeringspunktet. Gjennom observasjonen og elevenes ytringer er det grunn til å konkludere med at aktiviteten fører til måloppnåelse for flertallet av elevene.

Objektifiseringen av grenseverdien var ikke bare avgrenset til lokal linearitet, men også dynamisk aktivitet med overganger fra sekanter til tangenter. Den lokale instruksjonsteorien og HLB støttes av funnene i undervisningseksperimentet. Når elevene gjennom innzooming så på forskjellen mellom tangentlinja og grafen, så alle at linjene falt sammen. Tolkingen var at de på det skjermbildet «lå over hverandre». Det var ett av målene i HLB. Hvordan elevene tolket det videre er mer usikkert og med individuelle variasjoner. I en av episodene var problemet, hos eleven HW, å knytte stigningen til en numerisk verdi, stigningstallet. Mer vektlegging, og en repetisjon av stigningstall, er en konsekvens for HLB i neste syklus. Aktivitetene med å zoome inn i et tangeringspunkt beholdes.

Når det gjelder aktiviteten med overgangen fra sekanten til tangenten ble ikke antakelsene i HLB bekrefta. Den ferdige figuren medierte ikke det jeg som designer hadde antatt. En ny aktivitet må være visuelt enklere slik at figuren ikke har en uønska medierende effekt.

Endringsraten

I den fysiske og numeriske diskursen ble endringsraten knytta til praktiske eksempler.

Et gjennomgående eksempel var utslipp fra en tank. I den lokale instruksjonsteorien antas det at i de numeriske beregningene kan ordet «gjennomsnitt» være en prosessbetegner som utløser et rituale. Det kunne også observeres under gjennomføringen, men da vi kom til den avsluttende testen og elevene skulle løse en numerisk oppgave besvarte 16 av elevene korrekt. Tre av elevene hadde ikke delt på antall år. De andre hadde gjort regnefeil. Ved gjennomgang og diskusjoner i etterkant viser og så de elevene som ikke svarte korrekt at veksthastighet er individualisert i den numeriske og fysiske diskursen.

I den numeriske diskursen fungerer HLB etter antakelsene. Særlig i de praktiske tilfellene regner majoriteten ut en verdi for endringsraten, men i noen tilfeller blir bare endringen funnet og ikke raten. Elevene finner ikke endringen per enhet. Noe av problemet ligger i endringsraten som prosess. Metoden for å finne den numeriske verdien er individualisert som en rutine, men endringsraten er ikke dannet som et diskursivt objekt. I arbeid med endringsraten viste utfordringene ved symbolbruken seg. Sjøl om elevene fant endringsrate ut fra verdier i en tabell viser episoden som følger problemene som oppsto når en oppgave ble beskrevet med symboler.

Vekstfart hos et grantre

Etter en introduksjonsfase fikk elevene i oppgave å arbeide med en oppgave[25] hvor vekstfarten hos et grantre skulle beregnes.

Oppgave
Høyden av ei gran målt i meter *t* år etter at den ble plantet, er
$h(t) = -0{,}0003t^3 + 0{,}025t^2$, $t \in [0,50]$
Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til grana i periodene [0,10], [10,20], [20,30], [30,40] og [40,50]

I denne oppgaven var ikke funksjonsverdiene gitt i en tabell. For å finne den gjennomsnittlige vekstfarten må høyden beregnes som en del av oppgaven. En episode, som viser den diskursive kompleksiteten i oppgaven, ble videofilmet og transkribert. To elever løste oppgaven sammen.

Episode 7

42.	OM	Høyden av ei gran er målt i meter t...Høyden av ei gran t år...t år etter at den er plantet [...] høyden av ei gran...ja...er h i t ...ja...ja... er t også et tegn sånn (gjør en bevegelse i lufta)
43.	LL	Definisjonsmengde...
44.	OM	Viser at det blir ikke 50 m [...] Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til grana i perioden ...det her får jeg ikke til (leser oppgaven en gang til)...t år...
45.	LL	skriv det opp på papiret

25 Oppgaven er delvis hentet fra Oldervoll et al. (2009)

46. OM okei...vi skal ha svaret i meter [...] vi må vel fylle inn 10...sikkert? (skriver 10 = -0,0003t^3 + 0,025t^2)

47. LL Er det ikke 50

48. OM Nei, det er definisjonsmengden

49. LL Det er jo 0 til 50

50. OM Ja, ja selvfølgelig er det...du er smart (bytter ut 10 med 50)

51. LL Hvordan regner du ut det?

52. OM Det tar jeg ikke i hodet...finn det på kalkisen (regner ut)

53. LL 25 blir svaret

54. OM Da blir det sånn (skriver 50 år = 25 meter)

55. LL Deler du på 50 finner du per år

56. OM Ja, og da får man...0,5...det der er svaret

57. LL Vi skulle finne ut den gjennomsnittlige vekstfarten i perioden fra 0 til 10 år...da må du gange det med 10 da

58. OM Da får jeg 5

59. LL Ja...skriv 5 og to strek under svaret, da

60. OM Der, 5 meter på 10 år

Allerede i starten oppstår det et problem for elevene. Diskursen i oppgaven er ny og ukjent for de to elevene. Læreboka forutsetter symbolene som kjent uten introduksjon. I oppgaveteksten er det uttrykket « høyden t år etter at den ble plantet» som ikke er meningsbærende for OM. Han leser det samme flere ganger for å løse den kommognitive motsetningen han opplever. Når teksten fortsetter med «er $h(t) = -0,0003t^3 + 0,025t^2$, $t \in [0,50]$» viser den manglende verbaliseringen at de to symbolene, $h(t)$ og $\in$, mangler en realisering. Ut fra den lokale læringsteorien er vansker med betegneren $f(x)$, eller i dette tilfellet $h(t)$, kjent. Elevene har tidligere i matematikkurset sett betegneren, men for OM knyttes ikke symbolet til en realisasjon. LL knytter elementsymbolet og intervallet til definisjonsmengden, men mener at granas høyde er begrenset til 50 m. Resten av oppgaveløsingen foregår som et rituale hvor OM er mer opptatt av aksept fra LL enn logisk struktur i problemløsingen. Et eksempel er i ytring 46. hvor det kommer det fram at han ønsker aksept fra LL ved å legge til «sikkert?». Verken vekstfart, høyde eller tid håndteres som diskursive objekt.

Konsekvenser for neste syklus

For HLB er episoden viktig fordi den gir et innblikk i hvordan matematikken blir når symbolene står uten referanse i en realisasjon. De matematiske ytringene begge deltakerne produserer er ikke logisk fundamentert. Snarere er ytringene en rituell vei fram mot et svar det kan settes to strek under. En læringsbane mot en objektifisering av den deriverte blir umulig på dette grunnlaget.

En sammenlikning med den grafiske diskursen er nødvendig i neste syklus. Bare gjennom en realisering av numeriske verdier som lengden av linjestykker kan figurene tjene som mediatorer. En vektlegging av det tas med i neste undervisningsdesign.

Individualiseringen av funksjonsobjektet

En viktig del av den lokale instruksjonsteorien og HLB er tingliggjøringen av funksjonsobjektet. Det var et sentralt mål gjennom hele undervisningseksperimentet og var implisitt i nær alle aktivitetene. Den lokale instruksjonsteorien antar at utfordringene gjelder dualiteten prosess og objekt.

I den avsluttende testen ble elevene bedt om å skrive ned en definisjon av en funksjon. For å tolke svaret i retning av en individualisering av det diskursive objektet en funksjon er en henvisning til en sammenheng mellom to verdier et krav.

Sju av elevene svarer ikke på den oppgaven og av de resterende, 17 elever, har fire av elevene svart med en referanse til funksjonen hvor samhørighet mellom verdier inngår. Svarene til de fire elevene:

Episode 8

61.	FR:	en funksjon viser forholdet mellom to variabler (x og y) som kan framstilles i en graf.
62.	EI:	y er en funksjon av x når hver verdi av x gir nøyaktig en verdi av y. Funksjoner kan brukes som statistikk og problemløsing
63.	ST:	en funksjon er noe du kan framstille et uttrykk ved. Og der hver mulige verdi av x gir nøyaktig 1 verdi av y
64.	AR:	En funksjon er ett uttrykk som viser hva x er i forhold til y. Den kan inneholde variabler, konstanter og stigningstall

De 13 resterende svarene definerer funksjonen som en av realisasjonene. Fire av elevene begrenser funksjonsdefinisjonen til et lineært uttrykk, hvor et typisk svar er at en funksjon er for eksempel $y{=}2x{+}1$ eller $y{=}ax{+}b$. Andre eksempler på svar hvor det henvises til realisasjonen er disse:

Episode 9

65.	FR:	en funksjon er et uttrykk

66. JC: En likning som du kan sette i en graf

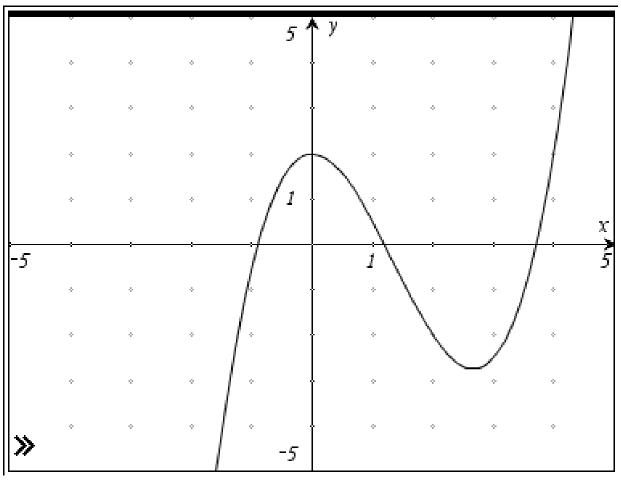
Hos flertallet av elevene er ikke funksjonen tingliggjort som en ledende realisasjonen (Sfard, 2008, s. 158), men et konkret diskursivt objekt realisert ved grafen eller funksjonsuttrykket.

Konsekvenser for neste syklus

I neste syklus må HLB forandres slik at en tingliggjøring av funksjonsobjektet kan skje. Objektifiseringen er knyttet til språket og da må flere situasjoner hvor kommunikasjon er nødvendig skapes. At så få kan skrive ned en definisjon av funksjonen er ikke et akseptert resultat av designet. En manglende objektifisering i form av substantivering av fysiske størrelser i form av funksjonsverdier fant jeg også i dataene. Funksjonsverdiene betegnet både høyder, fart og utslipp, men jeg fant ikke noen tilfeller der symboler eller numeriske verdier ble erstattet med substantivene «høyde», «fart» og «utslipp».

Realisering av symbolet f(x) og f´(x)

Realiseringen av symboler av typen *f(x)*, *h(n)* eller *g´(x)* var et klart mål for HLB. Den lokale instruksjonsteorien antar også dette som en utfordring knytta til objektifiseringen av funksjonsobjektet. I sluttesten var det to oppgaver som undersøkte realisasjonen i en grafisk diskurs. I den første oppgaven fikk elevene gitt en graf hvor de skulle lese av *f(2)*.



Vi kaller funksjonen som er tegna over for *f*. Hva er *f(2)*?

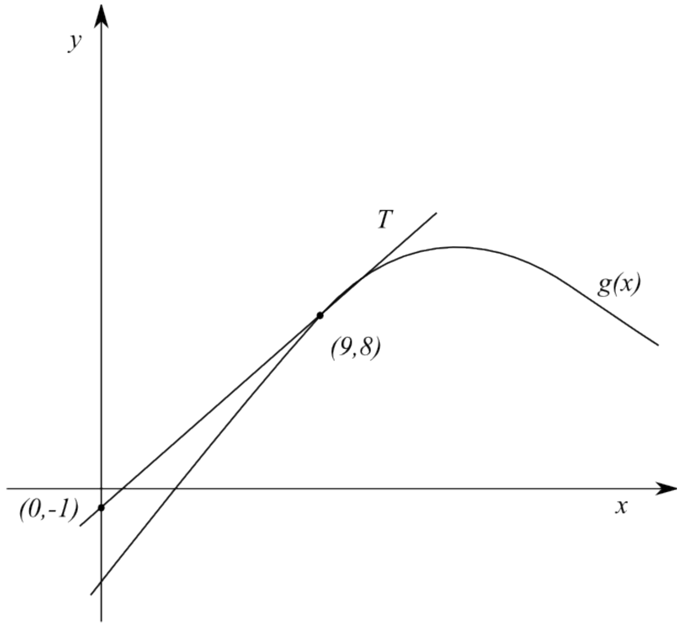
Figur 5.13: Symbolet f(2)

Bare fire av elevene gir svaret *f(2)=-2*. I de andre svarene fins klare tegn på en manglende objektifisering og referanser til prosedyre, slik IB sitt svar er et eksempel på:

Episode 10

67. IB: Når vi skal finne f(2) må vi bruke funksjonen for f(x), men sette inn 2 for den ukjente og regne ut det. Uten det kan vi ikke gjøre det.

En annen oppgaver som krever samme type realisasjon og samtidig en grafisk tolking av stigningstallet til tangenten er oppgaven under.



Anta at linja T er tangenten til grafen til funksjonen g(x) i punktet (9,8).

Finn g(9). Husk en kort forklaring.

Finn g´(9). Husk en kort forklaring.

Figur 5.14: Symbolet g(9)

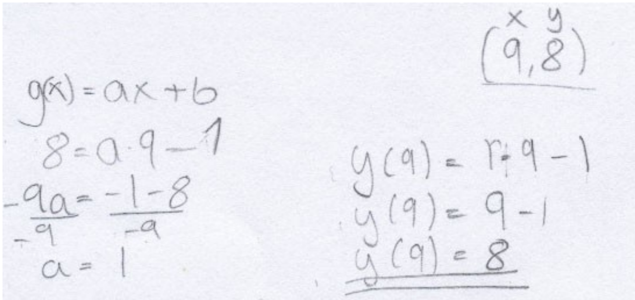
Oppgaven virker vanskelig for mange av elevene som hopper over den, men sju av elevene svarer at *g(9)=8*. Til forskjell fra den forrige oppgaven har de gitt koordinatene til punktet og slipper å lese av. Det gjør at tre elever, som ikke fant funksjonsverdien i den forrige oppgaven, greier det i denne oppgaven. For de fleste er *g(9)* i likhet med *f(2)* ikke objektifisert og knyttes til en prosess. Et eksempel på en ytring er:

Episode 11

68. SZ: g(9) må vi ha en formel til. Da regner vi videre med formelen, deretter skal man få svaret g(9)

Det er en gjennomgående kommentar som kommer av at både *f(x)*, og varianten *g(x)*, fortsatt betegner prosesser. Uten å ha individualisert symbolene som betegnere for et diskursivt objekt gjennom tingliggjøring, vil symbolet betegne en prosess for hvor verdien må settes inn og regnes ut.

I den siste oppgaven viser flere av elevbesvarelsene at elevene må ha realisert g*(x)* som et algebraisk uttrykk for så å finne *g(9)*. Uten uttrykket eksisterer ikke koblinga til grafen. I disse tilfellene er grafen ikke realisert som sammenhengen mellom x- og y-verdiene. Når grafen ikke betegner sammenhengen mellom to størrelser vil den heller ikke være objektifisert.



Figur 5.15: Svaret til AD

AD tjener som et eksempel. For å finne *g(9)=8* fokuserer hun på prosessen. Hun finner først likninga for den rette linja T og bruker uttrykket for å finne *g(9)*. Hos AD er det prosedyrene som styrer handlingene.

Tolkingen av *g´(9)* viste seg vanskelig i forundersøkelsen. Symbolet må først tolkes som stigningstallet til tangenten, så må tangenten identifiseres og til slutt kan stigningen beregnes som en rate ut fra punktene som er gitt. Det krever flere tolkinger og i forundersøkelsen var det bare en elev som greide det. I sluttesten etter den første syklusen finner to elever stigningstallet til tangenten og gir det som en realisering av betegneren *g´(9)*.

Konsekvenser for neste syklus

Flere av episodene viser at en realisering av grunnleggende symboler fører til kommognitive konflikter hos mange elever. De urealiserte symbolene utgjør et stort problem for undervisningsdesignet. Særlig gjelder dette for symbolet *f(x)*. En manglende realisasjon av betegneren *f(x)* kan ha flere årsaker. Den ene er en manglende objektifisering av en funksjon. Med funksjonen som en prosedyre vil realisasjonstreet til funksjonen være mangelfull og fokuset være knyttet til handlingen med prosessen. Realisasjonstreet til betegneren *f(x)* vil enten mangle eller være begrenset. Er et realisasjonstre individualisert kan årsaken til manglende betegning være at symbolet ikke er knyttet til funksjonen. I episodene og intervjuene går samme manglende realisasjoner igjen for flere symboler. Observasjoner viser det samme for intervallsymbolene og eksistenssymbolet ∈.

Konsekvensene for neste syklus i designeksperimentet må være å organisere situasjoner hvor deltakerne må benytte symboler hyppigere i diskusjoner og aktiviteter som støtter individualiseringen av symbolbruken.

Tolking av grafen til den deriverte

En utfordring for undervisningsdesignet var å få grafen til den deriverte til å mediere monotoniegenskapene til den opprinnelige funksjonen. Når de to grafene tegnes i samme koordinatsystem vet vi fra den lokale instruksjonsteorien at en ikonisk translasjon (se s. 47 og Monk (1992)) kan bli sluttresultatet. Grunnen er at funksjonsverdien til de to grafene tolkes på to forskjellige måter. Funksjonsverdien til den deriverte er den momentane veksten, mens funksjonsverdien til den opprinnelige funksjonen har en annen tolking. Jeg designet aktiviteter som ga elevene muligheter til å eksperimentere med en dynamisk figur. Ved å arbeide med programvare i utforskende gruppeoppgaver var målet å få til en diskusjon om egenskapene. En av aktivitetene er gjengitt i episode 18 s. 77. Mot slutten av undervisningsperioden fikk elevene samme oppgave som i forundersøkelsen (se vedlegg) hvor de skulle tolke grafen til den deriverte. I oppgaven fikk de en figur som viste grafen til en derivert funksjon og elevene kunne velge mellom tre grafer for den opprinnelige funksjonen. 15 av elevene valgte den riktige funksjonsgrafen. Valget begrunnes, slik som i forundersøkelsen, gjennomgående ut fra fortegnet til funksjonsverdien. Flere av elevene velger å markere fortegnet på figuren før de trekker slutningen om at graf 2 må være riktig alternativ. AT er en av dem som har brukt fortegnet i valget sitt:

Episode 12

69.	AT:	Graf nr. 2 viser funksjonen fordi den deriverte er på den positive siden fram til x=6, før den går til den negative siden. Graf nr. 2 øker til x=6 før den synker.

Tre av elevene velger grafen i figur 4 mens resten hopper over oppgaven. Resultatet likner på det jeg fant i forundersøkelsen, men etter undervisningseksperimentet er det en større andel som velger riktig graf og bare to elever viser ikonisk transelasjon.

Definisjonen av den deriverte i den grafiske og symbolske diskursen

Det er et eksplisitt mål i læreplanen at elevene skal kunne gjøre greie for definisjonen av den deriverte. I den avsluttende testen var det bare tre av elevene som ga en fullstendig akseptert forklaring i den oppgaven som skulle teste det. I tillegg til de tre hadde 13 andre avgitt forklaringer som var upresise ytringer. En typisk ytring i denne kategorien er en akseptert forklaring på endringsraten som utelater en grensebetraktning. I noen tilfeller kommenteres grenseverdien med en kommentar om at intervallet blir lite og at vi slik ender opp med en momentan vekst. Andre greide ikke å realisere verken figuren eller symbolene slik at endringsraten fikk en god forklaring.

Episode 13

70.	EH:	Momentan stigningsvekst: For å finne den momentane stigningsveksten må man bruke delta (Δ) og deler y på x. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Det du gjør for å finne Δy og Δx. Da trekker du en linje l mellom de to punktene (A og B), deretter trekker du en

linje fra B langs y aksen der de møtes). Så trekker du en stiplet linje fra B mot y aksen og får f(x+h) og en linje mot x aksen og får x+h. Så trekker du du en linje fra A mot y aksen og får f(x) og en mot x aksen og får x. Punktet du finner fra A og B mot x aksen utgjør til sammen h.

Kommentaren fra EH viser hvordan forklaringen tar utgangspunkt i figuren og prøver å utnytte den. For EH medierer ikke figuren annet enn hvordan en kan tegne maken figur. Hun har ikke objektifisert koordinatsystemet med verdier. For EH representerer ikke lengden av linjestykkene verdier, så forklaringen hun gir baserer seg på å finne sammenhengen mellom symbolene i figuren. Det er gjennom mangelfull realisering av symbolene at hun får problemer.

Elevenes definisjon av den deriverte

I sluttfasen av undervisningseksperimentet ga elevene en skriftlig definisjon av den deriverte. Seks av elevene ytrer seg slik at de viser kjennetegn på måloppnåelse for den derivert som et diskursivt objekt, slik som i disse eksemplene:

Episode 14

71.	FR:	Den deriverte er stigningstallet til tangenter på bestemte punkt i en graf
72.	EI:	Den deriverte sier noe om stigningstallet til alle tangentene i en graf. Den viser når funksjonen stiger eller synker
73.	SI:	Den deriverte forteller oss stigningstallet til alle tangenter. Hvis vi skal lese av den deriverte av en funksjon vil den fortelle oss når funksjonen stiger og synker eller om den verken stiger eller synker

I ytringene over benyttes «den deriverte» som substantiv, et tegn på en objektifisering. Substantiveringen kan også være frasedrevet og adaptert, men tilfellene over viser ytringene med «den deriverte» knytta til praktisk bruk av, eller egenskaper ved, den deriverte funksjonen.

Når ytringene faller utafor kjennetegnene på måloppnåelse skyldes det at den deriverte er knyttet til et punkt og ikke en innkapsling av alle punktderiverte, en realisasjon eller direkte feil. Noen eksempler på det ytringer om den punktderiverte:

Episode 15

74.	EL:	Den deriverte er stigningstallet til tangenten i en graf
75.	ST:	Den deriverte det er et mål for hvordan en funksjonsverdi endrer seg i et bestemt punkt

Intervju viser at disse elevene ikke nødvendigvis oppfatter den deriverte som knyttet til bare ett punkt.

Episode 16

76. I: Du skriver i et bestemt punkt?

77. ST: Ja, men det punktet kan vi flytte rundt eller velge akkurat som vi vil...alle er i den deriverte

I definisjonene til elevene finner vi for det meste referanser til anvendelsen av den deriverte. For elevene faller det naturlig å tenke på den deriverte som noe vi bruker i funksjonsanalysen. Noen eksempler som refererer til anvendelsen er disse definisjonene:

Episode 17

78. SZ: man skal derivere når man vil finne toppunkt, bunnpunkt eller monotiegenskapene

79. AN: Den deriverte til en funksjon viser hvor linja stiger og hvor linja synker den linja finner man med formelen $(x^n)´=nx^{n-1}$

80. JC: Den deriverte viser egenskapene til den opprinnelige grafen, som når den synker eller stiger og topp og bunn

I matematikkoppgavene er det anvendelsen av den deriverte som er det sentrale. Det er derfor naturlig at de fleste forsøkene på en definisjon ender opp i en beskrivelse av hva den deriverte kan brukes til for de av elevene som ikke har objektifisert den deriverte.

Refleksjoner over teknologiens rolle

Det teknologiske miljøet var et viktig utgangspunkt for gjennomføringen. Både det teoretiske grunnlaget og aktivitetene i HLB bygde på forventninger til hvordan IKT kunne bidra til elevenes objektifisering.

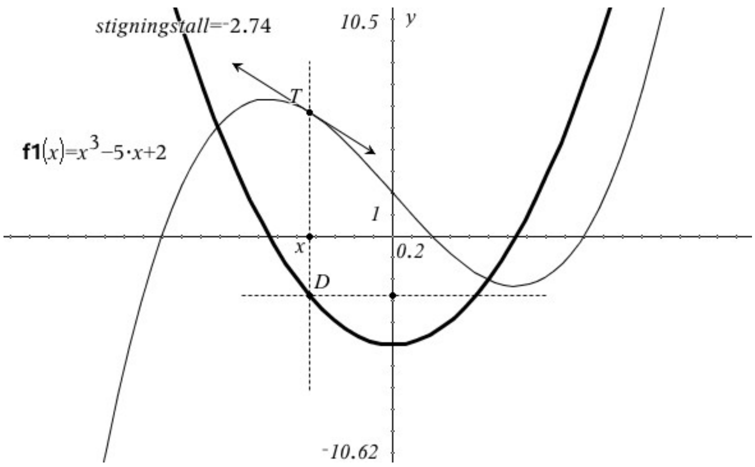
Konsekvensen av at elevene ikke hadde egne datamaskiner ble en avgrensa bruk. I introduksjonsfaser demonstrerte jeg aktiviteter ved bruk av datamaskin og projektor. Det ble gjort på klasserommet, men for egne aktiviteter måtte elevene forlate rommet og gå til datarommet. Innredningen, med egne bord for datamaskin og tastatur, er ikke egna for verken notater eller oppgaveregning. Timene ble oppstykket ved at elevene måtte gå fra og til. Den sporadiske bruken førte til problemer med å få elevene til å utnytte mulighetene i programvare til å løse matematikkoppgaver og konstruere egne aktiviteter.

Jeg har allerede vist til et tilfelle hvor medieringen førte fram mot et nytt tangentobjekt. Animasjonene og aktiviteten med den karikerte bilen som kjører med en tangent på grafen ble funnet igjen som metafor hos mange av de involverte. Det er flere liknende eksempler, men jeg vil reflektere over en del IKT-aktiviteter som ikke fungerte etter antakelsene.

Den deriverte som innkapsling av stigningstallet til alle tangentene

En av IKT-aktivitetene var designet for å støtte objektifiseringen av den deriverte som en innkapsling av alle punktderiverte. Skjermbildet under er hentet fra aktiviteten som også visualiserer det numeriske stigningstallet til tangenten i en graf. Aktiviteten er delvis bygd etter anbefaling og ide fra Tall (1986, 2010) og oversatt til en demonstrasjon i Nspire. For å støtte en innkapsling av alle punktderiverte i form av en ny funksjon ble det tatt utgangspunkt i grafen til funksjonen som dannet utgangspunktet for den deriverte. I et flyttbart punkt, T, var det tegnet en tangent. Ei linje parallell med y-aksen ble konstruert gjennom tangeringspunktet. Stigningstallet til tangenten ble overført til y-aksen slik at punktet med x-koordinat lik tangeringspunktets x-verdi og y-verdi lik stigningstallet til tangenten, kunne markeres. Dette punktet er et punkt på grafen til den deriverte. Ved å flytte på tangeringspunktet var aktiviteten ment å gi en realisasjon av grafen til den deriverte som samlingen av alle stigningstallene til tangentene. Grafen til den deriverte kunne enten tegnes opp eller markeres ved sporing av punktene. Elevene ble først oppfordret til å spore punktet for så å tegne opp den deriverte og se at den stemmer med de spora punktene. Det var mulig for elevene å forandre den opprinnelige funksjonen. Ingen gjorde det, så alle brukte tredjegradsfunksjonen gjennom aktiviteten.

Et annet mål for aktiviteten var å se sammenhengen mellom de to grafene og avgjøre hva den deriverte kan fortelle oss om den opprinnelige funksjonen.



Figur 5.16: Stigningstall grafisk framstilt

En episode, som igjen er med på å eksemplifisere hvor vanskelig det kan være å få oppfylt antakelsene i en HLB, finner sted når EB og JO arbeider sammen. Den starter med at de har problemer med hva som kan flyttes.

Episode 18

81. EB: (prøver å ta tak i flere punkt som ikke lar flytte på seg)

82. JO: Ta tak i x

83. EB Å ja...den går opp og ned...hva med strekene her?

84. JO: Det blir en parabel med et bunnpunkt

85. EB: Punktet D går opp og ned og lager parabelen.

86. JO: Og den deriverte blir ei rett linje

Begge mangler hva som er sammenhengen i den dynamiske situasjonen. Observasjonen til EB om at punktet D går «opp og ned» er en observasjon løsrevet fra sammenhengen aktiviteten var ment å vise. Den samme ytringen går igjen hos to andre grupper som ble observert. Overføringen av stigningstallet langs y-aksen tas det ikke hensyn til. Det som ender opp som en ledende visuell mediator er den deriverte i form av en parabel. I den avsluttende ytringen viser JO til at «den deriverte blir ei rett linje». Gjennom å fokusere på parabelen betegner den grafen til den opprinnelige funksjonen for JO og han konkluderer med at den deriverte av en funksjon med parabel som graf er ei rett linje. Når parabelen tar oppmerksomheten kan det skyldes at den tegnes med ei breiere strek enn den andre grafen.

Slik som i alle aktivitetene var ikke denne helt mislykka i forhold til intensjonene. Flere elever oppdaget den ønska egenskapen. Blant dem var eleven JA:

Episode 19

87. JA: Punkt D viser den deriverte av tangenten i et gitt punkt...D får samme y- verdi som stigningstallet til tangenten...ja, og da får vi tegnet opp den deriverte...

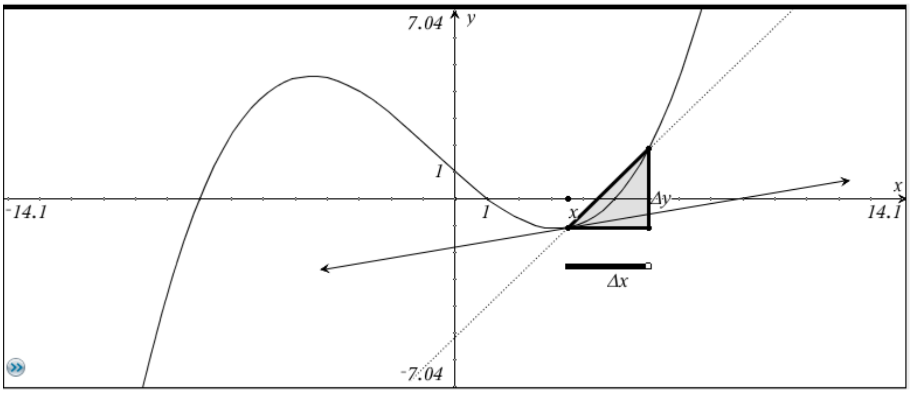
Overgangen fra sekant til tangent som dynamisk aktivitet

En av aktivitetene hadde som mål å visualisere hvordan vi kan finne den deriverte i et punkt som en tangent gjennom en grensebetraktning av en sekant. I tillegg til å betrakte situasjonen i ett punkt, kan sekanten og stigningstrekanten flyttes rundt. I instruksjonsmaterialet ble det oppfordret til å se på sekantene i flere punkter. Intervallet sekantene blir tegnet over kan forandres ved å forandre en glider på skjermbildet.

Antakelsen for aktiviteten var at en interaksjon hvor Δx kunne forandres ville støtte den statiske framstillinga av figuren i boka og dynamikken ville hjelpe elevene i overgangen fra sekant til tangent.

Forundersøkelsen viste et behov for støtte til overgangen fra sekant til tangent. Da elevene skulle beskrive den statiske figuren fra boka og denne overgangen greide ingen av elevene å gi en fullgod forklaring, slik også Tall (1985) fant i sin undersøkelse.

Jeg har valgt ut en episode som viser at antakelsen ikke kunne verifiseres. I en av aktivitetene arbeidet elevene med en ferdig laget figur hvor grafen til en funksjon var



Oppgaveteksten

Informasjon

- Flytt punktet x ved å ta tak i punktet.
- Du kan forandre Δx ved å flytte på punktet lengst til høyre på linjestykket
- Tangenten er tegnet i punktet for x

Oppgaver

- Hvilken sammenheng er det mellom trekanten og stigningstallet til tangenten?
- Hva skjer når du gjør Δx mindre?
- Hvorfor kaller vi Δy/Δx gjennomsnittlig vekstrate (eller veksthastighet)?
- Hvorfor kaller vi stigningstallet til tangenten momentan vekstrate (= veksthastighet)?

Figur 5.17 : Definisjonen av den deriverte

gitt. Gjennom et punkt gikk det en tangent og en sekant. Sekanten gikk i tillegg gjenom et punkt til høyre for tangeringspunktet. Stigningen til sekanten var markert med horisontal og vertikal forandring. Grafisk var de to avstandene markert sammen med linjestykket mellom de to skjæringspunktene mellom grafen og sekanten. Resultatet ble en markert trekant for å grafisk illustrere stigningen. Skjermbildet viser et eksempel på en situasjon. Elevene kan flytte punktet x og dermed flytte utgangspunktet for sekanten. Linjestykket, markert med Δx, justerer horisontal avstand mellom sekantpunktene. Avstanden Δx kan forandres ved å flytte endepunktet markert med hvit sirkel. Tangenten i punktet er tegnet med piler i begge endene og sekanten er markert med stipla linje.

Instruksjonene som fulgte aktiviteten var designet ut fra målet om å vise grenseprosessen mellom sekanten og tangenten i en grafisk diskurs. Observasjonene fra denne aktiviteten viste at et klart flertall av elevene startet direkte med å manipulere figuren uten å lese instruksjonene.

Den første episoden viser hvor uforutsigbar den medierende effekten av en figur kan være. Helt i starten av arbeidet med denne oppgaven oppsto det en forvirring blant to av elevene:

Episode 20

88. JC: Her er det en trekant. Kanskje vi skal bruke pythagoras? Kan vi det?

89. AK: Er det en rettvinkla?

90. JC: Da kan vi enkelt finne den siste sida.

Den umiddelbare responsen ved synet av hele figuren var knyttet til trekanten. I skolediskursen kobles trekanten direkte til at oppgaven må ha noe med den å gjøre. For JC blir spørsmålet om hva vi vanligvis gjør med en trekant utslagsgivende for ytringen om å «bruke pythagoras». Videre følger neste steg. I geometrioppgavene er det en manglende sidelengde en vanligvis ønsker å finne ved å bruke Pythagoras sin setning. Trekanten leder til en realisasjon av en geometrioppgave og ikke forholdet mellom katetene som igjen gir hvor mye linja stiger.

De to elevene fortsetter etter å ha funnet ut at konteksten var derivasjon og ser mer på instruksjonene:

Episode 21

91. JC: Nei...kanskje vi skal se mer på oppgaven.

92. AK: Det er ikke noe som skal regnes ut. Vi skal se på hva som skjer. Jeg flytter på x...

93. JC: Ok

94. AK: Nå kan du se at trekanten skifter form og ...forandres

95. JC: Arealet forandres også.

96. AK: Arealet og formen forandres ...mmm

Her finner vi et eksempel på observasjonen som jeg fant hos flere grupper. Det legges lite vekt på de skriftlige instruksjonene. Fokus settes på det som forandrer seg når punktet x flyttes. I dette bildet er det trekanten som visuelt gjennomgår den største forandringen. Trekanten har en framtredende medierende effekt slik den er tegnet. De kraftig tegna sidekantene og det grå arealet innafor gjør at trekanten dominerer visuelt.

Sjøl om elevene ikke lenger knytter trekanten til en geometrisk diskurs, viser episode 21 med JC og AK at trekanten er i øyefallende. Nå er det i form og areal forandringene observeres.

Andre elever observerte og vektla andre forandringer og sammenhenger, slik som disse elevene:

Episode 22

97. TH: Når stigningstallet til tangenten blir høyt blir Δy lengre, uavhengig av Δx. Δy beveger seg i forhold til stigningstallet i tangenten.

98. MG: Når Δx blir mindre blir hele trekanten mindre, men Δy beveger seg fortsatt etter stigningstallet til tangenten.

99. MJ: Når vi endrer på Δx endrer også Δy seg, mens stigningstallet til tangenten er den samme.

Når denne aktiviteten ikke førte til fram mot antakelsene i HLB skyldes det flere faktorer. For det første gjør den framtredende markeringen i figuren at den betegner det geometriske objektet trekant. Som en grafisk realisasjon av stigningen til sekanten er figuren mislykket. I flere tilfeller leder også trekanten til assosiasjoner fra den geometriske diskursen og knyttes til metoder som ikke har tilhørighet denne konteksten.

Den innvidde diskursdeltakeren vil finne de sammenhengene aktiviteten er ute for å vise. Paradokset blir da at for å ha et læringsutbytte av aktiviteten må en allerede ha individualisert nettopp målet med aktiviteten.

Lokal linearisasjon

Overgangen mellom tangent og grenseobjektet ved lokal linearisasjon var muliggjort ved bruk av teknologi. Innzoomingsaktiviteten, samt det å kunne få beregnet stigning numerisk, ble gjort mulig ved TI-Nspire.

Episodene 23 viser hvor viktig de forskjellige realisasjonen er for å individualiserer et diskursivt objekt ved sammenlikning og innkapsling. Under zoomingen i aktiviteten arbeidet HW og MJ sammen:

Episode 23

100. HW: Ja, hva er det vi observerer?

101. MJ: Vi får et klarere bilde...og grafen blir rettere...stigningstallet blir klarere

102. HW: Hva for et stigningstall?

103. MJ: Stigningstallet vi ser

104. HW: Jeg ser ikke noe tall

105. MJ: Det er det stigningstallet til grafen...vi kan få det fram (velger å få markert stigningstallet i menyen)

106. HW: Okei, der får vi det...jaja, det er hvor bratt det er

Det er grunn til å anta at betegneren «stigningstall» ikke har en visuell realisasjon for HW. Når HW «ikke ser noe tall» er det et uttrykk for både en manglende objektifisering av stigningstall og en manglende visuell realisasjon av stigningstallet til et rett linje. Gjennom aktiviteten og dialogen med MJ blir det numeriske stigningstallet sammenliknet med den grafiske stigningen.

En analyse av IKT som redskap i første syklus

Teknologien spilte en viktig rolle i flere aktiviteter. Å få tegnet tangenter og få beregnet både stigningstall og tangentens funksjonsuttrykk, var viktig gjennom undervisningseksperimentet. Aktiviteten hvor «bilen» ble introdusert som metafor viste seg også viktig som medierende faktor. I flere episoder ble «bilen» brukt som diskursiv hjelp i kommognisjonen:

Episode 24

107. BG: Akkurat som den bilen. Den kjørte bortover streken. Opp og ned, opp og ned (viser bevegelsen med handa). Slik blir det med tangentene også.

108. JJ: Ja, den er en bratthetsmåler

I ytringene over henvises det til bilanimasjonen som en viktig medierende faktor.

Overgangen mellom tangent og grenseobjektet ved lokal linearisasjon var også muliggjort ved bruk av IKT. Innzoomingsaktiviteten, samt det å kunne få beregnet stigning numerisk, var viktig.

Lokal linearisasjon ved innzooming fungerte etter antakelsene. Jeg observerte ikke tilfeller hvor aktivitetene hadde utilsikta eller uheldige utfall.

Bruken av teknologien er også avgjørende for å få fram alle realisasjoner og kunne manipulere funksjoner, men jeg vil fokusere på de tilfellene hvor antakelsene ikke ble som forventa.

Observasjonene, som jeg har beskrevet i episodene under overgangen mellom sekanten og tangenten, understreker instruksjonismens problem. Design av aktiviteter og instruksjoner tar utgangspunkt i antakelser om elevens forestillinger og mulige handlinger (Reiber, 1994). Gjennom å gjøre antakelser på vegne av andre og så utforme instruksjoner basert på det, kan undervisningsdesignet ende opp uten den tilsikta effekten. Ikke minst gjelder det de matematiske konklusjonene. Artigue advarer om at «if visualization brings out some interesting perceptual phenomena, it does not provide their mathematization» (2005, s. 235). Det er en viktig påminnelse. Episodene viser at matematikken bak kommer ikke av seg sjøl. I tilfeller førte aktiviteten elevene bort fra hva som var målet. Elevene oppdaget sammenhenger som var uten matematisk betydning og det førte til feilslutninger. Utgangspunktet med antakelsen om at dynamikk og medierenede figurer er nyttige i seg sjøl må revurderes.

Designet bygde på det som var visuelle mediatorer for den som allerede hadde individualisert objektene. Den samme medieringen forventes også hos dem som ikke er fullstendige diskursive deltakere. I en aktivt utforskende undervisning identifiseres ofte to typer aktiviteter i et IKT-miljø: en undersøkende og en oppfinnende tilnærming (bl. a. Doerr, 1995, 1997; Doorman, 2005). En undersøkende aktivitet bærer preg av at elevene oppdager mens de utforsker sammenhenger mellom realisasjoner. Meningen i aktiviteten er lagt der av instruktøren og skal oppdages. Eleven skal «gjennomskue» ekspertens modell. Med tilnærmingen gjennom oppdagelse forventes det at eleven skal individualisere formelle begrep ut fra å bli presentert for visualiseringer av begrepet i forskjellige designa miljø. Elevene kan bruke miljøet for eksperimentering og simuleringer og gjennom aktiviteten «oppdage» de matematiske sammenhengene. I ettertid ser jeg at aktivitetene som ikke fungerte følger denne modellen.

Det andre alternativet er en oppfinnelsestilnærming hvor eleven ved egen aktivitet bygger opp begrepene. Gjennom aktiviteten går eleven fra det intuitive til det formelle. I neste design vil aktivitetene få preg av en oppbygging av modellen slik at det som skal observeres trer tydeligere fram.

Konsekvenser for neste syklus

Den lokale instruksjonsteorien tar utgangspunkt i tangenten og hvordan tangentens egenskaper kan utnyttes i en funksjonsanalytisk sammenheng. Erfaringen gjennom denne syklusen viser at det gir elevene et godt utgangspunkt. Elevene kunne, i stor grad, visualisere tangenter etter en kort oppstartperiode. Tangentens egenskaper i den grafiske diskursen knyttet også elevene til den opprinnelige funksjonens monotoniegenskaper. Tangentens stigning, numerisk beskrevet som stigningstall, ga elevene en verdi for funksjonens stigning.

Antakelsene om utfordringenes karakter i den lokale instruksjonsteorien bekreftes gjennom observasjonene. De forventa utfordringene gjenfinnes hos elevgruppa i undersøkelsen og HLB gjør i liten grad utfordringene mindre. Å oppnå en objektifisering, fra prosess til tingliggjort objekt, er utfordringen for den hypotetiske læringsbanen. Erfaringene fra denne syklusen viser at en objektifisering av funksjonen, slik at handlinger med symbolet $f(x)$ kan gjennomføres, ikke oppnås for flertallet av elevene. At elevgruppa viste flere tegn på en bedre symbolbehandling enn gruppa i forundersøkelsen er positivt, men for få elever viser kjennetegn på å ha nådd målet som ble satt i HLB.

Rekkefølgen og strukturen i undervisningsdesignet, er bygd med disse utfordringene som forutsetning. Det er ikke spor i datamaterialet som viser at rekkefølgen eller strukturen må forandres. Tvert i mot viser observasjonene at en omorganisering av rekkefølgen vil være umulig. Antakelsene om utfordringer knytta til objektifiseringen impliserer direkte rekkefølgen og strukturen. Da de bekreftes forsterkes sekvensen og strukturen i den lokale instruksjonsteorien. Det er objektifiseringen av funksjonen, de semiotiske problemene, instruksjonene og diskursovergangene som må forbedres i HLB.

Det er antakelsene om den rollen teknologien spiller som må revurderes. Den antatte medieringen feiler i flere tilfeller og en ny strategi må finnes i et nytt design.

Hovedmålet var å designe et undervisningsopplegg hvor elevene kunne objektifisere den deriverte. Det er et høyt mål, men i forhold til resultatet i forundersøkelsen, har flere elever vist kjennetegn på måloppnåelsen. Sjøl om de skriftlige definisjonene av den deriverte i sluttesten ikke var presise i en matematisk diskurs, satt en majoritet av elevgruppa igjen med et derivasjonsobjekt som var robust nok for anvendelse videre. Etter at eksperimentet ble avsluttet fikk elevene en prøve hvor de skulle anvende den deriverte i analyse av egenskapene til funksjoner. Resultatet var overbevisende.

6 DET ANDRE UNDERVISNINGSEKSPERIMENTET

Den andre syklusen ble også gjennomført blant ei gruppe elever i matematikkfaget 1T. Elevene gikk ved samme skole som i forrige syklus, men undervisningseksperimentet ble utført året etter det første. Gjennomsnittskarakteren fra grunnskolen hos de to elevgruppene var ganske lik.

Den største forskjellen mellom de to elevgruppene var at elevene i andre syklus hadde fått utlevert sin egen bærbare datamaskin. Elevene tok maskinene i bruk i alle fag like etter skolestart. Programvaren som ble benyttet gjennom undervisningseksperimentet, TI Nspire, fikk elevene installert fire uker før eksperimentet tok til. I tida før oppstart hadde de brukt programvaren i begrenset omfang. Etter å ha fått Nspire på maskinene fikk elevene demonstrert funksjonaliteten i de forskjellige programmodulene. I alle demonstrasjoner i klassen, hvor det var naturlig å benytte digitale verktøy, ble Nspire valgt. Elevene fikk ikke kursing i bruk, men tok etter det som ble gjort i plenum og forsket sjøl ut andre bruksområder. Etterhvert måtte de levere oppgaveløsninger laget i Nspire. Innleveringene ble gjort digitalt i skolens LMS, Fronter. Bruken av programvaren gikk uten nevneverdige utfordringer. Programversjonen, 2.0, var ny i forhold til året tidligere.

En hypotetisk læringsbane for andre syklus

Under beskrivelsen av forrige undervisningssyklus ble læringsmålene, og kjennetegnene på om de ble nådd, beskrevet. De samme målene og kjennetegnene gjelder også for denne syklusen. Strukturen og den sekvensielle rekkefølgen beholdes også. Forandringen fra forrige gang er mer vektlagt muntlig aktivitet og en ny rolle for det teknologiske miljøet.

En økt muntlig aktivitet vektlegges slik at elevene får uttrykt de matematiske ideene sine og at de deles i fellesskapet. Det antas å være støttende for objektifiseringen.

De laborative aktivitetene fra første syklus, hvor elevene fikk ferdig konstruerte visualiseringer, og ble instruert gjennom ei antatt resonnementsrekke, forkastes i den nye HLB. Aktivitetene erstattes av en oppfinnelsestilnærming hvor eleven enten konstruerer dynamiske situasjoner fra grunnen eller bygger ut halvferdige konstruksjoner.

Antakelsen om artefakters rolle for å nå målene som er satt opprettholdes. Når elevene har egne datamaskiner med programvaren installert gir det nye muligheter. Elevene vil alltid ha Nspire tilgjengelig og kunne utnytte programvaren som verktøy. De vil også kunne bli bedre kjent med bruken og ha breiere erfaring og utnyttelsespotensiale er større enn i forrige syklus.

Programvareversjonen gir også nye muligheter for IKT som artefakt. Mens versjonen som ble brukt forrige gang hadde en begrensa tekstbehandler og manglet farger, har denne versjonen en bedre mulighet for å skrive matematikk og kunne framheve figurer med forskjellige farger. HLB vil legge vekt på produksjon av skriftlige oppgavesvar og kommentarer gjort i Nspire. Når elevene må bruke programvaren i kommunikativ hensikt tvinges til de til en distinkt symbolbruk. Antakelsen i HLB er at en slik diskursiv deltakelse vil føre til en objektifisering og symbolrealisasjon.

Når matematiske utregninger og symbolbehandling er innebygd i Nspire i form av en kraftig CAS-modul antar jeg også at en del av fokuset på prosedyrene kan svekkes. I CAS-kommandoene inngår de matematiske objektene direkte i syntaksen. Ved å måtte forholde seg til det matematiske objektet i kommandoer antas det å være en støtte ved individualiseringen av diskursive objekt.

En annen viktig antakelse er at den utvida funksjonaliteten i programmets tekstbehandler støtter objektifiseringen. I tekstbehandleren kan vanlig tekst, kalkulasjoner og all CAS-funksjonalitet blandes sammen til multimodal tekst. Matematiske kommandoer kan skrives inn og bli beregnet i matematikkbokser i teksten. Det gir utvida kommunikative muligheter som antas å være viktige for deltaking i diskursen.

En annen viktig funksjonalitet i Nspire er den grunnleggende koblingen mellom programvarens variabler. Er utregningene eller symbolbehandlingen i tekstbehandlermodulen koblet til en figur eller formel i en annen modul, oppdateres alle verdier i sanntid. En multimodal tekst i tekstbehandleren oppdateres derfor ved manipuleringer i en tilhørende figur. Koblingen mellom de forskjellige realisasjonene trer tydelig fram og kan hjelpe i individualiseringen av de matematiske objektene.

Gjennom dette undervisningsdesignet har elevene egen programvare tilgjengelig. Det gjør at de kan produsere egne digitale dokument som kan leveres inn. Dokumentet kan kontrolleres av læreren og brukes i mikrosykluser. I tillegg kan dokumenter deles blant elevene. Det gjør det mulig med kommentarer både fra lærer og medelever. En antakelse er at diskusjon og tilbakemeldinger beriker diskursen og gjør deltakerrollen mer tydelig.

Gjennomføring

Igjen ble undervisningseksperimentet starta med ei undervisningsøkt på tre klokketimer. Etter oppstarten, med en fagdag, fulgte åtte undervisningsøkter. Hver av undervisningsøktene var på 80 minutter. Til slutt ble det avholdt en prøve på 80 minutter hvor sluttesten utgjorde en del av prøven.

Introduksjon av funksjonsobjektet

I introduksjonsfasen ble elevene, i likhet med i første syklus, presentert for forskjellige funksjoner. I to aktiviteter arbeidet de med å finne en funksjon som ga sammenhengen mellom antall personer tilstede i et selskap og antall håndtrykk. I en annen aktivitet skulle de finne sammenhengen mellom en sidelengde i et rektangel med gitt omkrets og areal. Gjennom hele perioden var individualiseringen av funksjonsobjektet sentralt.

Tangentobjektet som utgangspunkt

Ved oppstarten ble det igjen startet med at elevene skulle tegne tangenter i punkter på en sirkel og på en graf. I forrige syklus gikk elevene i gang med oppgaven uten kommentarer. Utfordringene oppsto først i punktene hvor overgangen fra sirkeltangenten ble for store. Metoden for tegning av tangenter besto for de fleste i å tenke seg halvsirkler på grafen og konstruere sirkeltangenter på den. Når elevene ikke fikk tegnet tangenter skyldes det at denne metoden sviktet. Denne gangen oppsto det, stikk i strid med antakelsene, en helt annen situasjon. Oppgaven førte til full forvirring. Klassen ble samlet og i klassediskusjonen ble det hevdet at tangenten enten var helt ukjent eller svært vagt. Ingen hadde konstruert en sirkeltangent. Nå er ikke det lenger et læringsmål for elevene i grunnskolen. Rekkefølgen i designet ble spontant forandret og elevene fikk først i oppgave å tegne tangenter med Nspire. Etter å ha tegnet tangenter, flyttet rundt på tangenter og gjort aktiviteten med «bilen» som kjører på grafen, gikk de tilbake til den opprinnelige oppgaven. Elevene skulle på egen hand tegne tangenter på papiret. De fikk også i oppgave å sammenlikne tangentene de tegnet på papiret med tangentene tegnet i Nspire.

Endringsrate i en grafisk og numerisk diskurs

I forrige syklus oppsto noen av problemene ved endringsraten ved manglende realisering av symbolene som ble brukt for å skrive endringsraten. I utformingen av designet ble det lagt vekt på både å realisere symbolene og knytte bruken til rateobjektet. Gjennom å bruke symbolene i tekst, og visualisere den numeriske diskursen grafisk, ble det antatt at aktivitetene kunne støtte en sammenslåing av de to diskursene.

Rateobjektets overgang mellom den grafiske, numeriske, verbale og fysiske diskursen ble introdusert med en felles gjennomgang. Læreren viste hvordan en kunne løse eksemplet med tankbilen (se beskrivelsen forrige syklus s. 58) ved bruk av Nspire. Språket som ble brukt var bevisst, hvor all symbolbruk som betegnet et objekt ble omtalt med et substantiv og tjener som eksempel på diskursen gjennom hele undervisningseksperimentet.

Oppgaveteksten hadde jeg skrevet ferdig skrevet i Nspire og svarene ble fylt ut i plenum. Figur 6.1 gir et utdrag. Oppgaveteksten er utheva og svaret ble skrevet inn etter diskusjon. Blandingen av tekst og matematikkbokser fungerer slik at en kan sette inn en matematikkboks i teksten ved et tastetrykk. Funksjonen for hva som er igjen på tanken er definert i funksjonen *f1(x)*. Ved å skrive inn *f1(3)* blir svaret beregnet og skrevet med rødt. Det som skjer er at prosessen trer i bakgrunnen, svaret og tolkingen blir det viktige. Symbolet kan benyttes diskursivt og prosessen, beregningen av verdien, tar programvaren seg av. Hva som skjer innkapsles i en svart boks og resultatet kan utnyttes uten å ta det tankemessige avbrekket det er å regne ut (Buchberger, 1990). Løsingen av oppgave c over ble derfor presentert slik av meg som faglærer:

a) Hvor mye er det igjen på tanken etter 3 minutter

Etter 3 minutter er det igjen **f1**(3) = 4662.87 liter

b) Hvor mye lekker ut mellom 10 og 20 minutter etter veltet?

c) Hvor mye lekker ut mellom 30 og 40 minutter?

Figur 6.1: Eksempel fra notatmodulen

Episode 25

109. L: Da tar vi bare hvor mye eplesaft det var etter 30 minutter og det er *f1(30)* (skriver: Etter 30 min *f1(30)*). Så finner vi hvor mye det var igjen etter 40 minutter (skriver: Etter 40 min *f1(40)*) og så trekker vi fra.

110. L: Vi kunne også ha skrevet det direkte (skriver: Eller *f1(30)-f1(4)*)

c) Hvor mye lekker ut mellom 30 og 40 minutter?

Etter 30 min **f1**(30) = 2487.75

Etter 40 min **f1**(40) = 1971.3

Det rant ut: 2487.75−1971.3 = 516.45

Eller **f1**(30)−**f1**(40) = 516.452

Figur 6.2: Eksempel på bruk av matematikkbokser i teksten

Eksemplet viser hvordan symbolet ble tatt inn i språket og hvordan det ble handlet direkte med symbolet. Prosessen kom i bakgrunnen.

Grenseobjektet ved lokal linearitet

Grensebetraktningen av tangenten som lokal linearitet ble gjennomført nesten på samme måte som i forrige syklus.

I den grafiske diskursen sto overgangen mellom sekanten og tangenten sentralt. Flere dynamiske figurer ble konstruert av elevene for å støtte kommunikasjonen om hva som skjer. I tilknytting til de grafiske aktivitetene ble det også designet numeriske, verbale og fysiske realisasjoner i de samme skjermbildene. Gjennom å se flere realisasjoner av det samme objektet og diskutere egne handlinger i aktivitetene var en objektifisering av grenseobjektet målet.

For grenseaktivitetene er utgangspunktet å se på den lokale lineariteten og hvordan tangenten faller sammen med grafen til funksjonen. Tangentens grafiske realisasjon vil være viktig for grenseprosessen i aktiviteten, men den er også et resultat av aktiviteten. Gjennom å zoome inn og se at tangenten faller sammen med grafen i et intervall vil det visualiseres hvordan den kan tegnes i forhold til grafen. Konklusjonen fra den lokale instruksjonsteorien, og resultatet fra forrige syklus, antyder at elevene individualiserer tangentobjektet gjennom innzoomingsaktiviteten. Antakelsen er derfor at aktivitetene i HLB hjelper elevene å realisere tangenten som grenseobjektet i et punkt på grafen.

Grenseobjektet i de andre diskursene skal støttes av det grafiske objektet. Gjennom handlinger hvor flere realisasjoner er vist samtidig antas det mulig å vise sammenhengene for å oppnå en overgang mellom diskursene.

Undervisningsdesignet i denne syklusen fulgte i stor grad den forrige. Elevene zoomet seg inn på tangeringspunkter og så på hvordan tangenten var et uttrykk for grafen.

Objektifiseringen av den deriverte fra punkt til funksjon

I avslutningen ble det prøvd å innkapsle alle punktderiverte i en funksjon etter den lokale instruksjonsteorien. I den nye HLB fikk aktivitetene en annen utforming. Tilnærmingen gjennom egen konstruksjon av aktiviteten, oppfinnelsesmodellen, ble lagt til grunn. Det ble også utviklet flere nye aktiviteter for å støtte innkapslingen til et funksjonsobjekt. Jeg vil presentere aktiviteten når heg reflekterer over den andre syklusen i neste kapittel.

Refleksjoner over andre syklus

Elevenes visuelle realisasjon av tangenten

Den lokale instruksjonsteorien antar tangentobjektet som diskursiv rot for objektifiseringen av den deriverte. I denne syklusen har HLB som mål at elevene skal ha en intuitiv visuell realisasjon for den grafiske tangenten.

Etter introduksjonen av tangenten tegnet alle elevene tangenter hvor avviket fra en korrekt tangent var ubetydelig. Når elevene kommenterte resultatet hadde alle unntatt en elev med en kommentar om unøyaktigheten i det å tegne for hand. Den typiske kommentaren kan vi la AU eksemplifisere:

Episode 26

111. AU: Tangentene jeg tegnet på arket er ganske lik tangentene som Nspire laget. Å tegne tangenter for hånd er nesten umulig om du har tenkt å få de perfekt. Selv om de ser ganske riktige ut med det blotte øyet.

AU ser hvordan tangentene skal se ut, men kan ha problemer med å få tegnet linja akkurat som han vil. Kommentaren viser at han har en visuell realisasjon av tangenten. Den samme kroppslige[26] visuelle realisasjonen hadde FG individualisert:

Episode 27

112. FG: Jeg bare føler hvordan de skal se ut...det er vanskelig å forklare

Flere andre elever brukte også uttrykket «følelse», blant annet FA, som ser ut til å ha individualisert tangentobjektet

Episode 28

113. I: Hvordan vet du hvordan du skal tegne tangentene?

114. FA: Egentlig føler jeg hvordan de skal være skal tegnes....de skal jo gå like langt ut...det er vanskelig å forklare, men ganske lett å se hvis du forstørrer....dem skal bli like...og så kan en godt tenk på den berg og dalbanevogna du kan kjøre med

115. I: Følelsen din...?

116. FA: Følelsen min er at den liksom går i samme retning som grafen...den skal jo ha samme stigningstallet eller veksttallet eller hva det heter som den linja...det kan vi zoome inn på å se...det er vel det jeg føler...at den legger seg over

Igjen benyttes ordet følelsen. Følelsen er knyttet til hvordan tangenten skal se ut. Gjennom aktivitetene har FA en visualisering av hvordan tangenten skal se ut. Det er et bilde som er støttet nettopp gjennom aktivitetene uten en formell matematisk definisjon av tangenten. I hennes forklaring finner vi «følelsen» knytta til to aktiviteter. Den ene er innzooming for å studere lokal linearitet. Den andre er aktiviteten med den «bilen» som kunne flyttes langs grafen til funksjonen.

Alle elevene viste kjennetegn på måloppnåelse for tangentobjektets visuelle realisasjon. Det at sirkeltangenten ikke var kjent for elevene viste seg ikke å være et hinder for måloppnåelse. Når elevene bestemte og tegnet tangentlinjene ut fra den visuelle eksemplifiseringen fra aktivitetene viste det seg å være en fordel. Tvilen om hvordan tangenter skulle tegnes viste seg i forrige runde å stamme fra metoden for tegning av sirkeltangenter. Det unngikk elevene denne gangen siden sirkeltangenten ikke var kjent for flertallet. Antakelsen i den lokale instruksjonsteorien om tangenten som diskursiv rot er styrket etter denne syklusen.

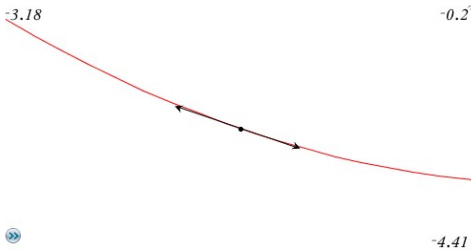
Overgangen fra tangent- til grenseobjekt

HLB har som mål å støtte overgangen fra en visuell realisering av tangentobjektet til

26 Embodied er uttrykk som benyttes på engelsk for kroppspåvirking. Se f. eks. Tall et al. (2008) . En slik bruk knytter det til en kroppslig følelse for egenskapene. Erfaringstilnærmingen blir viktig (Lakoff & Johnson, 1980).

både en numerisk og grafisk realisering av endringsraten. En objektifisering av et grenseobjekt som omfatter den momentane endringsraten er målet. HLB forutsetter at det kan skje ut fra tangentobjektet og lokal linearitet. Ved en slik objektivisering kan tangentobjektet knyttes til monotoniegenskapene til funksjonen.

For å utvide realisasjonstreet til tangenten, og støtte overgangen til grenseobjektet, inngikk både en aktivitet med innzooming av tangeringspunktet og flytting av den billiknende figuren.



Figur 6.3: Grafen etter innzooming

I en diskusjon mellom to av elevene kan det observeres at innzoomingsaktiviteten medierer en avgjørende egenskap ved tangenten. Elevene hadde zommet seg inn og studerte skjermbildet som er gjengitt i figur 6.3.

Episode 29

117. JO: På wikipedia står det at de ikke går gjennom mer enn et punkt, men hvorfor kan de ikke gå sånn? (tegner en tangent som står omtrent rett på grafen)

118. FG: Det blir jo helt feil...du ser det bedre når du zoomer inn (zoomer inn)...den gnir seg inntil grafen

119. JO: Okei...tangenten er nesten en del av grafen, ja...forresten står det det på nettet også

Episoden starter med en definisjon av tangenten JO har lett seg fram til på nettstedet til den danske utgaven av wikipedia. Der er tangenten definert slik: «En tangent er en ret linje, der berører en kurve i ét punkt»[27]. For JO har ikke den verbale definisjonen noen klar realisasjon før forklaringen i diskusjonen og det aktiviteten medierer. Kommentaren om at det står det på nettet også knytter seg til resten av definisjonen fra samme sted. Den fortsetter slik: «...og har samme hældning som kurven i dette punkt. Som det ses, kan tangenten godt røre kurven i andre punkter end netop dette, men i disse punkter vil den oftest ikke tjene som en tangent». Episoden viser samspillet mellom teksten, medeleven og den medierende figuren. JO kan sjøl trekke den kommognitive slutningen om at visualiseringen stemmer med definisjonen han leser. Interaktiviteten med programvaren viser tangenten og grafen i forskjellige skaleringer og er med på å realisere tangenten som en del av funksjonsgrafen.

Episoden er representativ for flere. Aktiviteten sørger for en visuell realisasjon av tangenten som gjør det mulig å tegne og «se for seg» egne tangenter. Også i forrige syklus bidro innzoomingsaktiviteten til individualisering av tangentobjektet som

27 http://da.wikipedia.org/wiki/Tangent_(geometri)

funksjonsvekst i et «lite» intervall. Konklusjonen er at aktiviteten bør inngå som en del av det teknologiske miljøet i undervisningen.

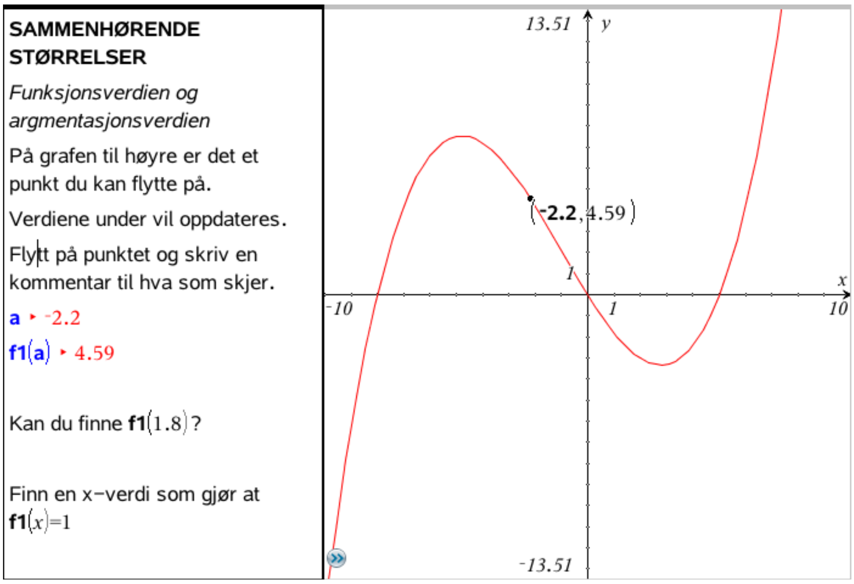
Individualisering av funksjonsobjektet

Et viktig mål for HLB var å legge til rette for en objektifisering av funksjonen. I den lokale instruksjonsteorien, og i forrige syklus, ble det vist hvor avgjørende en tingliggjøring av funksjonsobjektet er. I forrige syklus, forundersøkelsen og ut fra teoretiske betraktninger viste det seg at uten en realisering er betegneren *f(x)* et hinder for den videre objektifiseringen gjenom at *f(x)* realiseres som en prosess. Tiltaket i HLB er en vektlegging av den verbale diskursen hvor symbolet erstattes med et tilhørende substantiv. Det skjedde gjennom at jeg bevisst brukte slike ytringer både muntlig og i skriftlig materiale.

Samtidig ble måtte betegneren *f(x)* benyttes i varianter som *f1(x)*, *f2(x)* eller *h(x)* i kommandosyntaksen i programvaren.

Under oppstarten ble elevene, i likhet med i første syklus, presentert for forskjellige funksjoner. I én aktivitet arbeidet de med å finne en funksjon som ga sammenhengen mellom antall personer tilstede i et selskap og antall håndtrykk. I en annen aktivitet skulle de finne sammenhengen mellom en sidelengde i et rektangel med gitt omkrets og areal.

En oppstartsaktivitet, med mål å støtte individualiseringen av funksjonsobjektet, var en gruppeoppgave med bruk av IKT. Som et ledd i å vri aktivitetene mot en oppfinnelsestilnærming konstruerte elevene sjøl deler av figuren. De satte av ett punkt på en utlevert graf og lagret x-verdien til punktet som en variabel, *a*, som kunne benyttes i teksten, slik figur 6.4 viser et eksempel på.



Figur 6.4: Samhørende verdier

Når punktet på grafen ble flyttet fikk elevene oppdatert verdiene *a* og *f1(a)* i teksten. En episode som ble observert er denne:

Episode 30

120. JK: a er x-verdien og da finner dataen y-verdien

121. OH: Funksjonen gir oss y-verdien...sammenhengen. Det ser vi også på grafen.

122. JK: Det er enkelt å finne f1 av 1.8. Vi kan flytte på punktet...

123. OH: Eller vi kan lage en matematikkboks og skrive det inn. Da slipper vi å rote rundt

124. JK: ...trenger ikke rote. Det er bare å skrive 1.8 der også, så flytter punktet seg til rett plass

Episoden viser hvordan elevene kommuniserer om funksjonen, argument- og funksjonsverdien i flere realiseringer av objektene ved å utnytte kombinasjonen av tekst, matematikkbokser og den grafiske realisasjonen. Funksjonsverdien kunne de behandle og få beregnet numerisk ved å bruke omtrent samme symbol, *f1(x)*, som det formelle symbolet *f(x)*. Gjennom å gi kommandoen *f1(1.8)* får de det ønska svaret. Kommentaren til JK om at det ikke er nødvendig å flytte stemmer. Det er mulig å skrive inn x-verdien på plassen til x-koordinaten og punktet flytter seg dit. Etter å ha gjort begge deler sier JK:

Episode 31

125. JK: Det blir naturligvis det samme (peker på matematikkboksen og punktet på grafen)

126. OH: ja, det <u>er</u> jo det samme

I ytringen til OH om at «det <u>er</u> jo det samme» vises det til at det er realisasjoner av det samme i to forskjellige diskurser. Under denne aktiviteten fikk ikke elevene bruk for prosesser for å finne de numeriske verdiene. Episoden viser hvordan oppgaven kan la seg løse bare ved flytting av et punkt eller bruk av en kommando som utnytter symbolet *f(x)*. Funksjonsuttrykket var skjult for elevene.

I neste oppgave skulle elevene finne en x-verdi som gjør at *f1(x)=1*. De fleste elevene løste det med å flytte punktet slik at y-verdien ble 1. Ei gruppe med tre gutter løste samme oppgave med kommandoen *solve(f1(x)=1,x)*. De brukte CAS-funksjonaliteten til å løse oppgaven. I kommandoen inngår funksjonen som et objekt betegnet av symbolet *f1(x)*. Når noen andre spurte hva de hadde gjort var svaret:

Episode 32

127. OH: Det er bare å skrive solve, eller løs likninga på norsk, og skrive inn at du vil vite når funksjonen vi har blir 1

128. TK: Og så må du huske på komma x fordi det er x som er den ukjente

«Funksjonen» benyttes i en objektifisert form i ytringene og *f1(x)=1* oversettes med at «du vil vite når funksjonen vi har blir 1.» Symbolet blir nødvendig for kommunikasjonen og bruken tvinges fram av deltakerne. I andre episoder observerte jeg det samme. I kommunikasjonen med programvaren ble elevene tvunget til å oversette hva de ønsket utført til et symbolspråk som ligger tett opp mot den formelle matematiske syntaksen. Jeg vil vise flere eksempler i andre episoder.

Elevenes definisjon av en funksjon i sluttesten

I den avsluttende undersøkelsen beskrev 17 av de 22 elevene en funksjon med ytringer hvor sammenhengen mellom to størrelser inngår. Et eksempel er AU og GB.

Episode 33

129. AU: En funksjon viser oss sammenhengen mellom to størrelser. Det er typisk at de heter x og y. Sammenhengen kan vi se i en graf, tabell og sånn. Når vi vet x er det bare en y som «hører til»

130. GB: En funksjon er noe som viser oss sammenhengen mellom to størrelser. For eksempel strekning og tid, høyde og tid osv. Vi kan skrive den som f.eks. en graf.

AU viser til entydighet, men kravet om entydighet utelates i de fleste elevdefinisjonene. Det viste seg at det allikevel er en betingelse i elevenes funksjonsobjekt. GB, som utelot entydighetskravet i den skriflige definisjonen, kommenterer definisjonen sin slik i etterkant:

Episode 34

131. GB: Det må være en y-verdi til x-en ellers er det ikke en sammenheng og det kan ikke være to y-verdier for da er det umulig å si noe om sammenhengen.

Når så mange benytter ordet «sammenheng» eller liknende uttrykk kan det være styrt av ordbruken i timene. Vektleggingen og formuleringene gjenspeiles i besvarelsene. Et eksempel:

Episode 35

132. MB: Funksjonen forteller oss sammenhengen mellom to størrelser. Et godt eksempel er antall personer og håndtrykk som vi holdt på med. Da fant vi sammenhengen.

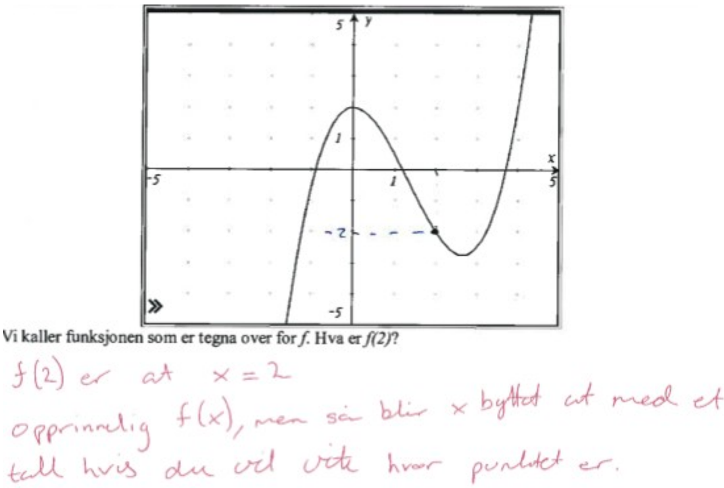
Her refereres det direkte til en kjent funksjon, som har den egenskapen at den kan «fortelle oss» en sammenheng.

Når bare fem av elevene utelater å nevne en sammenheng mellom to størrelser er det et resultat som skiller seg fra forrige syklus og forundersøkelsen. De fem viste til realisasjoner av funksjonsobjektet. Resultatet knytter jeg til den kommunikative bruken både mellom oss som var i klasserommet og med programvaren. Det samme resultatet kan observeres for hvordan betegneren *f(x)* realiseres for elevene.

Realisering av symbolet f(x) og f´(x)

Etter den andre syklusen ble betegneren *f(x)* undersøkt i samme oppgaver som etter den første syklusen. Ni av elevene gir en kombinasjon av svar som klart og entydig viser at betegneren er en realisering av et diskursivt objekt. Fire andre elever ytret seg slik at det kunne være tvil om hva *f(x)* entydig betegnet. Disse elevene ble intervjuet. Et eksempel er AK. I den ene oppgaven hadde han svart

Episode 36



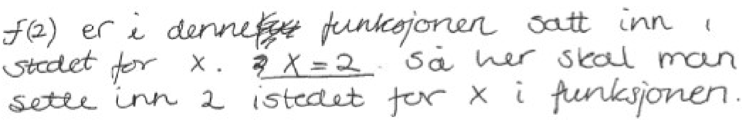
Figur 6.5: Svaret til AK

133. I: Kan du kommentere svaret ditt? Hva er f av to?

134. AK: Ja, det er jo sånn at vi kan finne verdien til funksjonen når vi vet x. Svaret blir jo -2 (tegner inn ei linje og -2 på arket sitt)

I likhet med AK viser de andre som ble intervjuet at de realiserer symbolet. Det betyr at hos 13 av de 22 elevene realiserer betegneren et diskursivt objekt og ikke en prosess. Igjen ser vi at de resterende elevene har individualisert funksjonen som en prosess. Eksemplene tilsvarer det som ble observert etter den første syklusen. BG og YT er begge eksempler på elever som har realisert funksjonen som en prosess. BG skriver:

Episode 37



Hun forklarer i intervju:

135. BG: Det er en umulig oppgave når jeg ikke vet hvordan jeg kan regne det ut

BG realiserer ikke funksjonsverdien i den grafiske diskursen og betrakter funksjonen som en numerisk prosess. For YT symboliserer *f(x)* eller *f(2)* funksjoner i seg sjøl.

Episode 38

f(2) er en ny funksjon der hvor vi har satt inn 2
som den ukjente variabelen.

Etter forrige syklus var det bare fire elever som ga svaret *f(2)=-2*. Fortsatt er symbolene utfordrende for mange elever, men sett under ett viser elevgruppa, i større grad enn i forrige syklus, tegn på måloppnåelse.

I den andre oppgaven ble elevene bedt om å tolke både *g(9)* og *g´(9)*. Etter forrige syklus var det bare to elever som greide den oppgaven. Nå finner ni elever korrekt svar ved å finne stigningstallet til tangenten direkte, men flere av elevene tar veien om et funksjonsuttrykk.

En av elevene, MG, hadde funnet riktig verdi for *g´(9)*, men ikke ved å utnytte stigningen til tangenten. Hun ble intervjuet etter å ha levert inn det skriftlige svaret.

Episode 39

Finn g'(9). Husk en kort forklaring.

Da må vi finne stigningstallet til tangenten i punktet x=9

$y = ax + b$ Stigningstallet er $\frac{x}{y} = \frac{9}{9} = 1$

For hvert steg bortover
stiger grafen med 1.

$g(x) = 1 \cdot x - 1$

Bruker formelen $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$g'(x) = 1$

$g'(9) = \underline{1}$

$\underline{\underline{g'(9) = 1}}$

Figur 6.6: Svaret til MG

136. I: Kan du kommentere hva du har gjort her?

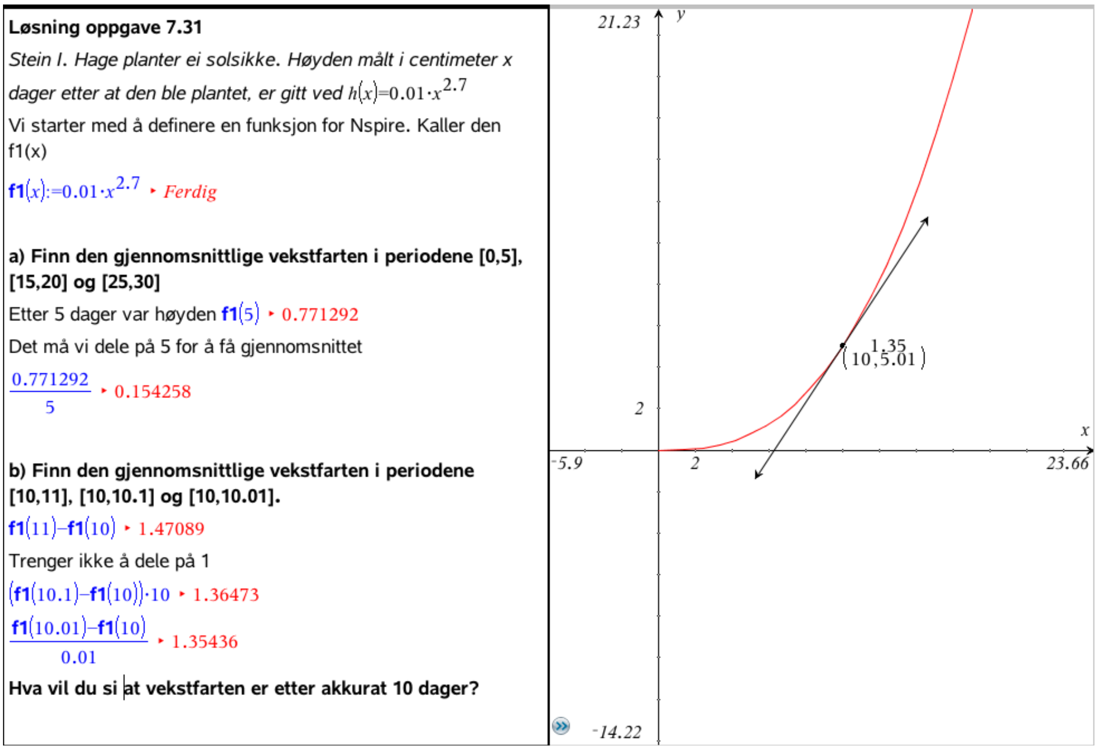
137. MG: Huff, det er ganske pinlig egentlig. På en måte ble jeg helt blindet av oppgaven og tenkte bare på hvordan jeg skulle finne den deriverte...hvordan jeg skulle derivere. Da måtte jeg ha et uttrykk og det fant jeg...og fikk derivert slik at jeg fant den deriverte lik 1. Da du (læreren) kom og spurte om hva jeg egentlig hadde funnet gikk det opp for meg at det var stigningstallet til tangenten og den kan jeg da finne mye enklere...jeg ble blindet av oppgaven huff, pinlig jeg tenkte ikke sånn.

Eksemplet viser hvor sterkt MG ledes mot en utregning sjøl om figuren visualiserer det hun skulle fram til. For MG viser det seg tangenten på figuren og *g´(9)* betegner det samme. Det samme fant jeg hos to av de andre elevene som funnet funksjonsuttrykket for å finne svaret. Til sammen konkluderer jeg med at for 11 av elevene betegner tangentens stigning og *g´(9)* samme diskursive objekt.

Endringsrate i en grafisk og numerisk diskurs

I den lokale instruksjonsteorien antas flere utfordringer knytta til endringsraten og i forrige syklus viste undervisningsdesignet seg ikke å svare til antakelsene i store deler av elevgruppa. Bare i enkelte tilfeller viste elevene en objektifisering av endringsraten. Undervisningsdesignet i denne syklusen søkte å forme en diskurs i plenum, samt utnytte IKT i et diskursivt samarbeid ved bruk av CAS.

En oppgave elevene arbeidet med var å finne vekstfarten hos ei solsikke. En funksjon for høyden av solsikka etter et gitt antall dager var gitt. Elevene skulle finne gjennomsnittlig vekstfart over flere intervall. To elever, OL og TO, presenterte løsningen sin for resten av klassen. Ytringene gjennom presentasjonen, og i diskusjonen som fulgte, viste en objektifisering av funksjonsobjektet og rateobjektet hos elevene OL og TO og hvordan de utnyttet objektene som diskursive objekt i ytringene. Alle elevene løste oppgaven ved bruk av TI-Nspire og ytringene tjener som eksempel på hvordan flere av de andre elevene kommuniserte.



Figur 6.7: Oppgavesvaret til OL og TO

Forklaringen til elevene, OL og TO:

Episode 40

138. TO: Vi måtte jo starte med å legge inn...definere funksjonen

139. TO: ...så tok vi nå bare høyden etter 11 dager og trakk fra høyden etter 10 dager

140. OL: Og da trenger vi ikke å dele på 1 fordi det blir det samme.

141. TO: Neste var å finne vekstfarten fra 10 til 10.1 og da var det bare å trekke de to høydene fra hverandre og gange med 10

142. OL: Det er det samme som å dele på 0.1

143. TO: Ja, det er det...og da blir svaret 1.36473...den vokser så mye på 0.1 dag

144. TO: Neste blir samme bare at det er 0.01

I episoden bruker TO ordet «høyden» synonymt med funksjonsverdien. Betegneren «høyden» realiseres som funksjonsverdien. Objektifiseringen kan han utnytte i et diskursivt samspill med programvaren. Funksjonsverdien er et objekt i den diskursive handlingen og benyttes i ytringene som et subjekt. Det skjer samtidig som henvisningen til matematikkboksen med CAS-kommandoen *f1(x)*. I ytring 139. betegner «høyden» *f1(10)* og *f1(10.1)*. For begge de to elevene er funksjonen et diskursivt objekt med et realisasjonstre bygd av «høyden», funksjonsverdien og *f1(x)*. Samme observasjon fant jeg igjen hos flere elever.

Episoden viser også hvordan de to elevene håndterer endringsraten som et objekt. Det matematiske uttrykket $\frac{f1(10.01)-f1(10)}{0.01}$ er en realisering av betegneren «vekstfarten fra 10 til 10.01». Ytringer i teksten utvides med matematikkbokser med CAS-kommandoer. Det kreves en sammenheng i ytringen, kommandoen og resultatet av kommandoen. Elevene viser at de behersker overgangen, «the gist of mathematical problem solving» (Sfard, 2008, s. 166).

Episoden viser at bruken av kommandoen $\frac{f1(10.01)-f1(10)}{0.01}$ for å finne den gjennomsnittlige endringsraten, 1.36473, som en ytring i CAS-grensesnittet er nesten samme symbol som brukes i den formelle matematikkdiskursen. Det å bruke samme betegnere og realisasjoner i CAS-ytringene antas å hjelpe elevene i individualiseringen av rateobjektet.

Grenseobjektet i grafisk- og numerisk diskurs

Episoden hvor elevene arbeidet med høyden av ei solsikke ble avsluttet med spørsmålet om hva de trodde vekstfarten var etter akkurat 10 dager (se s. 98). Spørsmålet leder elevene fra den gjennomsnittlige endringsraten og til grensebetraktningen av raten. Spørsmålet kan virke uklart, men ingen av elevene reagerte på det. I episode 41 intervjuet jeg de to elevene fra episode 40

Episode 41

145. OL: Det siste svaret har vi funnet ut blir 1.35

146. I: Forklar...

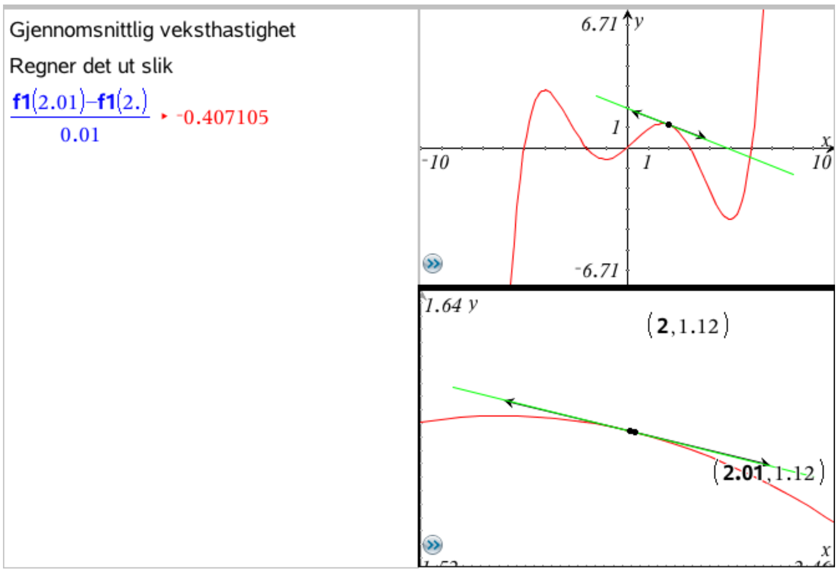
147. TO: Det er bare å velge «Måling» og «Stigningstall» (viser menyvalgene i Nspire) og så har vi stigningstallet til tangenten

148. OL: Vi så jo hvor mye veksten var i små områder...og tangenten er jo klistra inntil grafen i et lite område...det kan vi se ved å zoome oss inn...skal jeg gjøre det?

I ytring 148. bruker OL ordet område for det numeriske intervallet. Han realiserer også betegneren «vekstfarten» fra oppgaven som stigningstallet til tangenten. I forklaringene bruker elevene figuren og peker på grafen. I punktet *(10,5.01)* har de to elevene brukt Nspire til å tegne en tangent. Gjennom å bruke substantivet «veksten» som betegner for hellningsvinkelen til grafen i intervallet og den numeriske verdien 1.35 viser det at begge går mellom den grafiske og numeriske diskursen uten problemer. Grenseobjektets realisasjonstre omfatter realisasjonene hos elevene.

De to elevene viser også hvordan grensebetraktningen knyttes til teknologien ved innzooming. Det er et direkte resultat av aktivitetene gjennom undervisningseksperimentet.

Under forklaringene i de to episodene over var det flere elever som ikke fulgte med i forklaringene. Det var tidlig i undervisningsperioden og sluttesten viser en objektifisering blant de som uttrykte manglende forståelse i episoden. Blant disse var to elever som ble observert i en ny aktivitet.



Figur 6.8: Endringsrate numerisk og grafisk

Aktiviteten besto i at elevene skulle finne gjennomsnittlig veksthastighet i stadig mindre intervall. For å se grensebetraktning både i en grafisk og numerisk diskurs hadde de ei side med tre vinduer. Det ene vinduet var et tekstvindu hvor det er mulig å både skrive tekst og regne. De to andre vinduene viste grafen til en funksjon i to forskjellige skaleringer. I det ene vinduet var det zoomet inn på tangeringspunktet. De to figurene var dynamisk knyttet sammen. En forandring i den ene førte til oppdatering av den andre.

Oppgaven var å finne vekstfarten i punktet hvor *x=2*. Tre elever var sammen i ei gruppe.

Episode 42

149. YU: Se her (peker på det øverste grafiske vinduet) er punktene ett. De er sammen, mens her (peker på nederste vindu) er de litt fra hverandre

150. FG: Samme med strekene...det er jo hvor mye vi har zoomet inn som gjør det.

151. YU: Selvfølgelig, men det jeg tenkte på er at problemet er å vite hvor stort ett punkt er. Hvor stort er det?...Når blir det ett?

152. FG: Det er like før under der

Størrelsen til et punkt definerer de til å være arealet av punktet tegnet på grafen. Episoden viser uforutsette kommognitive problemer det ikke er tatt hensyn til i den lokale instruksjonsteorien. En euklidsk definisjon av et geometrisk punkt er ukjent for elevene, men realiseringen av et punkt holder for grensebetraktningen. I andre sammenhenger kan oppfatningen skape problemer. Elevene viser at de ser begge vinduer som realisasjoner av samme situasjon sjøl om akseverdiene er forskjellige.

For den numeriske utregninga kommer de også fram til en grensebetraktning.

Episode 43

153. FG: Vi skal finne den gjennomsnittlige veksthastigheten, men i hvor stort område, da?

154. YU: Det må være så lite som mulig.

I tekstbehandleren regnet de ut verdier ved å se på endringsraten i et intervall med bredde *0.01*. Neste tilnærming var å regne ut i intervallet med bredde *0.001*. De brukte samme formel: $\frac{f1(2.001)-f1(2)}{0.001}$ og regnet ut. I det intervallet falt punktene sammen og elevene konkluderte med at det måtte være vekstfarten i punktet hvor *x=2*.

155. YU: Der er det bare ett punkt. Da har vi vekstfarten i punktet.

Det knytter FG til tangenten:

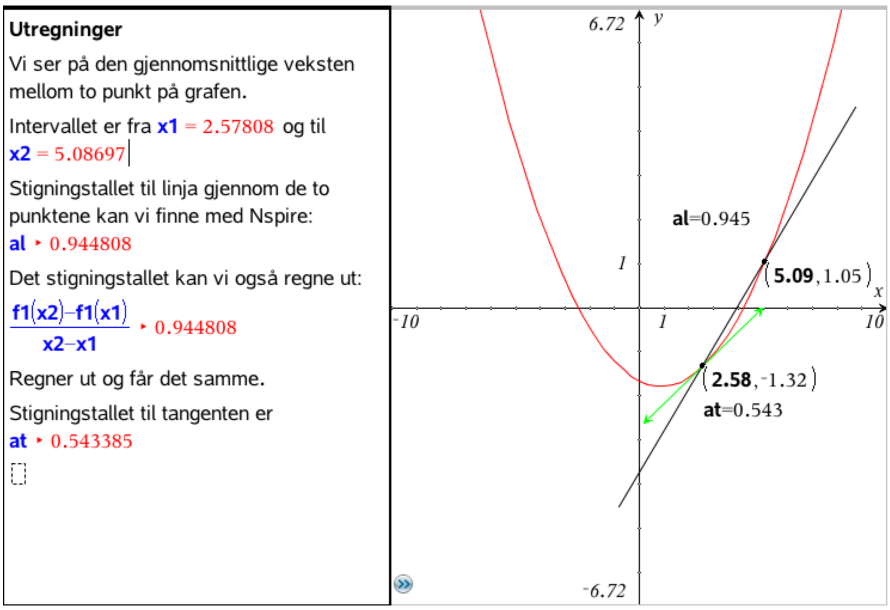
156. FG: Det hadde vært enklere å bare bedt om å få tegnet opp tangenten og så funnet stigningstallet

Den siste kommentaren fant jeg ved flere observasjoner. Grensebetraktningene synes overflødige når tangentobjektet er tingliggjort.

Overgangen fra sekant til tangent

Overgangen fra sekant til tangent er en sentral metafor i den tradisjonelle definisjonen av den deriverte. Den lokale instruksjonsteorien, og observasjoner i forrige syklus, viste at elevene hadde problemer med å forklare den deriverte ut fra en grensebetraktning av sekanten. I HLB ble det designet en aktivitet som skulle støtte overgangen fra sekant til tangent.

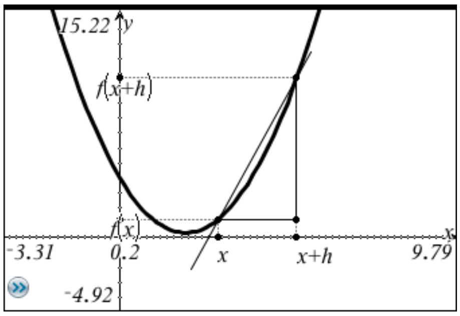
I aktiviteten hadde elevene fått utlevert et undervisningsopplegg laget i Nspire. Se figur 6.9. Det grafiske vinduet til høyre var delvis ferdig konstruert og variablene opprettet. Teksten skulle elevene sjøl produsere og de hadde i oppgave å bruke de definerte variablene : *x1, x2, al, at.* De to siste er stigningstallene til henholdsvis linja, *l*, og tangenten. Det var ment at elevene skulle flytte på punktene og få utført beregninger. Ved å flytte på punktene i det grafiske vinduet ble matematikkboksene i tekstvinduet oppdatert. Koordinatene til punktene og utregningene forandret seg dynamisk når punktene ble flyttet på. Stigningstallet til sekanten ble både beregnet av Nspire direkte ved en måling av stigningstallet for linja. Endringsraten var også skrevet med symboler som ble beregnet fortløpende. Gjennom å flytte punktene nær hverandre var det mulig å få beregnet en tilnærming for stigningstallet til tangenten.



Figur 6.9: Overgangen fra sekant til tangent

Skjermbildet i figur 6.9 er hentet fra en innlevering fra ei av gruppene. Den produserte teksten viser blandingen av tekst, symboler og numeriske beregninger i ett vindu. Samtidig kan realisasjonene vises i en grafisk diskurs. Ved å interagere med punkter i den grafiske diskursen oppdateres teksten. Dynamikken vises i flere realisasjoner samtidig. Elevene handlet med variablene i objektform ved f.eks. å omtale variablene *at* og *al* som stigningstallene i teksten. Stigningstallet til sekanten har de også funnet uttrykt ved endringsraten. Den innleverte teksten er et eksempel på blanding av realisasjoner i forskjellige diskurser. I teksten betegner «stigningstallet» til sekanten både realisasjonen *al*, *0.944808*, den grafiske hellingen i figuren og $\frac{f1(x2)-f1(x1)}{x2-x1}$. Teksten elevene leverte støtter opp under antakelsen om IKT som en viktig diskursiv partner, men støtten til overgangen mellom sekanten og tangenten var ikke like observerbar hos elevene.

Grensebetraktningene ble avslutta med å se på definisjonen av den deriverte i et punkt, basert på framstillingen i læreboka. Oldervoll et al. viser til en figur omtrent lik figur 6.10, men tar utgangspunkt i *x=2* og intervallet *[2,2+h]* når de skriver: «så lar vi *h* nærme seg null. Intervallet [2,2+h] vil da krympe og etter hvert bare inneholde punktet x = 2» (2009, s. 211) . Det var en forklaring som var problematisk for elevene og jeg utviklet en aktivitet i Nspire for støtte forklaringen med en dynamisk konstruksjon vist i figur 6.10. Figuren ble forklart og diskutert i plenum. De to elevene som hadde levert inn oppgaven i figur 6.9 viste at de ikke umiddelbart kjente seg igjen i den nye situasjonen. Noen av spørsmålene som dukket opp:



Figur 6.10: Sekantens overgang til tangent

Episode 44

157.	DF:	Det her har jeg store problemer med å skjønne
158.	MN:	Helt enig..hva er f. eks. x...hva er h...høyden...burde ikke den vært oppover?
159.	DF:	ja, og alle strekene...hva gjør dem der?
160.	MN:	Strekene som er prikka skjønner jeg ikke

Flere av elevene hadde problemer med symbolene *h* og *x*. I skolematematikken er det hevd på å bruke *h* som betegner på høyden. Akkurat som MN betegner symbolet høyden for flere. Symbolet forvirrer med en utilsikta betegnelse.

De stipla linjene som markerer verdiene på aksene var det flere enn de to elevene som kommenterte. Mens linjene er ment å støtte avlesingen av akseverdiene utløser de hos elevene et forsøk på å finne forklaringer som avleder oppmerksomheten fra det som er tilsikta.

Aktiviteten med overgang fra sekant til tangent ble det igjen stilt spørsmål om. Under plenumsgjennomgang av figuren og hvordan sekanten «nærmet seg» en tangent oppsto denne ordvekslinga mellom læreren, L, og en av elevene, YM:

Episode 45

161.	L:	Så gjør vi sånn (tar tak i sekantens skjæringspunkt til høyre) og trekker ned over og da får vi en tangent.

162. YM: Hvorfor gjøre vi det?

163. L: For å finne tangenten

164. YM: Men, den har vi jo! Vi kan bare få tegnet den

YM viser til at vi med programvaren kan få tegnet tangenter i alle punkt og at den sekvensielle overgangen fra sekant til tangent for ham blir overflødig. Andre elever sa seg enige. For læreren ble det ikke enkelt å forklare. Det er samme kommentar som elevene i den tidligere episoden.

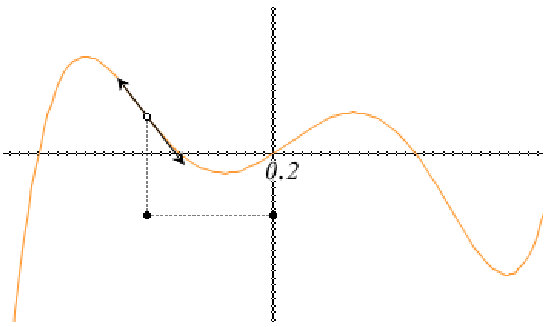
Innkapsling av punktderiverte til en funksjon

I den lokale instruksjonsteorien er siste fase overgangen fra rate- og grenseobjektet til funksjonsobjektet. Objektifiseringen er en innkapsling av alle punktderiverte til en ny funksjon: den deriverte. For å støtte innkapslingen ble det designet flere aktiviteter.

I forrige HLB fikk elevene en ferdig aktivitet hvor de skulle oppdage sammenhengene mellom grafen til den deriverte og grafen til den opprinnelige funksjonen. Flere av elevene fant sammenhenger, men verken sammenhengene eller tolkingen av sammenhengene var de som HLB ønsket å formidle. Gjennom interaksjon, observasjon og diskusjon skulle elevene oppdage sammenhengen mellom tangentens stigningstall og hvordan en innkapsling kunne realiseres som grafen til den deriverte. I første syklus oppdaget flere elevgrupper intensjonen bak aktiviteten, men observasjonene viste også at sammenhenger uten ønska matematisk årsak fikk fokus. For å bidra til økt fokus på den ønska dynamiske medieringen ble det i denne syklusen lagt vekt på at elevene sjøl bidro i konstruksjonsprosessen. Gjennom å være med på oppbyggingen og se sammenhengene som var innebygd ble det antatt at en kunne unngå episodene fra forrige design.

Sporing av stigningstallet til tangenten og egen konstruksjon

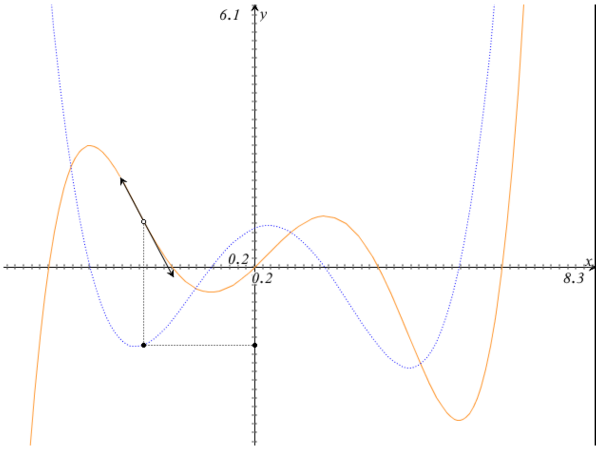
Denne gangen fikk elevene i oppgave å sjøl konstruere den dynamiske figuren. Etter å ha tegnet opp grafen til en funksjon gitt av meg ble elevene instruert til å tegne en tangent i et dynamisk punkt. De målte stigningstallet til tangenten i Nspire og satte av verdien til stigningstallet langs y-aksen. Et skjæringspunkt med den avsatte y-verdien og x-verdien for tangeringspunktet ble så konstruert. Situasjonen er vist på figur 6.11.



Figur 6.11: Stigningstallet til tangenten

Etter å ha laget ferdig figuren sporet elevene skjæringspunktet ved flytting av tangeringspunktet. Ved å flytte fram og tilbake fikk elevene tegnet opp deler av grafen til den deriverte.

Neste steg var å tegne opp hele grafen til den deriverte. Det ble gjort ved å skrive inn kommandoen for å finne den deriverte av funksjonen og uten bruk av derivasjonsregler. Elevene kunne da se at skjæringspunktet fulgte grafen til den deriverte når de flyttet det dynamiske tangeringspunktet. I tillegg kunne de vise den deriverte funksjonen i en tabellrealisasjon.



x	f2(x):= d(f1(x),x)
0.	0.9
1.	0.72
2.	⁻0.4
3.	⁻1.8
4.	⁻2.22
5.	0.2
6.	7.92
7.	24.
8.	52.1
9.	96.48
10.	162.
11.	254.12
12.	378.9
13.	543.
14.	753.68

Figur 6.12: Sporing av tangentens stigningstall

Bruken av sporing og koblinga mellom tangentens stigningstall og grafen til den deriverte ble godt støttet av aktiviteten. HK sa seg enig i at aktiviteten var oppklarende for hennes oppfatning av forhold mellom grafen og stigningstallet.

Episode 46

165. HK: Plutselig ble det klart for meg hva linja til den deriverte er. Det er jo alle stigningstallen, jo...

Under gjennomføringen av aktiviteten konkluderte alle gruppene med at sammenhengen var åpenbar. De kunne «se» at stigningstallet var funksjonsverdien i den opptegna grafen. Vi skal seinere se at den konklusjonen ikke lå til grunn når elevene skulle tolke grafsammenhengen i den avsluttende testen.

I forrige syklus fokuserte flere elever på utilsikta og tilfeldige sammenhenger i den dynamiske figuren. I denne syklusen ble de matematiske sammenhengene mer åpenbare gjennom at elevene fikk være med under konstruksjonen. Aktiviteten gikk fra å være oppdagende til oppfinnende. Jeg gjorde ingen observasjoner av elever som fokuserte på andre sammenhenger enn hva aktiviteten var ment å vise. Konklusjonen for det teknologiske miljøet er at sammenhengene i dynamiske figurer må være etablert før en kan trekke matematiske slutninger. I forrige syklus måtte elevene først gjennomskue hva som førte til avhengighet i de dynamiske konstruksjonene. Det førte til gjetninger (se bl.a episode 18, 19 og 20 s. 80) og var ikke basert på den tilsikta matematiske sammenhengen. Ved å være delaktig i oppbyggingen ble det unngått. En rein oppdagende tilnærming er ikke like egna til det.

Tolkingen av grafen til den deriverte

I den grafiske diskursen blir grafene til den opprinnelige og den deriverte funksjonen ofte presentert i samme koordinatsystem. Siden de to grafene gir samhørigheten mellom en x-verdi og to forskjellige funksjonsverdier i samme koordinatsystem forutsetter den lokale instruksjonsteorien kommognitive utfordringer. Når elevene skulle tolke hvilke grafer som hørte sammen i sluttesten valgte 17 av elevene korrekt graf. Vi finner igjen den ikoniske translasjonen hos de andre elevene, som JN. Hun hadde tidligere vist en objektifisering av den deriverte i den grafiske diskursen. Under den tidligere aktiviteten konkluderte hun:

Episode 47

166. JN: Har vi grafen til den deriverte kan vi alltid finne stigningstallet. Det er bare å lese av enten via grafen eller tabellen.

Når hun begrunner valget sitt for figur fire skriver hun:

167. JN: Graf 4 viser funksjonen f(x) fordi de har samme stigningstall (eller de synker og stiger likt)

Under et intervju i etterkant så hun det motstridende i valget i sluttesten.

168. JN: Jeg skjønner ikke helt hva som skjedde. Jeg tror ikke jeg tenkte. Kanskje jeg var litt stressa

Kommentaren om at hun ikke tenkte og bare valgte kan være sann. Uten en oversetting av grafen til at den representerer den opprinnelige funksjonens momentane endringsrate og tenke seg til hvordan den kan framstilles grafisk er likhet en egenskap det er lett å ta tak i. Av de fem som ikke hadde valgt den korrekte grafen var det en bare tre som ikke under intervju ikke greide å resonere seg fram til den riktige grafen.

Elevenes definisjon av den deriverte funksjonen

I testen etter undervisningsdesignet ble alle elevene bedt om å skrive ned en definisjon av den deriverte. De skriftlige besvarelsene var utgangspunkt for intervjuer med utvalgte elever. Alle ytringene viser en individualisering av den deriverte, men tre kan ikke karakteriseres som faglig akseptable. De tre ytringene er

Episode 48

169. JN: Den deriverte er en funksjon som forteller oss alle tallene en tangent kan ha

170. GB: Den deriverte er en ny funksjon vi finner ut fra den opprinnelige. Den deriverte viser stigningstallene for alle verdier av variabelen

171. MN:

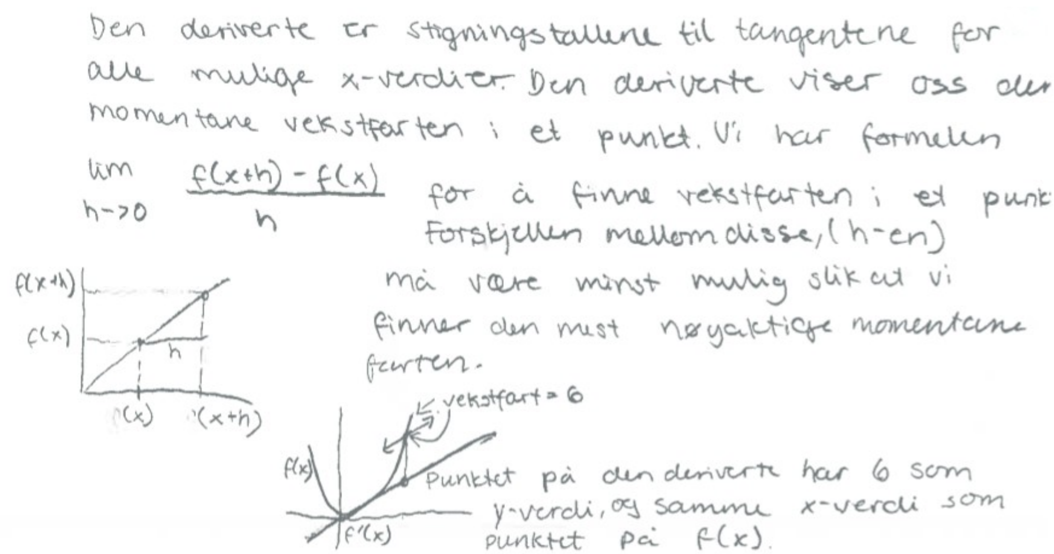
Den deriverte er alle tangentene til alle mulige x-verdier. Vi kan regne ut den deriverte med formelen $(x^n)' = x \cdot n^{x-1}$ eller digitalt $\frac{d}{dx}(\ldots)$.

Den forteller hvor mye en graf stiger i hvert enkelt punkt.

Under intervjuet korrigerte alle de tre ytringene sine. JN presiserte at hun mente stigningstallene og GB la til at det «naturligvis var stigningstallene til tangentene». I MN sitt tilfelle er den siste setningen om stigningen i hvert enkelt punkt et tegn på en objektifisering av en derivert funksjon. Hun så sjøl utelatelsen av stigningstallene før ordet tangentene.

Resultatet viser at alle elevene i gruppa definerer den deriverte med en ytring som viser kjenntegn på den definerte måloppnåelsen. Et eksempel er FH som har en utfyllende definisjon:

Episode 49



Figur 6.13: Definisjonen til FH

At alle elevene definerer den deriverte på en akseptert måte viser at en individualisering av den deriverte har skjedd i større grad enn i forrige syklus. Bare seks av elevene avga aksepterte ytringer i den elevgruppa. Resultatet tilskrives aktivitetene beskrevet tidligere. I intervjuet utdyper MN (se over, ytring 171.) definisjonen sin

Episode 50

172. MN: ...når jeg skrev digitalt mente jeg at det er bare å skrive inn i Nspire for å få stigningen...uansett hva du skriver inn i parentesen får vi hvor mye grafen stiger. Det er den deriverte

Når MN refererer til den deriverte i den teknologiske diskursen er det med en direkte henvisning til IKT som en diskursiv medhjelper. CAS-kommandoen for å finne den deriverte funksjonen er $\frac{d}{dx}()$ hvor funksjonsuttrykket skrives inn i parentesen. Objektkarakteren i CAS-kommandoen krever en ytring hvor funksjonen behandles som et objekt. Det MN søker å uttrykke er at uansett hvilket funksjonsuttrykk som skrives inn vil resultatet av kommandoen være en ny funksjon som forteller hvor mye grafen endres. Det nye funksjonsuttrykket gis som respons og interaktiviteten viser MN at hun kan behandle et funksjonsobjekt og få et nytt. Samhandlingen er med å styrke individualiseringen av den deriverte som et diskursivt objekt.

Definisjonen av den deriverte ved grensebetraktning i den grafiske og symbolske diskursen

Den tradisjonelle definisjonen av den deriverte med sekantens overgang til tangent viste seg utfordrende for elevene både i forundersøkelsen og i den første syklusen. Mens tre elever ga akseptable forklaringer i første syklus, var det åtte elever som greide det etter denne syklusen. I tillegg ga sju elever forklaringer som var matematisk unøyaktige, men som viser en forståelse for definisjonen gjennom en overgang fra en sekant til tangent. Et eksempel på en upresis ytring som faller i den siste kategorien er:

Episode 51

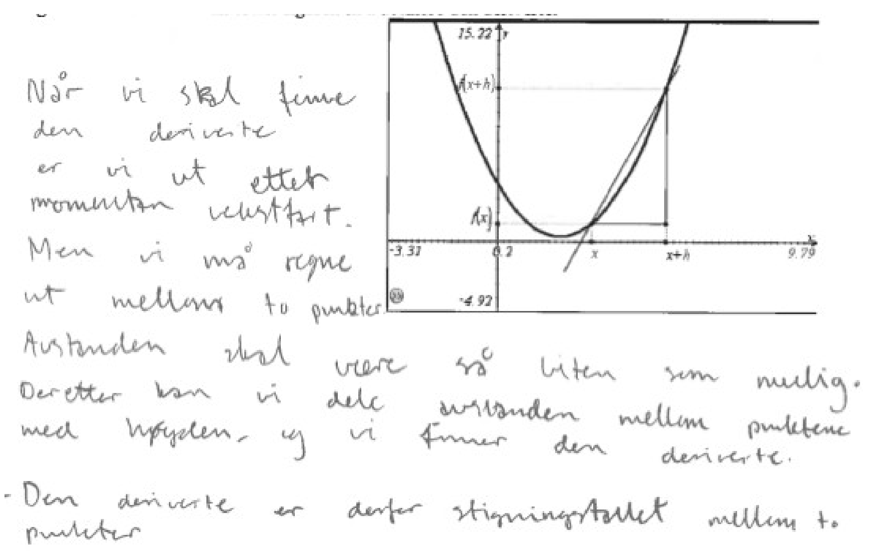
173. JV: Vel, for å finne den deriverte trenger vi info om tangenten til et punkt. Figuren viser en sekant. Om vi later som om en sekant er en tangent kan vi finne vekstfarten ved følgende likning $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

I samtale om ytringen forklarer JV:

174. JV: Det jeg mente er at alle tangentene egentlig er «liksomsekanter». Zoomer vi nok inn vil det være en sekant, men det er den lengst inne som er den beste tangenten.

JV viser, i likhet med de fleste, en manglende objektifisering av grenseobjektet, men forklaringen viser at figuren betegner en definisjon av den deriverte som en momentan vekst.

Av de aksepterte ytringene gjengis EJ sin forklaring som eksempel:

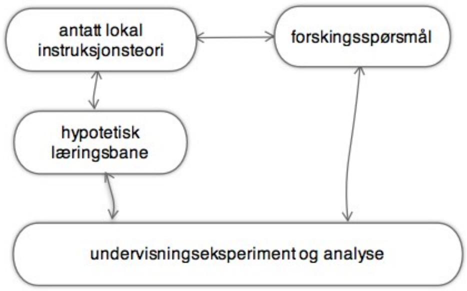


Figur 6.14: EJ sin forklaring

Etter intervju kan ytringer fra 12 elever, med korrigeringer, karakteriseres som aksepterte i forhold til kjennetegnene. I forhold til de tre elevene i første syklus har andelen aksepterte ytringer økt betraktelig.

7 KONKLUSJON OG DISKUSJON

I starten var ideen min å søke en introduksjon av funksjonsanalysen som vektlegger de didaktiske utfordringene tidligere forsking viser (bl. a. Artigue, 2000; Ely, 2007; Hähkiöniemi, 2006; Orton, 1983; Tall, 1992). I et vitenskaplig perspektiv ble det gjort som designforsking, skjematisk framstilt i figur 7.1. Framstillingen gjentar oppbyggingen av oppgaven.



Figur 7.1: Skjematisk oversikt

I de tidligere kapitlene har jeg beskrevet den lokale instruksjonsteorien, analysert undervisningseksperimentene og trukket konklusjoner. I sluttkapittelet vil jeg summere opp funnene og diskutere i hvilken grad og hvordan jeg har besvart forskingsspørsmålet.

De to undervisningseksperimentene

Første syklus

I første syklus ble antakelsen i instruksjonsteorien for en stor del bekreftet.

Under observasjonene viste elevene måloppnåelse for tegning av tangenter. Det er med på å bekrefte utgangspunktet med tangenten som diskursiv rot, slik instruksjonsteorien legger opp til.

I dataene som ble samlet inn fant jeg flere observasjoner av objektifisering ved en overgang fra prosess til objekt. Utfordringene knytta til tingliggjøring av de involverte objektene, med en parallell til den historiske utviklinga, fulgte antakelsene som ble gjort.

Resultatet etter første syklus viste at flere av elevene hadde individualisert et derivasjonsobjekt, men for mange av elevene manglet en tingliggjøring av funksjonsobjektet, som er et premiss for et fullstendig tingliggjort derivasjonsobjekt. Revurderingen av HLB for å oppnå det hos en større del av gruppa gjelder det teknologiske miljøet. Det ble i for stor grad lagt vekt på at elevene skulle oppdage matematiske sammenhenger gjennom aktiviteter. Gjennom dynamisk interaksjon ble ikke de tilsikta sammenhengene avdekket av flertallet av elevene, se f.eks. episode 18 s. 77. Aktiviteter hvor elevene skal oppdage innbakte dynamiske sammenhenger, for så å vektlegge noen av dem og trekke matematiske konklusjoner, var ikke støttende for flertallet av elevene.

Andre syklus

Observasjonene under denne syklusen forsterker konklusjonen om at tangenten, og dens egenskaper, er et godt startpunkt for elevene. Tangentens egenskaper som indikator for funksjonsegenskapene individualiseres av alle elevene i denne syklusen.

Objektiviseringsteorien, fra prosess til tingliggjort diskursivt objekt, bekreftes gjennom observasjonene også i denne syklusen. Det styrker ytterligere grunnlaget til den lokale instruksjonsteorien.

Det nye i denne syklusens HLB var en hyppigere, og en annen, bruk av teknologi sentral. Antakelsene bak teknologibruken var også forandret. Bare i liten grad ble ferdige aktiviteter, med antatt medierende effekt, brukt i undervisningsdesignet. Egne elevkonstruksjoner viste seg bedre egnet til å nå læringsmålene ved at sammenhengen i de dynamiske figurene kom klarere fram, se f.eks. episode 46 s. 105. I tillegg kunne tekstmodulen i den nye programversjonen utnyttes i større grad. Gjennom blandingen av tekst og matematikkbokser var elevene i stand til å produsere multimodale tekster hvor CAS-kommandoer ble blandet inn i teksten. I flere episoder ble det observert hvordan elevene blandet argumentasjon og kommandoer hvor de matematiske begrepene ble brukt i en objektform, se f.eks. episode 32 s. 94 og episode 40 s. 98.

Svaret på forskingsspørsmålet

Forskingsspørsmålet som jeg har prøvd å undersøke og besvart gjennom denne avhandlingen:

> *Hvordan legge til rette for en individualisering av den deriverte som diskursivt objekt gjennom en teknologirik undervisning?*

Gjennom designforskingen har jeg prøvd ut, analysert og konkludert med hvilke heuristiske prinsipper som bør ligge til rette for en individualisering av den deriverte som diskursivt objekt. Svaret på forskingsspørsmålet kan jeg, etter de to syklusene, kort oppsummere noen grunnleggende prinsipper.

Et prosess-objekt-perspektiv er et viktig grunnlag

Sfards teori om objektifisering er det teoretiske grunnlaget undervisningseksperimentene er designet etter. Gjennom begge sykluser viser observasjonene av elevene at det skjer en diskursiv objektfisering, en individualisering fra å omtale noe som en prosess til å benytte et substantiv i ytringene. Sjøl med et annet grunnlag enn den diskursive analysen finner tidligere forsking, med varierende læringsteoretiske perspektiv, en utvikling fra prosess til et strukturelt objekt (Asiala et al., 1997; Dubinsky & Mcdonald, 2001; Sfard, 1991). Med et konstruktivistisk grunnlag bygde Asiala et al. (1997) sin APOS-teori (Action-Process-Object-Schema) hvor de beskrev den individuelle utviklingen av funksjoner og den deriverte. De fant at elever som deltok i undervisning bygd etter prosess-objekt-prinsipper oppnådde bedre resultater enn hva tilfellet var med tradisjonell undervisning. Funnene sammenfaller med antakelsene i instruksjonsteorien og observasjonene gjennom de to syklusene.

Tangenten som utgangspunkt

Alle elevene, i begge syklusene, kunne etter undervisningen visualisere tangenter på en graf. Uten å kjenne definisjonen av tangenten kunne de tegne tangentene etter å ha fått visualisert tangenter i det teknologiske miljøet. Både gjennom en animasjon som illustrerte en metafor med et kjøretøy på grafen, og gjennom å fått eksemplifisert tangenter tegnet i Nspire, nådde elevene læringsmålet. Konklusjonen er at tangenten som en diskursiv rot er en start som er mindre utfordrende for elevene enn å starte med grenseverdien og introdusere den deriverte ved definisjon. Tangentens helling, som indikator for lokal endring, er intuitiv for elevene og fører direkte til at tangenten kan benyttes som et verktøy for drøfting av monotoniegenskaper. Samme funn bekreftes i tidligere forsking (Artigue, 1991, 2000; Samuels, 2010; Tall, 1986, 2003).

Diskursiv strukturering

Introduksjonen av den deriverte må struktureres. Legges de to første prinsippene til grunn som premisser, følger struktureringen med som konklusjon. Tas det hensyn til dualiteten, og en aksept av teorien om objektifisering av prosesser, er konklusjonen at rekkefølgen ved innføring av nye objekter må skje etter en bestemt sekvens. En prosess er en handling med et diskursivt objekt. Gjennom objektifiseringen individualiseres prosessen som et nytt objekt. Det nye objektet kan først da inngå i nye handlinger. Under utviklingen av den lokale instruksjonsteorien argumenterte jeg for en inndeling av den deriverte i de diskursive objektene rate-, grense- og funksjonsobjekt. Samtidig ble disse objektene identifisert i flere diskurser. Det er en strukturering det må tas hensyn til ved undervisning av den matematiske analysen.

Figur 5.2 side 55 viser hvordan den hypotetiske læringsbanen ble designet i siste syklus av undervisningseksperimentet. Innafor strukturen kan en tenke seg varianter av hvordan overgangene mellom de diskursive objektene kan skje, men oppbyggingen og struktureringen er et grunnleggende prinsipp.

Realisasjonene danner grunnlaget for objektifisering

En realisasjon er et primært objekt det diskursive objektet dannes ut fra. Både sammeliknings- og innkapslingsprosessen krever primære objekt. Det krever at elevene møter mange og varierte realisasjoner. Et teknologisk miljø som kan presentere varierte realisasjoner forbundet dynamisk er en støtte i objektifiseringen. Dynamikk og interaktivitet med realisasjonene gjør at mangfoldet og variansen blant realisasjonen øker. Mange, og varierte realisasjoner, er et premiss for individualiseringen av den deriverte som diskursivt objekt. Uten vil individualiseringen være umulig. I hvilken grad elevene støttes i en sammeliknings- og innkapslingsprosess gjennom realisasjonene avhenger av artefaktene som visualiserer de primære objektene.

Funksjonsobjektet som et premiss

Den deriverte er en funksjon som beskriver en annen funksjon. Gjennom hele undervisningen er en individualisering av funksjonen, som et diskursivt objekt, en betingelse. Et undervisningsdesign må ta hensyn til at funksjonen skal etableres som diskursivt objekt og legge til rette for at det skjer så tidlig som mulig.

Et teknologirikt miljø støtter objektifiseringen

Gjennom designeksperimentet viste IKT-artefaktene seg å være støttende for individualiseringen av objektene. En betingelse var å være forsiktig med bruk av aktiviteter hvor elevene skulle oppdage kunnskap gjennom å avsløre designerens innbygde forutsetninger. Aktiviteter bygd ved en oppdagelsestilnærming, se s. 83, må bare benyttes hvor visualiseringene i aktiviteten medierer bare det som er tilsikta. Gjennom aktiviteter hvor elevene sjøl deltar i konstruksjonsprosessen vil sammenhengene tre klarere fram og visualiseringen lettere ha den tilsikta medierende effekten.

IKT-artefakten som en diskursiv partner er vesentlig for objektifiseringen. Gjennom en implisitt bruk av objektform i CAS-kommandoene blir de diskursive objektene både eksponert og brukt, se bl.a. s. 99. Det støtter objektifiseringen hos elevene.

En tilnærming ved definisjonen og sekantens overgang til tangent er didaktisk krevende

I den lokale instruksjonsteorien ble det antatt at grensemetaforen, med sekantens overgang til tangenten, er krevende å ta del i. Observasjonene gjennom de to syklusene viser det samme. Et undervisningsdesign må ta hensyn til det ved å unngå dette som introduksjon eller den eneste realisasjonen av den deriverte.

En sammenlikning mellom testresultatene

Svarene på forskingsspørsmålet er argumentert fram gjennom analyser og tolkinger av de data som er samla inn gjennom undervisningseksperimentet. Konklusjonen som er gjort underbygges av testresultatene. Uten å være en kvantitativ undersøkelse og langt fra statistisk signifikant er det interessant å se samsvar mellom observasjoner og testresultater.

Både i forundersøkelsen og etter de to undervisningssyklusene ble elevene testet med en del av de samme spørsmålene i en sluttest. Forundersøkelsen avvek fra sluttesten med en oppgave hvor elevene skulle tegne tangenter og andre kontekster i to oppgaver. En ball langs et skråplan dannet utgangspunkt for oppgaven om numerisk veksthastighet i forundersøkelsen, mens et utslipp av eplesaft var utgangspunktet i sluttesten. I begge tilfeller skyldes valget at eksemplene var kjente for de elevene som tok testen. I oppgaven hvor med forklaring av overgangen fra sekant til tangent var illustrasjonene avvikende. Elevene i forundersøkelsen hadde en annen lærebok enn elevene i sluttestene og figurene var hentet fra de respektive lærebøkene. Ellers var oppgavene de samme (se vedlegg). Tilfeldighetene gjorde at antall elever, 22, var det samme i begge tester etter de to syklusene.

Testresultatene ble kvantifisert etter et poengsystem hvor to poeng ble gitt for oppnådd målkriterie med mulighet for å gi ett poeng i tilfeller hvor besvarelsen viste tegn mot oppnåelse. Gjennomsnittet etter siste syklus ble 71% av full skåre, mens det etter første syklus ble 56%. To av elevene fikk 100% av poengene. Lavest kom en elev med 16% av full skåre. Det er lavere enn i den første elevgruppe hvor laveste skåre var 30%. Eleven som fikk den lave skåren skilte seg vesentlig ut fra resten av gruppa. Hvis en ser bort fra eleven med den laveste skåren blir gjennomsnittet blant elevene 73%. Det er høyt tall sammenliknet med resultatet i forrige runde. Satt inn i en tabell og sammenliknet med forundersøkelsen viser skåren at elevene som deltok i undervisningseksperimentene oppnådde et bedre resultat enn elevene i R1-gruppa. Sjøl om testene til dels var avvikende finner jeg samme resultat ved en sammenlikning blant de identiske oppgavene. Elevene i siste syklus fikk en høyere totalskår enn de i første.

	Antall	Snitt
Forundersøkelsen	19	23%
1. syklus	22	56%
2. syklus	22	71%

Individualisering av funksjonsobjektet

Funksjonen, individualisert som et diskursivt objekt, var både et viktig mål og et middel for en objektifisering av den deriverte. Blant R1-elevene i forundersøkelsen ble en av besvarelsene tatt som tegn på at eleven hadde objektifisert funksjonen. Etter første syklus ble resultatet fire ytringer kategorisert som tegn på objektifisering av funksjonen. Etter siste syklus viste 17 av elevene kjennetegn på en objektifisering.

	Antall	Funksjons-beskrivelse	Betegneren f(x)
Forundersøkelsen	19	1	4
1. syklus	22	4	4
2. syklus	22	17	13

Antall elever hvor symbolet *f(x)* betegnet et funksjonsobjekt steg også etter siste syklus hvor 13 av elevene kom i den kategorien.

Den deriverte

Elevene ble bedt om å definere og tolke den deriverte i flere diskurser. Etter begge sykluser var ferdige fikk elevene i oppgave å skrive ned en definisjon av den deriverte på et papir. Kravet til en akseptert definisjon var en tilknytting til momentan endring og at funksjonsaspektet måtte være med. Etter siste syklus ble alle ytringene aksepterte. Når elevene som deltok i forundersøkelsen fikk samme oppgave var resultatet at ingen leverte aksepterte ytringer. Seks elever gjorde det etter første syklus. Blant forklaringene som ikke ble karakterisert som akseptable, utgjorde nesten alle beskrivelser av derivasjonsregler. I gruppa som deltok i forundersøkelsen var det typiske svaret at den deriverte er «å flytte ned n-en som er eksponent og trekke fra 1».

	Antall	Forklaring av sekant-overgang	Definisjon av den deriverte	Tolking av g´(9)	Valg av samhørende grafer
Forundersøkelsen	19	0	0	1	9
1. syklus	22	3	6	2	15
2. syklus	22	12	22	11	17

Oppgaven i testen hvor elevene ble bedt om å tolke *g´(9)* (se vedlegg) endte opp med 11 korrekte svar i forhold til bare to og ett tidligere. Den samme økingen av korrekte svar ble observert i forklaringen av figuren som viser overgangen fra sekant til tangent. Når det gjaldt tolkingen av samhørende grafer (se vedlegg) holdt antall riktige valg av graf seg relativt likt.

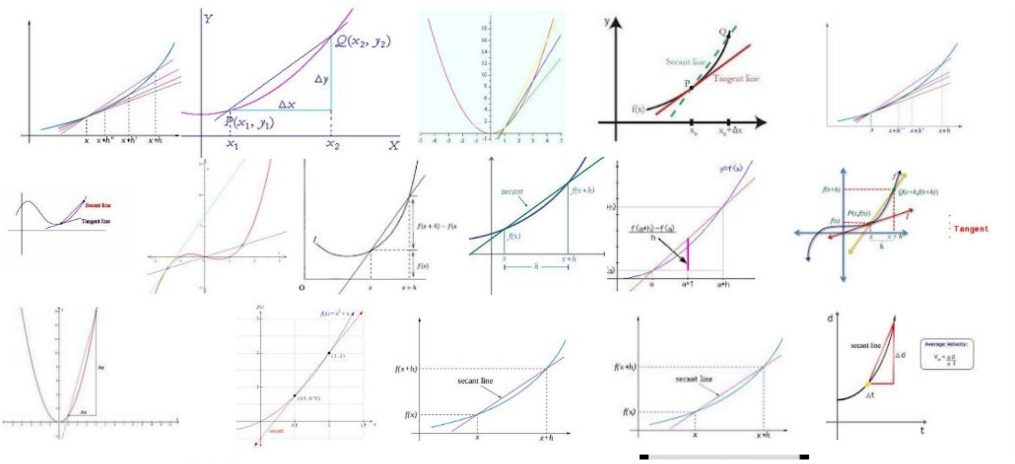
Elevene ble bedt om å forklare en figur som forsøkte å illustrere overgangen fra sekant til tangent. Ingen av elevene i forundersøkelsen ga en forklaring som kunne analyseres som en forståelse grenseprosessen. Henholdsvis tre og 12 ytret seg akseptert etter de to syklusene.

Tendensen i tallene fra testene stemmer både med den kvalitative studien og mitt inntrykk. Undervisningsdesignet var vellykket ved at en langt større andel av elevene viste kjennetegn på måloppnåelse.

Noen avsluttende kommentarer

Den tradisjonelle introduksjonen bør vurderes

Et bildesøk på Internett med søkeordet «derivative» ender opp med skjermbildet under.



Med få unntak viser resultatet en parabelliknende graf, i første kvadrant, med den hule sida opp. En sekant er tegnet inn og skjæringspunktene er markert med stipla linjer. Omtrent samme figur finner vi igjen i de to lærebøkene (Heir et al., 2009; Oldervoll et al., 2009) elevene i denne undersøkelsen brukte. Figuren benyttes også på nettstedet NDLA. Riktignok krummet figuren motsatt, men i all vesentlighet møtte elevene samme figur tilbake på sekstitallet (Søgaard & Tambs Lyche, 1967).

Gjennom mange år i skolen har jeg erfart at inngangen til den deriverte med denne figuren har vært problematisk for flertallet av elevene. Didaktisk forsking gjort på åttitallet bekreftet erfaringene mine (Orton, 1983; Tall, 1985): Å møte en figur med sekanter og en tangent, en innviklet forklaring på grenseprosessen og på toppen av dette den symbolske definisjonen er svært utfordrende for elevene. Seinere er dette bekreftet i andre studier (bl. a. Artigue, 2000; Vinner, 1992; Zandieh, 1998). I kapitlene foran har jeg vist samme resultat blant elevene som deltok i undersøkelsene. Til tross for en slik viten fins få spor i dagens lærebøker av didaktiske forsøk i en annen retning. Erfaring og forsking viser at de didaktiske utfordringene ved innføringen av analysen er langt større enn det som gjenspeiler seg i dagens praksis. Det samme bekrefter funnene jeg gjorde i undervisningseksperimentet.

Elever og lærere bør ha undervisningsmateriell som er et alternativ og et tillegg til sekantens overgang til tangent.

Funksjonsobjektet må vektlegges mer i undervisningsmaterialet

Funksjonens strevsomme utvikling mot tingliggjøring over tre hundre år, med bidrag fra de største matematikerne, viser hvilke krav som stilles til elevene. Den samme utviklingen forventes det at elevene skal gå gjennom i løpet av noen matematikktimer. Når to av lærebøkene i faget 1T skal presentere elevene for funksjonsbegrepet skjer det med disse definisjonene:

> y er en funksjon av x hvis hver mulig verdi av x gir nøyaktig én verdi av y (Oldervoll et al., 2009)

> Når det til hver verdi av x svarer én bestemt verdi for y, sier vi at y er en funksjon av x (Heir et al., 2009)

Definisjonene i lærebøkene er sparsommelige, utydelige og funksjonsbegrepets rikdom overlates til resten av teksten og andre kilder. De to lærebøkene har ikke eksplisitte eksempler på realisasjoner ut over den algebraiske. For å støtte tingliggjøringen må det utvikles undervisningsmidler som tar hensyn til de didaktiske og historiske utfordringene.

Sekanten og grenseverdien, hva skal vi med dem?

Historisk ser vi grenseverdien ikke er objektifisert hos store matematikere som Newton og Leibniz og en formalisering først fant sted i 1854 (se s. 38). Et grunnleggende spørsmål er om vi kan kreve en objektifisering i et kurs for sekstenåringer. Når læreplanen setter elevenes mål til å «gjere greie for definisjonen av den deriverte» (Kunnskapsdepartementet, 2010) er en tolking at grenseverdien må være objektifisert. En annen tolking kan være et grenseverdibegrep som det Newton og Leibniz klarte seg med. Som vi har sett, utviklingen av analysen skjedde uten en formell definisjon av grenseverdien. Et krav om objektifisering av grenseverdien er et høyt læringsmål i et grunnleggende kurs. I tillegg skal dette nås gjennom et par ukers undervisning. Nødvendigheten av det stiller også elevene og forskere (f. eks. Zandieh, 1998) spørsmål om. Tidligere har jeg gjengitt en episode tatt fra forklaringen av en dynamisk figur som var ment å vise overgangen fra sekant til tangent. Dialogen er mellom læreren, L, og en av elevene, E.

175.	L:	Så gjør vi sånn (tar tak i sekantens skjæringspunkt til høyre) og trekker ned over og da får vi en tangent.
176.	E:	Hvorfor gjør vi det?
177.	L:	For å finne tangenten
178.	E:	Men, den har vi jo! Vi kan bare få tegnet den

Fra mitt møte med den deriverte og til den dagen hadde jeg ikke tenkt like fritt som eleven i dialogen. Med teknologien til hjelp har det, siden den grafiske lommeregneren ble et naturlig hjelpmiddel i 1994, vært mulig å få tegnet tangenter i matematikktimene. Overgangen fra sekanten til tangenten var Newtons metafor for den punktderiverte og grenseprosessen ble brukt for å bestemme tangenten «closely enough» (Lakoff & Nuñez, 2001, s. 224).

Det samme spørsmålet ble stilt av elevene ved beregninger av gjennomsnittlig endringsrate over stadig mindre intervall. Ved sammenlikning av beregningene med CAS-verktøyets verdi for den punktderiverte stilte flere elever spørsmål om hvorfor vi ikke like gjerne kunne bruke «fasiten» funnet ved CAS-kommandoen. Kanskje er disse grensebetraktningene overflødig ved det første møtet med den deriverte i dag? Spørsmålet om når, og på hvilket nivå, elevene skal møte den formelle grenseverdien fortjener i alle fall en diskusjon.

Læreplanen og den deriverte som diskursivt objekt

Læringsmålene for den deriverte er beskrevet under hovedområdet Funksjoner i læreplanen. Målene som omfatter den deriverte og derivasjon er at elevene skal kunne:

- berekne ... gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta
- gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar (Kunnskapsdepartementet, 2010)

I læreplanmålene nevnes ikke den deriverte verken som begrep eller diskursivt objekt. Implisitt i «gjere greie for definisjonen av den deriverte» ligger et mål om en objektifisering av den deriverte, men det er prosessen utgreiing som er eksplisitt formulert. I resten av teksten går det samme igjen. Det er verbene «berekne», «finne» og «bruke» som dominerer. Det er mål som ofte nås ved algoritmer og kan utføres instrumentalistisk (Skemp, 1976). Når det diskursive objektet har vært det sentrale læringsmålet gjennom undervisningseksperimentet er det ut fra min tolking og mitt valg. I et kortsiktig perspektiv fram mot en sentralgitt eksamen kan et valg om metodeløsning være en bedre strategi for karakterstatistikken. I innledningen til oppgaven starta jeg med diskusjonen rundt TIMSS og norske elevers prestasjoner. En av oppgavene som førte til bekymring var en flervalgsoppgave hvor elevene skulle derivere funksjonen $\frac{4}{\sqrt{3x-4}}$ uten bruk av hjelpemidler (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010, s. 90). Prosentandelen som svarte riktig gikk drastisk tilbake fra 40% i 1998 til 22% i 2008. Det internasjonale snittet var 44%. Undervisningsdesignet og retningslinjene jeg har kommet fram til gjennom denne oppgaven bidrar nok ikke til å forbedre akkurat slike ferdigheter, men håpet mitt er at elevene kan individualisere den deriverte som et diskursivt objekt som viser seg nyttig for framtidige studier i den matematiske analysen og som bidrar til mer enn bare ferdigheter i derivasjonsrutiner.

8 LITTERATURLISTE

Akker, J. v. d. (1999). Principles and methods of developmental research. I J. van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Red.), *Design approaches and tools in education and training* (s. 1-14). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Apostol, T. M. (1967). *Calculus, Vol. 1: One-variable calculus with an introduction to linear algebra* (2. utg.). New York: Wiley.

Artigue, M. (1991). Analysis. I D. O. Tall (Red.), *Advanced mathematical thinking* (s. 167-196). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (2000). Teaching and learning calculus: What can be learned from education research and curricular changes in France. *Research in collegiate mathematics education IV*, *8*, 1–15.

Artigue, M. (2005). The integration of symbolic calculators into secondary education: Some lessons from didactical engineering. I D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Red.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (s. 231-304). New York: Springer-Verlag.

Asiala, M., Cottrill, J., Schwingendorf, K., & Dubinsky, E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431.

Biza, I. (2007). Is the tangent line tangible? Students' intuitive ideas about tangent lines. I D. Küchemann (Red.), *Proceedings of the British society for research into learning mathematics*, *27*(1), 6-11.

Biza, I. (2008). *Models of students´conception about the tangent line*. Presentert på ICME 11, Mexico. Hentet fra tsg.icme11.org/document/get/80

Biza, I., Diakoumopoulos, D., & Souyoul, A. (2007). Teaching analysis in dynamic geometry environments. I D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Red.), *Proceedings of the 5th Conference of European Research in Mathematics Education* (s. 1359-1368). Larnaca, Kypros. Hentet fra http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG9.pdf

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications.

Brown, A. L. (1992). Design experiments; Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141-178.

Bruner, J. S. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? *ACM SIGSAM Bulletin*, *24*, 10–17.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York: Courier Dover Publications.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d´Analyse*. Hentet fra http://www.archive.org/details/coursdanalysedel00cauc

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2006). Design research from a learning design perspective. I J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Red.), *Educational* *design research* (s. 17–51). London: Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. I E. Scanlon & T. O´Shea (Red.), *New directions in educational technology* (s. 12-22). Berlin: Springer-Verlag.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15-42.

Cornu, B. (1991). Limits. I D. O. Tall (Red.), *Advanced mathematical thinking* (s. 153-166). New York: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Vidakovic, D., Dubinsky, E., Schwingendorf, K., & Thomas, K. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1999). *The mathematical experience*. Boston, MA: Houghton Mifflin Harcourt.

Descartes, R. (1954). *The geometry of Rene Descartes*. New York: Dover Publications, Inc.

Design Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

diSessa, A., & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 77-103.

Doerr, H. (1995). An integrated approach to mathematical modeling: A classroom study. Presentert på The annual meeting of the American Educational Research Association, San Fransisco.

Doerr, H. (1997). Experiment, simulation and analysis: an integrated instructional approach to the concept of force. *International Journal of Science Education*, *19*, 265-282.

Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion: From trace graphs to instantaneous change*. Utrecht, Nederland: CD-bèta press.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-bèta press.

Dubinsky, E., & Mcdonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. I D. Holton (Red.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICM study* (s. 273-280). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103–131.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (s. 33-72). Oslo: Abstrakt forlag.

Eco, U. (1979). *A theory of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Ely, R. E. (2007). *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus* (Doktoravhandling). University of Wisconsin–Madison, Wisconsin.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Abingdon: Routledge Falmer.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 25-50.

Frege, G. (1904). Was ist eine Funktion. *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten geburtstage 20. februar 1904.* Hentet fra http://www.archive.org/details/festschriftludw02meyegoog

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443-471.

Gravemeijer, K. (2004a). Creating opportunities for students to reinvent mathematics. Presentert på ICME 10, København. Hentet fra www.icme10.dk

Gravemeijer, K. (2004b). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. I D. H. Clements & J. Sarama (Red.), *Hypothetical learning trajectories: A special issue of mathematical thinking and learning* (s. 105-128). London: Routledge.

Gray, E., & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. *Proceedings of PME25* (s. 65-72). Utrecht, Nederland: PME.

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2009). *Kortrapport om TIMSS Advanced 2008.* Hentet fra http://www.timss.no/rapporter%202008/Kortrapport%20TIMSS %20Advanced%202008%20norsk.pdf

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind: TIMSS advanced 2008 i videregående skole*. Oslo: Unipub.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Heath, T. L. (2002). *Euclid's elements*. Santa Fe, NM: Green Lion Press.

Heir, O., Erstad, G., Borgan, Ø., Engeseth, J., & Moe, H. (2009). *Matematikk 1T.* Oslo: Aschehoug.

Hjardemaal, F., Tveit, K., & Kleven, T. A. (2002). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: en hjelp til kritisk tolking og vurdering*. Oslo: Unipub.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative*. Jyväskylä: University Printing House.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s. 27 - 31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Juter, K. (2006). *Limits of functions. University students' concept development. Doctoral thesis.* Luleå: Luleå University of Technology.

Kaput, J. (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s. 27-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Katz, V. J. (1998). *A history of mathematics: An introduction* (2. utg.). Boston, MA: Addison Wesley.

Kunnskapsdepartementet. (2010). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet april 27, 2011, fra http://www.udir.no/grep/

Kvale, S., & Brinkman, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Ad notam Gyldendal.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by.* Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Nuñez, R. (2001). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus.* Oslo: Universitetsforlaget.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. I G. Harel & E. Dubinsky (Red.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Bd. 25, s. 175-194). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). *Students´tendency to assume resemblances between a function and it´s derivative.* TERC Working Papers.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F., & Hals, S. (2009). *Sinus 1T: matematikk for Vg1: studieforberedende program.* Oslo: Cappelen Damm.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250.

Peirce, C. S., & Houser, N. (1998). *The essential Peirce: selected philosophical writings.* Bloomington, IN: Indiana University Press.

Piaget, J. (1985). *Equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development.* Chicago: University of Chicago Press.

Presmeg, N. (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices. I G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (s. 293-312). New York: Kluwer Academic Publishers.

Reiber, L. (1994). *Computers, graphics & learning.* Dubuque, IA: Wm. D. Brown Communications, Inc.

Samuels, J. (2010). *The use of technology and visualization in calculus instruction* (Doktoravhandling). Columbia University.

Schrage, D. (1999). Was ist ein Diskurs? I H. Bublitz, A. Bührman, C. Hanke, & A. Seier (Red.), *Das Wuchern der Diskurse. Perspektiven der Diskursanalyse Foucaults* (s. 63-74). Frankfurt am Main: Campus.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and quandary of reification. I G. Harel & E. Dubinsky (Red.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes (s. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of

America.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27*(2), 4-13.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. I G. Harel & E. Dubinsky (Red.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (s. 25-58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, (77), 20–26.

Skvarcius, R., & Robinson, W. B. (1986). *Discrete mathematics with computer science applications*. Menlo Park, CA: Benjamin-Cummings Pub Co.

Sloane, F. (2006). Normal and design sciences in education: Why both are necessary. I J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 19–44). New Jersey: Routledge.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion–Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik–Didaktik*, *21*(1), 28–49.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1/2), 133-162.

Stoll, R. R. (1979). *Set theory and logic*. New York: Dover Publications.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.

Säljö, R. (2005). *Lärande och kulturella redskap: Om lärprocesser och det kollektiva minnet*. Stockholm: Norstedts akademiska förlag.

Søgaard, A., & Tambs Lyche, R. (1967). *Matematikk II for realgymnaset* (6. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Tall, D. O. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, *110*, 49-53.

Tall, D. O. (1986). Using the computer to represent calculus concepts. *Plenary lecture, Le IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Orléans, Recueil des Textes et Comptes Rendus* (s. 238-264).

Tall, D. O. (1987). Constructing the concept image of a tangent. *Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E.* (s. 69-75). Montreal, Canada: PME.

Tall, D. O. (1989). Concept images, generic organizers, computers & curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 37-42.

Tall, D. O. (1992). Students´difficulties in calculus. *Proceedings of working group 3 on students' difficulties in calculus.*, ICME 7 (s. 13-28). Quebec, Canada: ICME.

Tall, D. O. (2003). *Cognitive roots*. Hentet mars 31, 2011, fra http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/cognitive-roots.html

Tall, D. O. (2010). *A sensible approach to the calculus*. Presentert på The National and

International Meeting on the Teaching of Calculus, Puebla, Mexico.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tall, D. O., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. (K. Heid & G. W. Blume, Red.)*Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses*, *I*, 207-258.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. I D. O. Tall (Red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematical learning. I E. Dubinsky & G. Harel (Red.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes (s. 195-213). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Vygotskij, L. S. (2001). *Tenkning og tale*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Walker, D. (2006). Toward productive design studies. I J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 8-13). New York: Routledge.

Wittgenstein, L. (2009). *Philosophical investigations* (4. utg.). Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell.

Zandieh, M. (1998). The role of a formal definition in nine students' concept image of derivative. I S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Klob, K. Norwood, & L. Stiff (Red.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 136-141). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *Research in collegiate mathematics education IV*, *8*, 103–126.

9 VEDLEGG

Forundersøkelse i R1

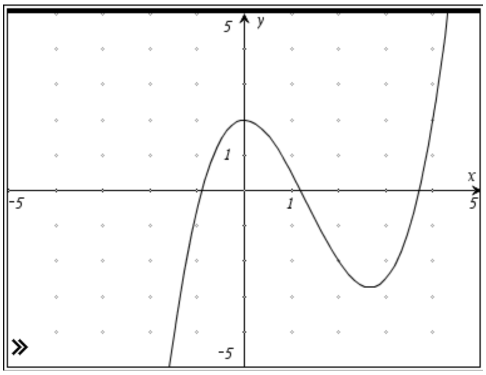
Derivasjon: en bakgrunnsundersøkelse

Spørsmålene tar for seg tema som hører til 1T.

Funksjoner

Hva er en funksjon?

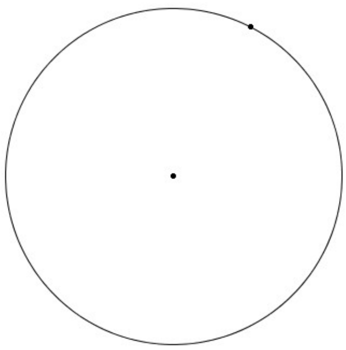
Bruk figuren under og svar på oppgavene



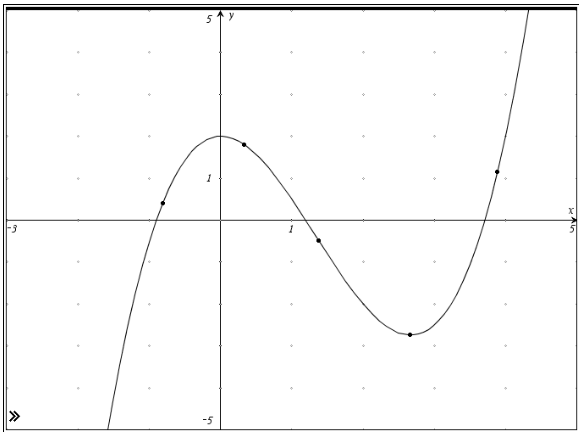
- Vi kaller funksjonen f. Hva er f(2)?
- Tegn fortegnslinja til f(x)

Tangenter

Tegn en tangent til sirkelen under i det avmerka punktet



Tegn tangenter i de avmerka punktene på grafen under



Ball som ruller på et skråplan

Tid [s]	Avstand [m]
0.	0.
0.1	0.0172
0.2	0.087
0.3	0.1575
0.4	0.2491
0.5	0.3505
0.6	0.4738
0.7	0.6098
0.8	0.7517
0.9	0.9129
1.	1.0741
1.1	1.2655
1.2	1.4603
1.3	1.6412

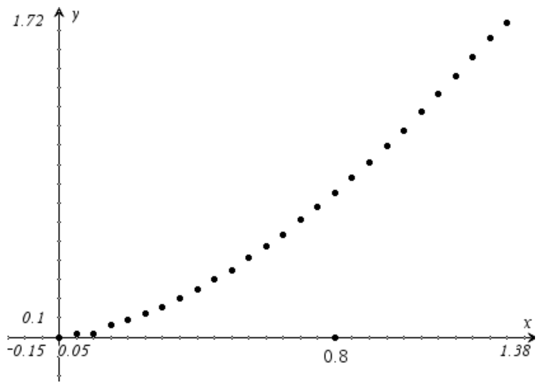
Tabellen viser målinger som ble gjort av en ball som rullet ned et skråplan. Bruk tabellen og svar

Hva er gjennomsnittsfarten mellom 0.6 s og 0.8 s ?

Hva er farten etter 0.8 s?

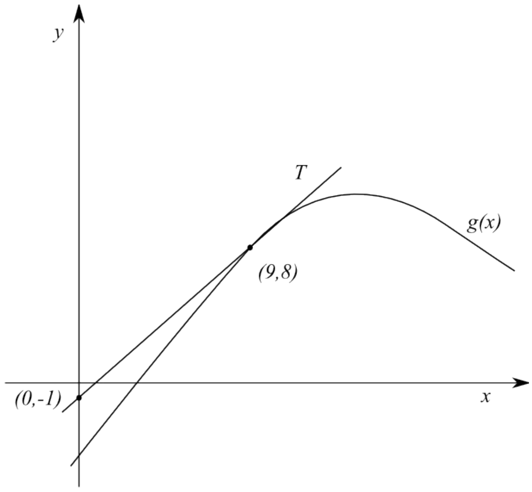
Figuren viser målingsresultatene tegnet opp i et koordinatsystem. Bruk figuren.

Finn stigningstallet til tangenten i punktet hvor tida er 0.8 s



Den deriverte

Se på figuren under og svar på spørsmålene



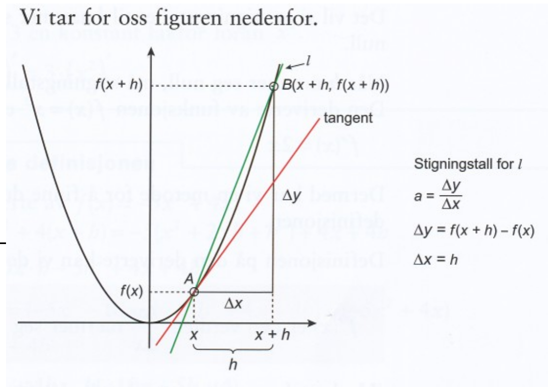
Anta at linja T er tangenten til grafen til funksjonen g(x) i punktet (9,8).

- Finn g(9). Husk en kort forklaring.
- Finn g'(9). Husk en kort forklaring.

Forklar figuren

I 1T-boka sto figuren til høyre.
Den benyttes til å forklare hva den deriverte,
f ' (x), er.

- Hva er den grønne linja?
- Hva er den røde linja?
- Hva er sammenhengen mellom de to linjene?



Definisjonen av den deriverte

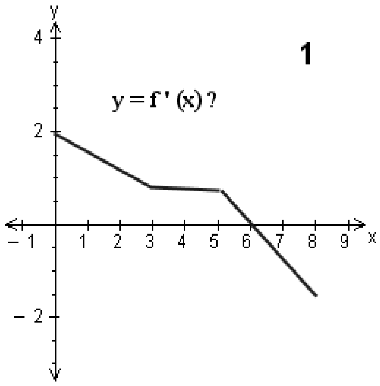
Den deriverte defineres som

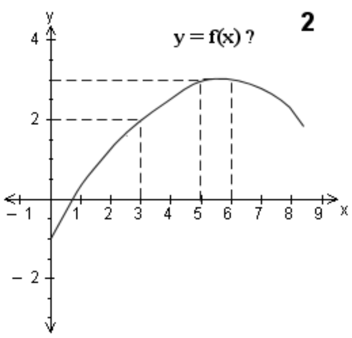
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

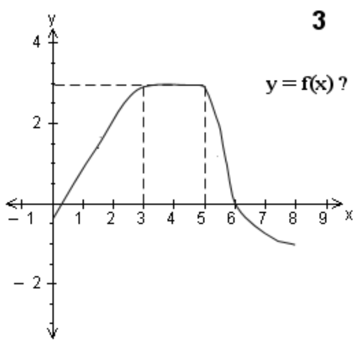
- Forklar uttrykket

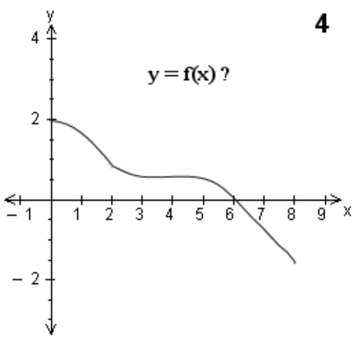
Finn riktig graf[28]

Figur 1 viser den deriverte *f '(x)* til en funksjon *f(x)*. Hvilken av grafene 2,3 eller 4 viser funksjonen f(x)? Gi en god grunn for svaret!









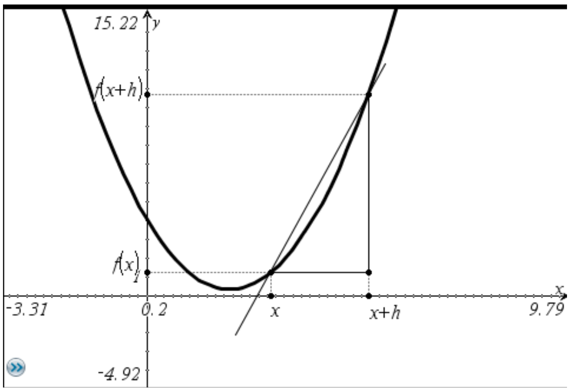
28 Figurene og grafene er basert på en oppgave av Cornu gjengitt av Tall (1986)

Avsluttende test

Definisjoner

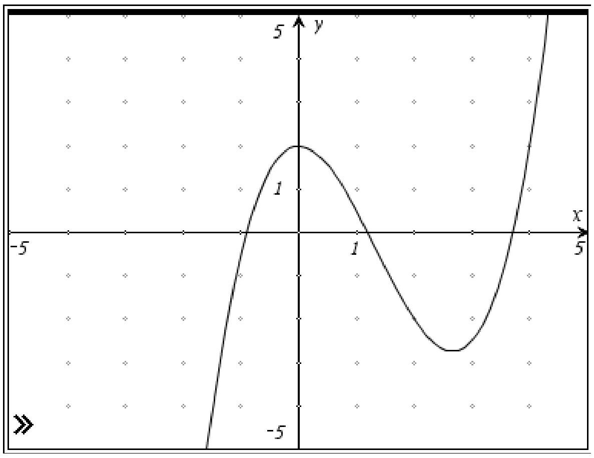
Hva er en funksjon?

Forklar hva den deriverte er



Vi brukte figuren til høyre for å forklare den deriverte funksjonen. Bruk figuren som utgangspunkt og forklar hvordan vi kan bruke figuren til å definere den deriverte.

Funksjoner



Vi kaller funksjonen som er tegna over for *f*. Hva er *f(2)*?

Tegn fortegnslinja til f(x)

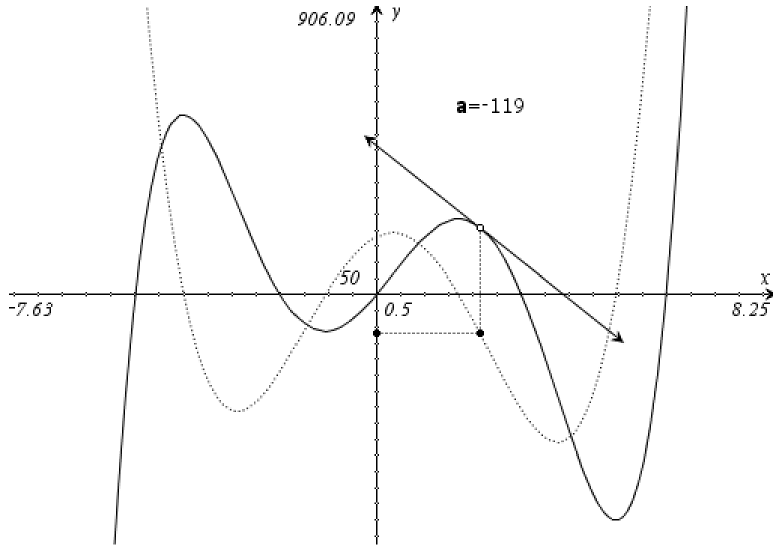
Veksthastighet

Veksthastighet kaller vi også vekstrate eller endringsrate. Uansett er det det samme: et uttrykk for hvordan funksjonen forandrer seg.
Vi ser på tanken med eplesaft. Funksjonen for å finne ut hvor mye saft det er igjen på tanken er: $f(t)=5000\cdot 0{,}977^t$
I tabellen til høyre er det laget en tabell hvor funksjonsverdiene er regna ut (t er bytta ut med x i tabellen, men betyr det samme).

- Hva blir veksthastighetene i intervallet [30,35]?
- Prøv å skriv uttrykket med symboler

x	f1(x):= 5000*(0.9..
0	5000.
5	4450.85
10	3962.01
15	3526.86
20	3139.51
25	2794.69
30	2487.75
35	2214.52
40	1971.3
45	1754.79
50	1562.06
55	1390.5
60	1237.78
65	1101.84
70	980.82
75	873.097
80	777.204
85	691.844
90	615.858
95	548.218
100	488.007
105	434.409
110	386.698
115	344.227
120	306.42

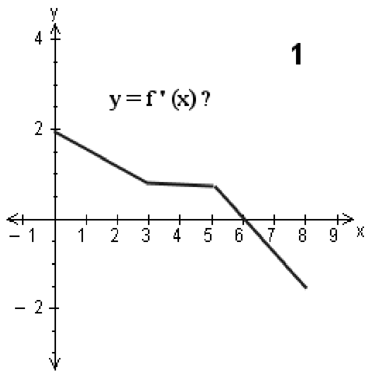
Den deriverte

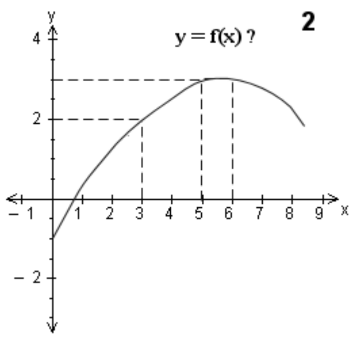


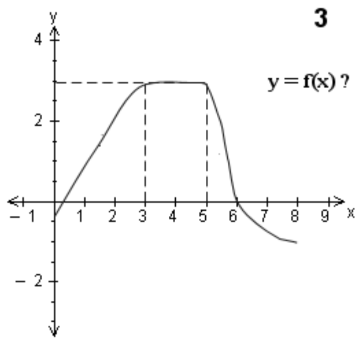
Kommenter hvordan den stipla grafen kan fortelle oss noe om egenskapene til den opprinnelige funksjonen (trukket med hel linje).

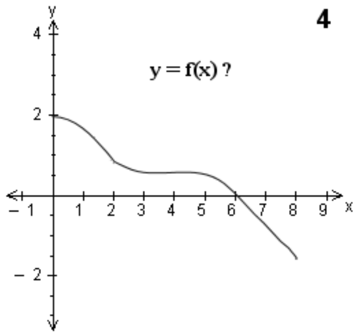
Finn riktig graf

Figur 1 viser den deriverte *f '(x)* til en funksjon *f(x)*. Hvilken av grafene 2,3 eller 4 viser funksjonen f(x)? Gi en god grunn for svaret!

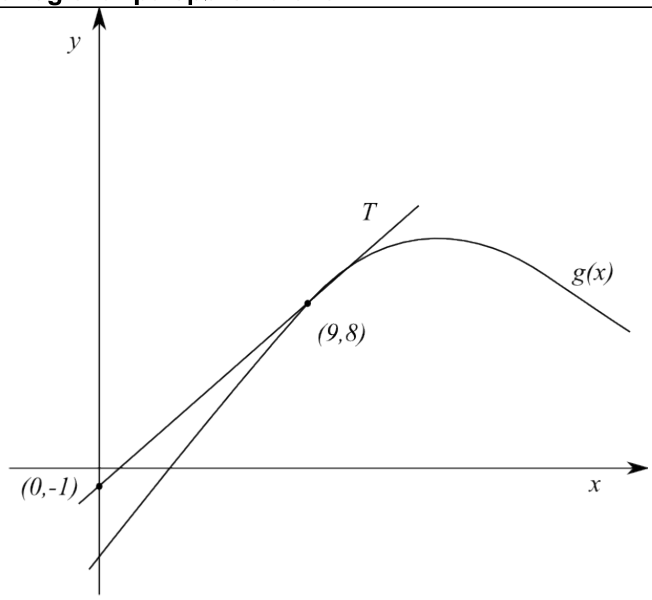








Se på figuren under og svar på spørsmålene



Anta at linja T er tangenten til grafen til funksjonen g(x) i punktet (9,8).

Finn g(9). Husk en kort forklaring.

Finn g'(9). Husk en kort forklaring.

Transkripsjonskoder

Disse transkripsjonskodene er benyttet i oppgaven:

[...] betyr ikke hørbart

... betyr kort pause

() ikke-verbale handlinger

[under hverandre betyr at den ene avbryter den andre