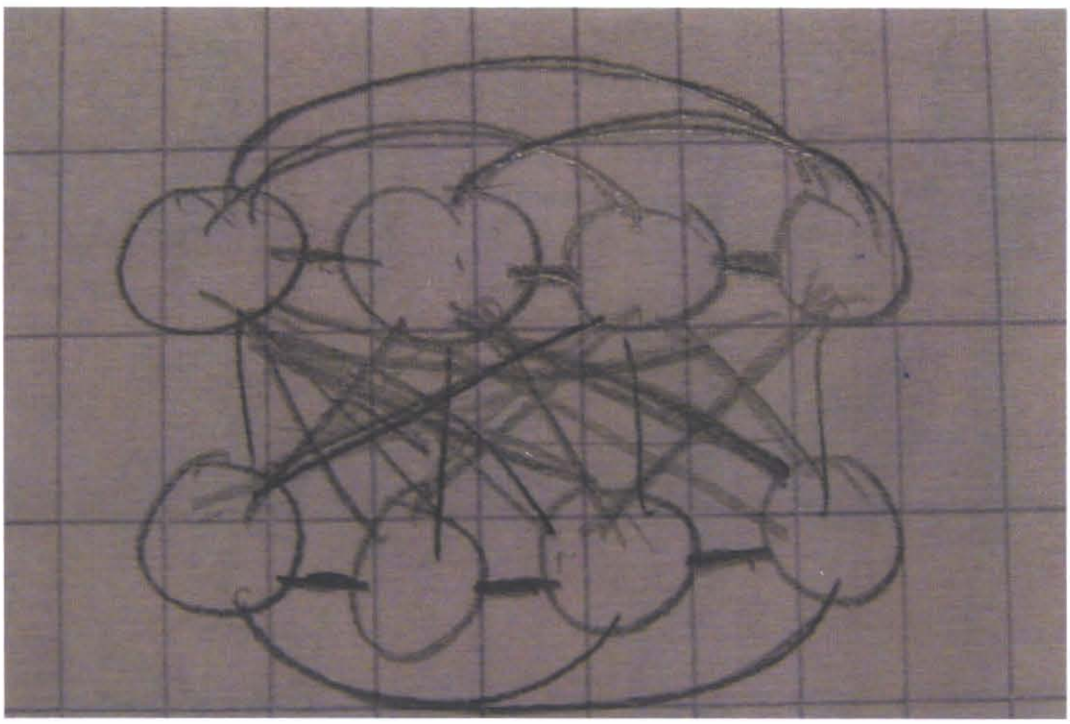
MASTEROPPGAVE

Øyvind Andersen Lundeby

Generalisering i algebra

En studie av utfordringer blant elever på 7. trinn

Trondheim, mai 2009



Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

INNHOLD

1. INNLEDNING

1.1 Tema og problemstilling

Tema for denne oppgaven er utfordringer elevene møter gjennom generaliseringsaktiviteter i algebra. Algebra er et omfattende område, og det er mange ulike klassifiseringer og definisjoner av hva det er. Jeg vil avgrense området til å gjelde skolematematikken der algebra er sentralt flere steder i gjeldende læreplanverk for Kunnskapsløftet, LK06. I følge Carolyn Kieran (2004) har synet på algebra de siste to tiårene generelt endret seg i retning fra å være en regelbasert ”blyant og ark”- aktivitet med symbolmanipulasjon til å omfatte problemløsing og modellering ved hjelp av PC. Man kan også si at fra å spille en mer pragmatisk rolle har algebra blitt et redskap til bedre forståelse innen flere områder av matematikken, for eksempel aritmetikk og geometri. Jeg vil avgrense algebra her til å gjelde aktiviteter som går på generalisering av tallmønster og figurtall der målet er å finne et nytt resultat eller formel. Dette resultatet eller formelen beskriver hvordan en følge figurer eller en tallfølge utvikler seg uttrykt ved n som er plass- eller figurnummeret. Anvendelse av en bokstav eller et annet symbol i denne sammenhengen bygger på ideen om et generelt tall eller variabel, og ikke en bokstav som representant for en ukjent størrelse. Jeg har undersøkt hvordan elevene arbeidet med to ulike oppgaver. I Oppgave 1 skulle elevene generalisere på grunnlag av en figurtallsfølge som økte aritmetisk. Oppgave 2, håndtrykkproblemet, åpnet for at elevene kunne lage støttefigurer, men generaliseringen skulle gjøres på grunnlag av en tallfølge/tallmønster de måtte finne først. Generalisering kan ses på som kjernen i all matematikkundervisning (Mason, 1996) og veien til forståelse, men ikke uten at dette har et logisk grunnlag. Luis Radfords (1996) synspunkt at dette grunnlaget er det å kunne rettferdiggjøre og begrunne en konklusjon. Bevisføring er ikke hovedtema i denne oppgaven, men vi skal se at hvordan elevene rettferdiggjør en hypotese eller konklusjon kan si noe om hvordan de generaliserer. Jeg vil sette selve generaliseringsprosessen i sentrum helt fra oppgavene blir gitt til en eventuell formel foreligger. I denne oppgaven som omhandler elever på 7.trinn er problemstillingen:

- *Hva kjennetegner utfordringene elevene møter gjennom generaliseringsaktiviteter i algebra?*

I kapittel 6 vil jeg drøfte hvordan disse utfordringene kan møtes.

1.2 Aktualitet, teori og bakgrunn

Forskningen på feltet viser at det kan være flere ulike tilnærminger til algebra, og peker ikke på noen som funger bedre enn andre. Rosamund Sutherland (2004) skiller mellom fire hovedretninger eller tilnærminger til algebra gjennom: Generalisering, problemløsing, modellering og funksjoner. I engelskspråklige land er generalisering den mest utbredte (Sutherland). Generaliseringsaktiviteter kan i en startfase spenne fra generalisert aritmetikk med vekt på egenskaper hos kategorier av tall og regneoperasjoner, til generalisering av figurtall og tallrekker. Man har funnet at elever generaliserer på ulike måter. Noen elever generaliserer numerisk og andre figurativt (Becker & Rivera, 2006), og i forbindelse med regneark kan det skilles mellom rekursiv og eksplisitt generalisering (Kieran & Yerushalmy, 2004). I grunnskolen er de matematiske objektene i algebra knyttet til to mulige representasjoner: numerisk og figurativ. Å generalisere numerisk innebærer å uttrykke en generell sammenheng på grunnlag av en tallfølge, mens i en figurativ generalisering er grunnlaget forholdet mellom figurer i en følge. I en rekursiv generalisering finner man en løsning som bygger på den foregående verdien eller figuren, eller alle. En slik løsning kan derfor være omfattende å bruke og krever mange regneoperasjoner dersom konkrete verdier skal finnes. Noe annet er det med en eksplisitt generalisering som er en løsning bygget på et begrenset antall verdier. Jeg vil komme tilbake til resultater fra forskningsfeltet innen algebra i teorikapitlet.

Hvordan kan man så nærme seg spørsmålet om utfordringene elevene møter gjennom generaliseringsaktiviteter i algebra? Hvor skal man begynne, og hvordan kan et så stort område avgrenses? Et særlig interessant perspektiv finnes hos Lesley Lee (1996), og det er hennes teori jeg vil benytte som en ramme rundt problemstillingen. Teorien er interessant blant annet fordi hun deler en arbeidssekvens eller problemløsningsprosess i algebra inn i tre nivåer: *Oppfatningsnivået*, *verbaliseringsnivået* og *symboliseringsnivået*. Dette er stadier som byr på ulike utfordringer. Stadiene innebærer hele prosessen fra hvordan elevene oppfatter en oppgave helt til hvordan de prøver å finne en formulering av en hypotese, et resultat eller en formel. I denne prosessen er det jeg vil se hvor eventuelle utfordringer finner sted og hva som kjennetegner disse. Dette er også interessant med tanke på undervisningspraksis. Hele arbeidsøkter blir analysert, og det gir mulighet til å bli kjent med nivåer som man ellers kan ha et mer ubevisst forhold til. Hennes teori og omtale av generaliseringsaktiviteter kommer ikke i konflikt med min definisjon av algebra i teorikapitlet eller elevoppgavene. Hun er på linje med John Mason (1996) når hun ser det som en sentral oppgave å hjelpe elevene med å finne et algebraisk nyttig mønster (Lee). For som vi skal se er ligger ikke problemene bare i det å oppfatte et mønster. For å systematisere de utfordringene elevene møter så jeg nytte av å se på fire nivåer av bevisføring hos Nicolas Balacheff (1988). Hans fire nivåer som jeg skal komme tilbake til er *naiv empirisme*, *avgjørende eksperiment*, *generisk eksempel* og *tankeeksperiment*. Disse nivåene sier noe om hvordan elevene argumenterer for en påstand.

I læreplanen LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) er det under kompetansemål for 2. trinn en overskrift som heter "Tall og algebra". Det er ingen punkter under denne overskriften som peker mot algebra, så det ser ut til at dette blir en tolkning hver enkelt lærer og skole må gjøre. I kompetansemålene etter 4. trinn kommer det å beskrive og se strukturer i enkle tallmønster. Etter 7. trinn legges det til geometriske mønster, samt det å argumentere for løsningsmetoder. Det er derfor tydelig, og med rette etter min mening, en intensjon om å begynne tidlig med algebra. Etter 18 år som lærer på alt fra 2. trinn til 3. videregående ser jeg relevansen i å debattere problemstillingene nevnt ovenfor. Jeg mener å se et behov for å utvikle egne og andre læreres "algebraøyne- og ører" som James Kaput og Maria Blanton (2003) kaller "algebra Eyes and Ears". Dette for i større grad å kunne utnytte de rike mulighetene nesten alle typer oppgaver gir. Meninger om at det er nok å lære regneartene etter 7. trinn er dessverre utbredt blant matematikklærere etter min erfaring. En årsak kan være oppfatninger om at algebra er komplisert symbolmanipulasjon som passer best på ungdomstrinnet. To forskningsoppgaver i en 8. klasse jeg utførte første året på masterutdanningen i matematikkdidaktikk ved Høgskolen I Sør-Trøndelag ga meg noen overraskende og oppløftende resultater. Den ene oppgaven omhandlet generalisering av $n \times n$-rutenett som var en av de tre oppgavene jeg benyttet i dette prosjektet. Tema i den andre oppgaven var funksjoner og grafer med blikk på endringsrate og gjennomsnitt. Først og fremst merket jeg meg sammenhengen mellom formuleringen av gruppeoppgavene og elevenes samarbeid og innsats. Alle oppgavene inneholdt spørsmål om å reflektere over og diskutere hvorfor resultatene ble som de ble. Disse spørsmålene tok omtrent like mye tid som selve beregningene eller "gjøre"- oppgavene. Mest overraskende var likevel de mange originale og gode forsøk på å bevise ulike påstander i plenum. Enkelte løsninger hadde jeg ikke tenkt på selv, og det kom tydelig fram at det eksisterte mange måter å tenke på. Tilsynelatende enkle mønster kan by på mange mulige dekomponeringer i søken etter en formel. Det ble vist gode eksempler på hvor mye tellearbeid man kan spare ved å finne en regelmessighet på grunnlag av en generalisering. Enkelte begrunnelser var nær ved å kunne karakteriseres som gyldige bevis, og jeg begynte å tenke på om det er en sammenhengen mellom det å begrunne en generalisering og det å gi dette en algebraisk og symbolsk representasjon. I disse oppgavene benyttet jeg spørsmål som kan fremme generalisering, for eksempel ”fortell meg hva du ser” (Mason, 1996) og ”fortell meg hva du tenker”, ”hvordan vet du at det er sant?” (Kaput & Blanton). Erfaringene her gjorde det å fortsette med algebra til et enkelt valg.

1.3 Læringssyn og metode

Jeg vil her benytte sosiokulturell læringsteori i min analyse av dataene jeg har samlet inn. Innenfor et sosiokulturelt syn på læring er det mange retninger, og en avgrensning er helt nødvendig. Jeg vil i hovedsak støtte meg til Lev Vygotsky (1978) og Harry Daniels (2005, 2008). Dette gir et grunnlag for mitt valg av analyseenhet som er de matematiske meningene som fremkommer i gruppearbeidet. En *matematisk mening* definerer jeg som en ytring som har et matematisk innhold, det vil si at det angår en relasjon mellom to størrelser. Dette er noe annet enn å telle eller konstatere et antall. En viktig rød tråd i dette læringssynet er at kunnskapen skal utvikles gjennom språket, ikke overføres. Gruppearbeid egner seg godt siden dette perspektivet også peker på at utvikling og læring først skjer på det sosiale planet. Teori omkring utvikling fra *hverdagsbegreper* til *vitenskapelige begreper* (Daniels, 2005) er et grunnleggende hjelpemiddel til å få en bedre forståelse av de utfordringene elevene møter i disse oppgavene. Her har jeg funnet støtte i Vygotsky, i tillegg til Vygotsky slik han blir referert til gjennom Daniels (2005, 2008). Når det gjelder støtte vil jeg dele dette inn i *liten grad av støtte* og *støtte*.

Mitt datamateriale består av lydopptak, elevarbeider og egne notater fra elleve grupper på 7. trinn. Hver gruppe besto av to til tre elever, og de arbeidet i 30-45 minutter med hver oppgave. De to oppgavene jeg skal se på her ble valgt ut av tre oppgaver jeg ga gruppene. Fire grupper arbeidet med Oppgave 1 og 2, tre grupper med Oppgave 3. Hvorfor Oppgave 3 ikke ble med i analysen forklares i metodekapitlet. Det å komme i dybden på enkelte gruppers samtaler og matematiske meninger kommer under en kvalitativ metode. Det er samarbeidssituasjonen i den enkelte gruppe som gir tilgang til den enkeltes meninger. Derfor vil jeg betrakte en gruppe som et case. Det er seks case, hvorav to grupper gjorde begge oppgavene.

1.4 Oppbygning

Oppgaven har fem hovedkapitler: Teori, metode, analyse, diskusjon og konklusjon, samt perspektivering. I teorikapitlet vil jeg gå nærmere inn på hvilket syn på læring og algebra jeg vil benytte, og forskningsfeltet. Her er det en avklaring av de mest sentrale begrepene og diskusjon omkring enkelte av disse. I metodekapitlet drøfter jeg metodene som er benyttet og de valg som er tatt i løpet av prosessen. I tillegg kommer en beskrivelse av faktorer som er relevante for gjennomføringen. De sentrale deler av datamaterialet blir i lys av teori og metode gjennomgått i analysekapitlet. Dette er utdrag som både kan kaste lys over generelle tendenser i gruppene og eksempler som er mer enkeltstående. En drøfting av resultatene fra analysen kommer i konklusjonskapitlet. I perspektiveringskapitlet drøftes mulige didaktiske implikasjoner og et syn på generaliseringens rolle.

2. TEORI

2.1 Algebra og generalisering

Hva er algebra? Det første mange tenker er nok at algebra har med bokstaver å gjøre, og at bokstavene kan være representanter for en ukjent størrelse, en variabel eller parameter. En formel uttrykt med bokstaver sier noe om en generell sammenheng mellom størrelser, ofte med begrensninger i hvilke verdier disse størrelsene kan ha. Karakteristisk for likninger er at denne verdien er en ukjent størrelse man skal finne. Den kan oppstå ved at man i en formel eller annet uttrykk setter visse begrensninger eller krav som må oppfylles. Slike generelle sammenhenger mellom størrelser kan det arbeides med i skolen lenge før bokstaver blir innført. I den grad algebra har med generalitet å gjøre, kan man hevde at algebraisk tenkning kan innføres før symboler og tallsymboler innføres. Jeg vil nå se på ulike sider rundt det jeg definerer som algebra i denne oppgaven.

Rekker av symboler er i seg selv ikke algebra, og betydningen av begrepet er blitt bredere med tiden, fra algebra som prosess til algebra som objekt (Mason, 1996). Mason uttrykker at algebra er språket for å uttrykke og manipulere generaliteter. Han holder fast ved påstanden om at algebra i stor grad presenteres som et "dødt emne" i skolen, og at faget da kan sidestilles med å huske verb eller deler på blomster. Dette skyldes mangelen på aktiviteter som fremmer generalisering. For Mason er generalisering kjernen i all matematikkundervisning, og han mener at en time som ikke er preget av generalisering ikke er en matematikktime. I forhold til Masons kategorier for algebra er mitt perspektiv på algebra i denne oppgaven å uttrykke generaliteter, ikke å manipulere. Det vil si å se det generelle i det spesielle (Mason) der figurtall hører hjemme. Jeg ga elevene oppgaver der de skulle generalisere en sammenheng på grunnlag av en regelmessighet i en klasse figurer. Hver måte å se på gir opphav til en måte å telle på (Mason), som i neste omgang kan føre til ulike, men ekvivalente uttrykk. For å vise at to uttrykk er ekvivalente kan det å manipulere være et nyttig bidrag, men utover dette er ikke det å manipulere symboler et tema i denne oppgaven.

Algebra kan deles inn i to hovedområder. Det ene er algebraisk problemløsing og det andre generalisering av tallmønster (Radford, 1996). Mitt perspektiv på algebra og figurtall hører til under sistnevnte, og her er målet å finne er nytt resultat, en matematisk setning/formel. Disse to tilnærmingene til algebra mener Radford utfyller hverandre, men stiller det som et åpent spørsmål hvordan de skal knyttes sammen. Han gjør oppmerksom på skillet mellom en bokstav som variabel i en formel og en bokstav som en ukjent størrelse i en likning. På tilsvarende måte går det en skillelinje mellom likninger og formler. I likninger behandler vi en ukjent størrelse som om den er kjent, for så å finne den via manipulasjon. Denne prosessen er av analytisk natur, og det samme er også det logiske grunnlaget. Noe annet er det med generalisering. Radford mener at generalisering ikke kommer utenom et spørsmål om gyldighet, validitet. Det medfører at det logiske grunnlaget for generalisering er det å kunne rettferdiggjøre og begrunne en konklusjon, med andre ord en bevisprosess. Jeg tolker det slik at dette kan skje både skriftlig og muntlig. I forbindelse med validitetsproblemet vil jeg støtte meg til Balacheffs teori om bevisnivåer (Balacheff, 1988). Det må nevnes at Radford mener validering i seg selv en kompleks idé, men at dette ikke utelukker at generalisering kan være en vei inn i algebraen

2.2 Lesley Lee og hennes tre nivåer i generaliseringsaktiviteter

Min teoretiske hovedramme bygger på Lee (1996) og hennes inndeling av generaliseringsaktiviteter i tre faser eller nivåer: *Oppfatningsnivået*, *verbaliseringsnivået* og *symboliseringsnivået*. Jeg finner dette nyttig fordi det gir et grunnlag til å analysere en hel prosess fra en oppgaven blir gitt til en løsning eventuelt foreligger. Som lærer mener jeg denne inndelingen er interessant av minst to grunner: Hver fase har sine kjennetegn, og det kan være viktige momenter man i praksis kan ha oversett eller bør gi en annen oppmerksomhet. For det andre kan man lære noe om problemene elevene støter på og når de inntreffer. Oppfatningsnivået sier noe om hvordan elevene tolker oppgaven og hva som eventuelt kan være hindringer for å komme videre. Dette nivået kan kalles et persepsjonsnivå, og de første figurene elevene tegner kan være til hjelp i analysen. På verbaliseringsnivået er det en tydeligere verbal beskrivelse av problemet eller mønsteret som står i sentrum, og det kan gjerne være en glidende overgang fra oppfatningsnivået. Overgangen kan også karakteriseres ved at man går fra hverdagsspråk over til mer matematisk språk og bruk av tallsymboler. Symboliseringsnivået er siste fasen der en løsning skal formuleres formelt med en eller flere variabler, det være seg rekursivt eller eksplisitt avhengig av oppgaven. Lee mener at en viktig nøkkel til suksess ligger i den første oppfattelsen av mønsteret, men at denne oppfatningen ikke alltid er algebraisk nyttig på symboliseringsnivået. Hun fant at studentene hadde problemer med å endre sin første oppfattelse/persepsjon av et mønster, og at dette førte til problemer senere. Selv om hun forsket på voksne studenter med ulik bakgrunn, antar hun at det samme ville blitt funnet hos 14-åringer. Det er lite empiri omkring hennes teori, og jeg skal her komme med et bidrag.

Som Radford (1996) mener Lee (1996) at algebra i figurtall har som mål å finne en formel for det generelle leddet i en følge. Også for henne er dette nær selve kjernen i disiplinen algebra (Lee), men understreker at det kan være flere innfallsvinkler i en introduksjonsfase. Hos Mason (1996), Radford og Lee står det å uttrykke generaliteter sentralt i disiplinen algebra. Her er det ingen motsetninger mellom synspunktene.

2.3 Forskningsfeltet

I følge Romulo Lins og James Kaput (2004) var det en tendens til å studere hva elevene ikke kan, eller såkalte ”triste historier” fram mot 1990-tallet. Etter dette dreide fokus seg mot å bygge på hva elevene kunne fra før og hvilke erfaringer de hadde, ”lykkelige historier”. Det ble funnet at barn allerede i barnehagealder kunne mer enn tidligere antatt. Det ble nå et spørsmål om passende introduksjon og tilpassede verktøy som diagrammer og notasjon. Det er ikke bare elevene som er gjenstand for forskning. Elevenes vansker har sterke røtter i lærerens mangel på å skape mening i algebra (Lins & Kaput). Det er derfor gjort mye arbeid med tanke på å utvikle læreplaner for grunnskolen og lærerstudenter. Hvordan man best introduserer algebra og algebraisk tenkning generelt er det ulike oppfatninger om, og det praktiseres svært ulikt. Hva som er best er også et åpent spørsmål. Man bør være oppmerksom på en annen innfallsvinkel som kalles ”fruktsalatalgebra” (fruid salad algebra) (Sutherland, 2004). Dette innebærer at symbolene representerer objekter, *B* for bananer og så videre. Sutherland mener at ulempen med dette er at elevene senere kan få problemer med å tenke på en bokstav som variabel. For eksempel om to bananer koster 7 kroner kan man bruke likningen $2B=7$. *B* står da ikke for objektet banan, men en ukjent størrelse, for eksempel prisen for en banan. Intensjonen er å ta utgangspunkt i elevenes forkunnskaper og symboler som gir mening (Sutherland). Kieran (2004) ser en annen tendens som hun mener er utbredt. Det er at teknikk og symbolmanipulasjon får for stor plass i forhold til begrepsforståelse. Teknikk kan komme i andre rekke og spille en mer pragmatisk rolle, men teknikk spiller en epistemologisk rolle i den forstand at den bidrar til forståelse av de algebraiske objektene (Kieran). Jeg tolker det slik at det blir vanskelig å utvikle bedre forståelse i algebra uten teknikk, og at man gjennom teknikk bedre ser hvordan algebraiske objekter kan forholde seg til hverandre eller andre størrelser.

Det eksisterer en internasjonal kommisjon ICMI (The International Commission on Mathematical Instruction) som har fokus på aktuelle emner innen matematikkundervisning. Konferansene som avholdes sammenfattes i omfattende rapporter. Den 12. konferansen i 2001 gikk i dybden på algebra. På vegne av en arbeidsgruppe oppsummerer Sutherland (2004) hvordan en gruppe forskere kategoriserte fire typiske tilnærminger til algebra skolen. Den ene er gjennom generalisering, hvilket er vanligst i engelskspråklige land. De andre er gjennom problemløsning og likninger. De to siste er modellerings- og funksjonstilnærminger (Sutherland). Jeg finner det naturlig at alle disse perspektivene kan kombineres gjennom grunnskolen, men i denne oppgaven vil generalisering stå i sentrum.

I følge Joanne Rossi Becker og Ferdinand Rivera (2006) kan det settes et skille mellom de som generaliserer *numerisk* og de som generaliserer *figurativt* (Becker & Rivera). Grensen er ikke absolutt, og de baserte sine konklusjoner omkring elever på 6. trinn i USA som hovedsakelig generaliserte numerativt og hovedsakelig figurativt. Skillet mellom begrepene numerativ og figurativ generalisering henspeiler på hvilke objekter det generaliseres over, tall eller figurer (Becker & Rivera). Figurer i en slik sammenheng kan kalles *figurtall*. Et figurtall er en visuell representasjon av en mengde, og i en figurtallsfølge kan sammenhengen mellom posisjonen *n* og antall elementer i figuren være ordnet på mange måter. Strukturer kan være mer eller mindre ”gjemt” og som vi skal se by på ulike utfordringer å oppdage, beskrive og symbolisere. Med figurativ generalisering mener jeg det at det er egenskapene ved figurene som danner grunnlaget for en formel. I en figurativ generalisering kan *n* i en formel få sin mening direkte fra figurene. Becker og Rivera fant at elever som hovedsakelig generaliserer figurativt ikke alltid så behov for å lage en tabell for å etablere en formel, og samtidig begrunnet de sine påstander bedre. De var mer relasjonsorienterte i den forstand at de tok hensyn til hva som var invariant i en struktur, hvilket blir en parameter i en formel. Prøving og feiling var en hyppigere strategi hos de som generaliserte numerativt (Becker & Rivera). I undersøkelsen benyttet de blant annet et mønster som ligner på Oppgave 1 her (se metodekapitlet), med den forskjell at det er fire ”søyler” eller ”armer” som samlet øker lineært. Undervisningsopplegget knyttet til undersøkelsen hadde tre hoveddeler, ”operasjoner”, ”bygge formler” og ”uttrykk og formler”. Det er et mål å komme opp på symboliseringsnivået (Lee, 1996) og finne et uttrykk for veksten ved hjelp av en variabel *n*. På den måten er undersøkelsen til Becker og Rivera svært relevant for min problemstilling. Tre grunnleggende faktorer for suksess i det å generalisere figurtall er å kunne forstå flere representasjoner, kunne bruke en variabel og ha sin styrke i figurativ generalisering (Becker

& Rivera). Å se en struktur vil jeg også omtale som å se en *dekomponering*. En matematisk nyttig dekomponering er en av de mulige dekomponeringene som enklest lar seg symbolisere.

Det å være i stand til å redegjøre for og rettferdiggjøre et resultat sier noe om evnen til å generalisere. Spørsmål som ”hvordan kan du være sikker på dette?” eller ”gjelder dette for alle *n*?” (der *n* for eksempel er en fri variabel, ”plassnummer” i en tallfølge) utfordrer oss til å reflektere utover de prosedyremessige delene som gjerne innleder en oppgave. Når elever bruker spesielle tall for å forklare et generelt tilfelle, er det et godt tegn på en begynnelse av algebraisk tenkning (Kaput & Blanton, 2003). De kan ha sett en generell sammenheng som de prøver å vise ved å benytte for eksempel flere store verdier, og denne sammenhengen kan komme tydeligere fram etter ytterligere testing. På et tidspunkt i denne prosessen kan for eleven et bestemt tall gå over til å representere et generelt tall, og man er kommet et godt steg i retning av å si noe generelt om for eksempel en klasse figurer. Det kan være tilstede en intensjon om å si noe generelt som en lærer kan bygge videre på. I en studie ble det funnet at 25 prosent av en gruppe 15-åringer beviste sine påstander gjennom kun å vise noen eksempler (Balacheff, 1988). Dette er det laveste nivået i bevisføring, og Balacheff kaller det *naiv empirisme*. Naiv empirisme kan også ses på som en motstand mot generalisering, men jeg vil si det er et naturlig nivå i den forstand at elvene i første omgang har fokus på tallmaterialet de har foran seg. Et steg nærmere generalisering får vi på neste nivå der en påstand testet mot for eksempel en stor verdi, og Balacheff kaller dette nivået et *avgjørende eksperiment*. Ingen av disse to nivåene innebærer noe gyldig bevis. Først når elevene klarer å gi uttrykk for hva som er karakteristisk for egenskapene eller strukturen i hele klassen av objekter kan man snakke om et gyldig bevis, å gi et *generisk eksempel* (Balacheff). Da er det mulig å si at man har kommet ”bak tallene” og sett en sammenheng eller flere mellom ulike størrelser. Det må uttrykkes en grunnleggende struktur for klassen av figurer. Det fjerde og høyeste nivået er det nok sjeldent man støter på i grunnskolen. Det er et formelt korrekt bevis, for eksempel et induksjonsbevis, eller såkalt *tankeeksperiment*. Å komme over nivået med naiv empirisme innebærer en viktig endring i hvordan man tenker om et problem (Balacheff) og er et steg i retning generalisering, fra det spesielle til det generelle.

2.4 Overflategeneralisering og struktur

Det eksisterer ulike kategorier av generalisering, og jeg ser behov for å utdype en variant jeg finner i datamaterialet. En generalisering kan bygge på en synlig struktur eller mønster med en strøm av likheter. For eksempel kan det være en sammenheng mellom posisjonen (n) til en figur og antall kvadrater i denne:

Figur nr.	Antall kvadrater
1	$1+2\cdot1$
2	$1+2\cdot2$
3	$1+2\cdot3$
…	
n	$1+2\cdot n$

Figur 1

En metafor på en generalisering fra en struktur lik denne er å ”gå langs årringene” eller ”going with the grain” (Mason & Drury, 2007). Jeg vil bruke benevnelsen *overflategeneralisering* på dette. For å komme dypere inn i strukturen og skape mening i den kan det være nødvendig å ”gå på tvers av årringene” eller ”*go across the grain*” som John Mason og Helen Drury kaller det. En annen mulig metafor kan være å ”se på” og ”se gjennom” (Mason, 1996). ”*Going with the grain*” er også i følge Mason og Drury et kjennetegn ved rekursive følger der et ledd bygger på det foregående. Hva som står fast i slike uttrykk og hvorfor, hva som varierer og hvor det stammer fra kan det være mindre oppmerksomhet mot. Denne strukturen kan også opptre muntlig når det settes inn verdier i en formel elevene tester ut, for eksempel gjennom spørsmålene ”hva gjør du for å finne antall kvadrater i figur nummer 100? … 1000?”

For å kunne utføre en overflategeneralisering må strukturen være tydelig i den forstand at det er mulig å spore hva som er invariant og hva som varierer. Figur 1 er et eksempel på en slik struktur. Med fokus på en del av strukturen som har få opplysninger kan et forsøk på å generalisere bli uriktig. Eksempelvis kan symbolisering av observasjonene 2+2=4 og $2^2 = 4$ medføre feilslutningen at $a+a=b$ og $a^2 = b$ for alle a og b. En struktur som figur 1 er en dekomponering som ikke nødvendigvis gir annen mening enn symboler arrangert i et mønster. Uttrykket $1+2n$ kunne blitt utledet fra egenskaper ved figuren, for eksempel at den har et sentrumskvadrat og to armer som alltid har n kvadrater hver. En struktur i form av en tabell kan også bli overflødig i symboliseringen om man ser en matematisk nyttig dekomponering, det vil si en dekomponering som lar seg symbolisere. Derimot er det vanskelig å tenke seg annet enn en overflategeneralisering dersom kun en struktur som figur 1 er gitt. $1+2n$ kan gi opphav til mange ulike figurer. Å finne slike blir å gå motsatt vei i forhold til Oppgave 1, fra symbolisering til figur. Vi skal se at en elev fikk et slikt oppfølgingsspørsmål av meg.

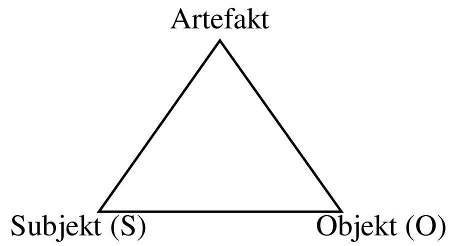
Overflategeneralisering står nærmest numerativ generalisering som hos Becker og Rivera (2006). Numerativ generalisering består i hele prosessen i arbeidet med finne et system i tallene, fra første tanker om likheter og forskjeller til en eventuell symbolisering eller en regel uttrykt verbalt foreligger. Den kan som nevnt oppfattes som en strategi som også kan benyttes på figurative oppgaver. Numerativ generaliseringen kan bygge på ulik grad av oppmerksomhet mot struktur. Overflategeneraliseringen er kun sluttfasen i symboliseringen uten oppmerksomhet mot hvilken mening man gir leddene eller hvilken rolle de spiller i en figur.

2.5 Læringssyn

Jeg vil benytte sosiokulturell læringsteori som har sine sterkeste røtter i Vygotskys (1896-1934) teorier. Det er skrevet mye om Vygotsky og mange tolkninger og anvendelser foreligger. Jeg vil hovedsakelig holde meg til Vygotsky (1978) og Daniels (2005, 2008). Vygotskys teorier ble først underlagt gransking og interesse i den vestlige verden på 1970-tallet. Sterkest kontrast i forhold til andre læringsteoretiske retninger er vektleggingen av at læringen er grunnleggende sosial og situert. Kunnskapen er ikke uavhengig av kontekst og formål. Konteksten er en del av aktiviteten, og aktiviteten er en del av læringen. I læringsprosessen kan andre personer eller artefakter være til hjelp, og i den forstand er også læringen mediert. Videre vektlegger dette perspektivet at læring er distribuert mellom mennesker, og dermed er det også rom for å definere læring som deltakelse i et praksisfelleskap (Lave & Wenger, 2005). Språkets rolle er å betrakte som et redskap for å utvikle kunnskap, ikke for å overføre kunnskap (Dysthe, 2001). Et grunnleggende punkt hos Vygotsky (1978) er den såkalte generiske loven for kulturell utvikling: Alle funksjoner i et barns kulturelle utvikling skjer på to plan, først i det sosiale, og så på det psykologiske. Det opprettes en form for sammenheng mellom noe som kan defineres som sosialt og individuelt (Daniels, 2008). Denne sammenhengen er noe som reiser spørsmålet om metodiske konsekvenser. Å generalisere ulike mønster er en høyere mental funksjon som dermed er en aktivitet man bør begynne med i samspill med andre. En indre rekonstruksjon av en ekstern operasjon kaller Vygotsky (1978, s.56) *internalisering*. Det være seg bruk av symboler eller konkreter. Spesielt viktig med tanke på utvikling av høyere mentale prosesser er rekonstruksjonen eller omdannelsen av aktiviteter med symboler (Vygotsky). Dette er også noe som begynner i det sosiale før den oppstår i den enkelte. Det blir derfor naturlig å se på aktiviteter som er kollektive og som inneholder språklig kommunikasjon og meningsutvekslinger. Skal man forstå mentale funksjoner hos den enkelte må man undersøke den sosiale og kulturelle prosessen de stammer fra (Wertsch & Tulviste, 2005). Her vil jeg se på de matematiske meningene som fremkommer gjennom gruppearbeid, med særlig vekt på sekvenser av ytringer som forteller noe om de utfordringene elevene møter i generaliseringsaktiviteter.

Elevene er i en samarbeidssituasjon der jeg som lærer kan bidra med støtte etter behov. Det er en situasjon der det sosiale og det individuelle blir brakt sammen. I en slik skolesituasjon har språk og bruk av tegn en medierende effekt (Daniels, 2005). Min rolle som veileder i gruppearbeidet innebar støtte til enkeltelever og hele grupper samtidig. Jeg vil dele opp min støtte i to nivåer, *liten grad av støtte* og *støtte*. Liten grad av støtte er spørsmål eller hint som er med på å fremme algebraisk tenkning, å se en generell struktur. Spørsmål kan være ”hva ser du?” eller hint om å prøve ulike verdier. Støtte innebærer at det gis tydeligere hint om en idé for å komme videre med oppgaven og eventuelt bytte strategi. Det kan være forslag til notasjon og bruk av figurer eller styre oppmerksomheten mot en konkret sammenheng de har oppfattet feil. Det innebærer spørsmål som ”hva blir formelen dersom første leddet i følgen var 1?”, ”hva øker med tre hele tiden?”. Dette er en skjematisk inndeling av støtte som jeg finner tilstrekkelig for å besvare problemstillingen.

Et annet område fra sosiokulturell teori jeg vil benytte er teori omkring utviklingen av symboler og begreper. I følge Daniels (2005) setter Vygotsky et skille mellom hverdagsbegreper og vitenskapelige begreper, og hvordan et barn oppfatter et vitenskapelig begrep er avhengig av barnets generelle evne til å danne begreper. Vygotsky mener vitenskapelige begreper dannes på grunnlag av en systematisk og organisert tenkning, mens hverdagsbegrepene er sterkere knyttet til spesielle kontekster (Daniels, 2005). Alle funksjonene og objektene vi benytter i matematikkoppgavene her er mediert gjennom artefakter som ord, figurer , symboler og gester som for eksempel peking. Det vil si at de ikke er ”naturlige” eller ”umedierte”. Sammenhengen mellom et begrep og dets innhold blir dermed indirekte gjennom et ”medium” og kan illustreres slik i følge Michael Cole (2005):



Figur 2. Medieringstriangel

Den direkte forbindelseslinjen mellom subjektet (S) og objektet (O) representerer den umedierte relasjonen mellom for eksempel subjektet og omgivelsene eller stimulus og respons (Cole). Da de vitenskapelige begrepene har en høyer grad av generalitet er det i følge Daniels (2008) mulig å si at det vitenskapelige begrepets forhold til objektet er mediert gjennom andre begreper. På linje med figurer og tegn er det også meningen elevene legger i begreper som er viktige, og ikke figurene, tegnene eller begrepene i seg selv. Vygotsky hadde ikke tro på en direkte overføring av mening i begrepene fra lærer til elev og hevdet at forsøk på det ville være meningsløs læring av ord (Daniels, 2008). I følge Daniels (2005) skiller Vygotsky mellom begreper som blir utviklet i en formell skolesituasjon og begreper utviklet i et praktisk samfunn, og kaller disse henholdsvis vitenskapelige og spontane begreper.

3. METODE

3.1 Samarbeidet med skolen

Som grunnlag for å arbeide med generalisering i algebra ønsket jeg å studere små grupper av elever som samarbeidet. I forhold til valg av skole hvor undersøkelsen skulle gjennomføres hadde jeg to kriterier. Det første var at det ikke skulle være samme skole som jeg er ansatt på. Jeg ønsket en situasjon der jeg ikke hadde noe kjennskap til verken klassen eller klassens matematikklærere på forhånd. Det bygger jeg på en antakelse om at de er enklere å være objektiv i vurderinger og analyse i en kontekst fri for forhåndskunnskap om hverandres meninger, holdninger, faglig ståsted og så videre. For det andre så jeg etter en barneskole fordi jeg ville inn i en tidlig fase av innføring i algebra i skolematematikken. Det ble et ja fra første skolen jeg oppsøkte. Skolens ledelse formidlet mitt ønske til lærerne på 7. trinn, og etter noen få dager kom jeg i kontakt med en matematikklærer for en av basisgruppene. Hun var også kontaktlærer for gruppen, og underviste denne gruppen i matematikk på tredje året. I midten av oktober 2008 møtte jeg gruppen for første gang og fortalte om prosjektet. Både lærer og elever virket svært positive til å være med i en undersøkelse. Foresatte ble bedt om å fylle ut et skjema om samtykke til deltakelse i samråd med elevene. Et stort flertall svarte positivt på dette. Selve undersøkelsen ble gjennomført i løpet av elleve timer fordelt på to uker i november. Før denne hadde jeg et pilotprosjekt på to enkelttimer i slutten av oktober.

3.2 Valg av smågrupper

Pilotprosjektet ble gjennomført med hele gruppen samlet i samme rom. Til vanlig sitter to til fire elever sammen og utover dette eksisterte det ingen faste gruppeinndelinger. Valg av grupper til Oppgave 1-3 ble gjort på grunnlag av hvem de samarbeidet med til daglig. Det var ingen problemer med å danne andre grupper dersom noen var borte. Enkelte elever kunne derfor komme på to ulike grupper. Med fiktive navn ble gruppesammensetningene slik på de ulike oppgavene.

	A	B	C	D
Oppgave 1				
	Roar	Anne	Trond	Paul
	Marthe	Ingeborg	Line	Kristian
	Ingrid		Markus	Pia

Oppgave 2	E	F	A	B
	Paul	Trond	Roar	Anne
	Tor	Pia	Marthe	Ingeborg
		Bente	Ingrid	

Oppgave 3	G	F	A
	Tor	Trond	Roar
	Markus	Pia	Marthe
		Bente	Ingrid

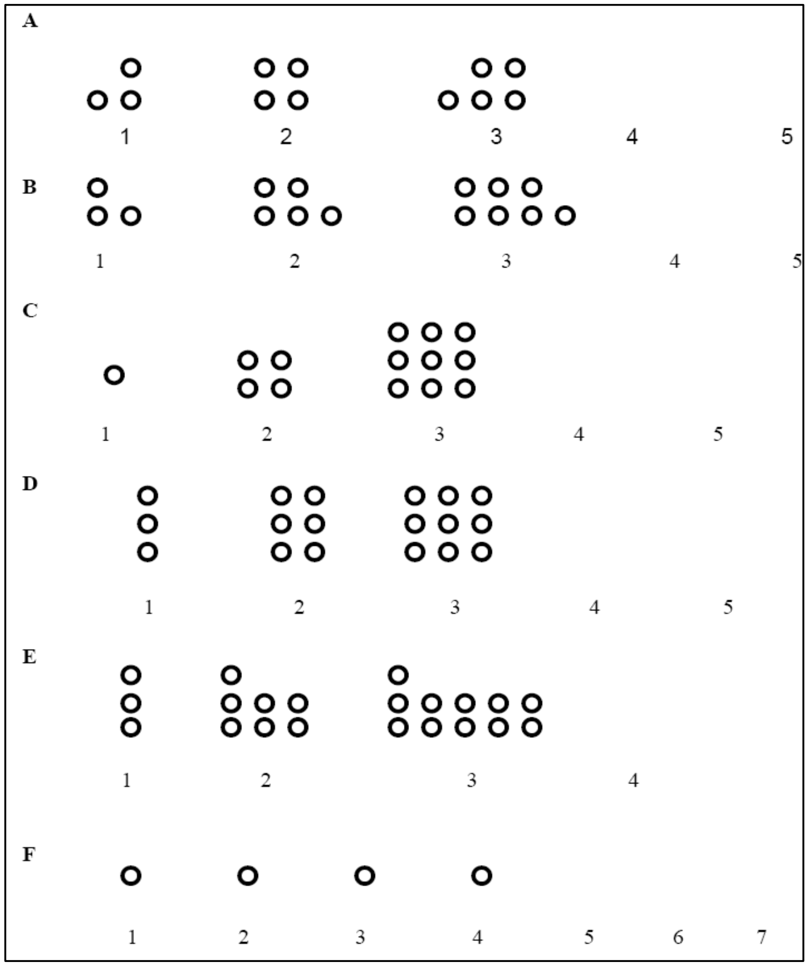
Gruppeinndelingene skulle være representative for inndelingene elevene bruker til daglig blant de som sa seg villig til å delta. Vi har å gjøre med et stort frivillig utvalg av elever fra basisgruppen, men det kan være ulike motiv for å delta eller la være. I slike tilfeller skal man være ytterst forsiktig med å trekke for bastante konklusjoner om hvor representative resultatene er (Cohen, Manion, & Morrison, 2007). Metoden for utvelgelse av grupper tok hensyn til at situasjonen for elevene ikke skulle bli så ulik den de er vant med til daglig.

3.3 Pilotprosjektet

Jeg ble kjent med at klassen ikke hadde arbeidet i noen særlig grad med algebra og ikke med variabler. Før selve undersøkelsen gjennomførte jeg derfor et pilotprosjekt på to skoletimer. De ble gjennomført i oktober med en uke mellom hver time. Oppgavene i pilotprosjektet hadde til hensikt å bli kjent med ideen om n som variabel gjennom generaliseringsaktiviteter. Jeg antok at de tre oppgavene jeg ville benytte som hovedrunnlag for datainnsamlingen ville blitt for tidkrevende uten denne innledningen. I to eksempler med prikkmønster under introduksjonen benyttet jeg begrepene ”plassnummer”, ”figurnummer” og ”nummer i rekken” for å klargjøre at posisjon var av betydning. Det var for elevene et første møte med figurtall. Et annet mål for elevene med oppgavene var å utvikle forståelse for strukturelle sammenhenger og relasjoner mellom størrelser. Til hver følge av figurtall fulgte tre spørsmål:

> Kan du finne ut hvor mange prikker det er i figur nr. 100?
> Beskriv sammenhengen med ord
> Finn et algebraisk uttrykk for antall prikker i figur nr. n

At de skulle tegne figur nummer fire og fem ble fortalt. Her er figurene fra den første timen:



Figurtallene fra den første timen i pilotprosjektet

Med ulik grad av støtte rakk de aller fleste å finne riktige svar på samtlige oppgaver. Begge timene var generelt preget av stor arbeidsiver og lyst til å finne løsninger. Jeg ble overrasket over hvor mange som klarte å uttrykke veksten ved *n* uten støtte, med unntak av oppgave F som skilte seg ut på to måter. Konstanten 1 ble sett på hele tre ulike måter: Som verdien 1 uavhengig av *n* og $\frac{n}{n}$ samt $n-(n-1)$. Oppgaven så også ut til å være den som skapte flest meningsutvekslinger. Der det var behov for støtte på symboliseringsnivået er det min oppfatning at denne støtten hadde overføringsverdi til neste oppgave, også til oppgave C som er den eneste ikke-lineære. Det ble ikke tatt lydopptak av de to delene i pilotprosjektet, så uttalelsene her bygger kun på elevenes og mine notater, og mitt generelle inntrykk av timene. Disse to skoletimene blir heller ikke benyttet som grunnlag i analysekapitlet.

3.4 Datamaterialet

Gjennomføringen av undersøkelsen var preget av entusiastiske elever som ikke viste tegn overfor meg på at de angret på sin deltakelse. Etter undersøkelsen i klassen hadde jeg elleve lydopptak hver på 30-45 minutter. Datamaterialet består av lydopptak fra gruppearbeid, elevenes notater og mine egne feltnotater. Opptaket ble gjort mens de arbeidet med oppgavene 1 til 3 nevnt ovenfor. I alt elleve ulike elever deltok på åtte ulike smågrupper. Etter valget av fokus på oppgave 1 og 2 ble det igjen seks ulike grupper og åtte opptak. Fire opptak fra hver oppgave danner grunnlaget for analysen. Valget av Oppgave 1 og 2 forklares i avsnitt 3.6. En fordel med lydopptakeren er at den tar lite plass, og min erfaring er at den også tilsynelatende blir glemt av deltakerne. Jeg er mer usikker på hvordan et kamera virker inn på elever i på dette trinnet. Man kan ikke utelukke at enkelte vil vie noe av sin oppmerksomhet mot hvordan man blir oppfattet visuelt. Et kamera kan vise hva elevene mener med enkelte begrep dersom de peker. Dette må man notere under lydopptak og eventuelt be om en utdyping. Med de matematiske meningene som analyseenhet konkluderte jeg med at lydopptak og notater var et tilstrekkelig grunnlag for å arbeide med problemstillingen. Elevnotatene ble merket med de enkeltes navn for å kunne spore opphavet til figurer, tabeller og annen mellomregning som kunne bli nyttig.

3.5 Casestudie og kvalitativ metode

Problemstillingen er hva som kjennetegner utfordringene elevene møter i generaliseringsaktiviteter. Jeg vil søke svar på dette gjennom en kvalitativ metode, å analysere samtaler grupper. Hver gruppe er et case som er instrumentelt med tanke på hva som kan oppstå i et møte med algebra. Et kjennetegn med casestudie er muligheten til å studere enkeltindivider eller grupper og komme til en forståelse av den enkeltes oppfatning av hendelsene (Cohen et al., 2007). Mine case er de seks gruppene som arbeidet med Oppgave 1 og 2. Med vekt på at læringen skjer i det sosiale velger jeg ikke enkeltelever som case. Dette studiet kan gi nye data til eksisterende teori eller innsikt i teori på feltet, og for min del omkring generalisering. Behandlingen av datamaterialet gjennomgikk flere faser. I første omgang ble alle båndene gjennomgått to ganger med fokus på å få et overblikk over hvor det var sekvenser med matematisk innhold og interessante meningsutvekslinger. Problemstillingen var først å skulle beskrive endringer i forståelsen av algebra hos elevene, hvilket skulle vise seg å trenge en avgrensning. Ny problemstilling ble prioritert i tråd med tidligere funn på forskningsfeltet, og valget falt på utfordringer i generaliseringsaktiviteter.

Først etter transkribering av disse sekvensene så jeg nytten av å strukturere stoffet i forhold til oppfatnings- verbaliserings- og symboliseringsnivået i henhold til Lee (1996).

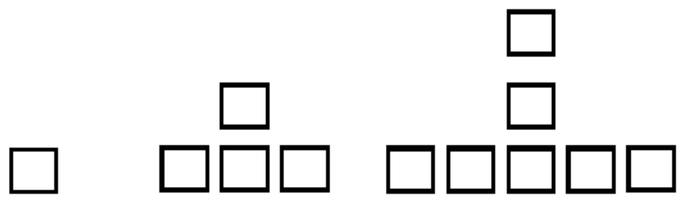
Mens vi var samlet i samme rom under pilotprosjektet ble smågruppene i arbeidet med Oppgave 1-3 plassert på eget grupperom sammen meg. I første rekke var det av hensyn til kvaliteten på lydopptakene. Å sitte på grupperom var ikke fremmed for elevene, heller ikke de andre deltakerne på gruppene. Med en annen gruppeinndeling hadde situasjonen blitt mer ulik den de opplever daglig på skolen. Det som da skilte denne situasjonen mest fra en den vante skolesituasjonen var nærværet av meg som en ekstern person og bruk av lydopptaker. Elevene var klar over at de var med på et stykke forskning og hensikten med den. For meg så det ut til at lydopptakeren nærmest ble glemt når oppmerksomheten ble styrt mot oppgavene. Jeg ser ingen grunn til at denne metoden og tilhørende oppgaver ikke kan brukes på andre grupper elever med noenlunde samme alder og faglige bakgrunn.

Gruppene skal ikke sammenliknes med grupper fra andre skoler, men bare med de andre gruppene i klassen som arbeidet med de samme oppgavene. Jeg har ikke til hensikt å endre noen praksis omkring denne klassen eller andre, og i den forstand er det ikke snakk om aksjonsforskning. Det er heller ikke her et perspektiv på for eksempel kjønn, kultur eller bakgrunn.

3.6 Valg av oppgaver

På linje med en avgrensning av problemstillingen kom også et behov for en avgrensning i antall oppgaver. Jeg valgte til slutt å benytte Oppgave 1 og 2 (se oppgavene nedenfor). Oppgave 3 gikk ut på å finne og generalisere sammenhengen mellom n og antall kvadrater i et n x n- kvadrat. Den ble valgt bort fordi elevene brukte mye tid på å finne og sammenligne telleprosedyrer og svar, langt mer enn i Oppgave 1 og 2. Den ga også lite materiale på symboliseringsnivået. Oppgave 3 ga mange interessante syn på hvordan man kunne telle de dekomponerte delene bestående av 1x1, 2x2 – kvadrater og så videre. På grunn av telleprosedyrene er Oppgave 2 og 3 nært beslektet, og løsningene kan uttrykkes henholdsvis som tallrekkene $1+2+...+(n-1)$ og $1^2+2^2+...+n^2$. Men et hovedproblem i generaliseringen og en årsak til mer tidsbruk var at kvadrattallene ikke kom i ordnet rekkefølge. En utfordring var det også å finne at leddene var kvadrattall. I likhet med Oppgave 2 kan Oppgave 3 karakteriseres som numerativ. Dersom hensikten er å arbeide på symboliseringsnivået ser det derfor ut for meg som om Oppgave 2 bør komme før Oppgave 3. Jeg sitter da igjen med en figurativ oppgave og den minst krevende av de to numerative oppgavene. Bare Oppgave 1 har lineær vekst.

I Oppgave 1 skulle elevene generalisere på grunnlag av tre figurer. Oppgaven er et eksempel Mason (1996) gir, men der står kvadratene helt inntil hverandre. Figurene og formuleringen av spørsmålene var slik:



Figur nr. 1 nr. 2 nr. 3

a) Hvordan fortsetter denne serien? Tegn figur nummer fire, fem og seks

b) Hvor mange kvadrater blir det i figur nummer 100?

c) Argumenter for at du har funnet alle

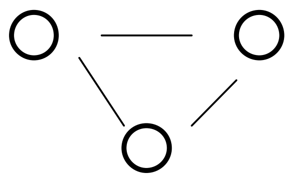
d) Hvor mange kvadrater blir det i figur nummer *n*?

Oppgave 1

Ordet ”serie” vil jeg i ettertid bytte ut med ”følge”. Med bakgrunn i erfaringene fra pilotprosjektet forventet jeg at enkelte ville se at figurene øker med 3 kvadrater når n øker med 1, og gjennom dette slutte at det har noe med $3n$ eller ”tregangen” å gjøre. Jeg antok at det ville komme utsagn som ”tregangen, minus to” eller lignende. Oppgaven kan karakteriseres som figurativ i den forstand at det er en regelmessighet i hvordan en figur vokser. Selv om den øker med tre for hvert ledd er det mulig å generalisere og tegne figurene videre uten oppmerksomhet mot tallet tre, for eksempel ved å se at hver ”arm” øker med en. Fra spørsmål b og når n øker derimot kommer behovet for å benytte økningen på tre. En figurativ oppgave blir da numerativ i den forstand at man kan bygge videre og generalisere på grunnlag av tallverdiene. Neste oppgave vil jeg karakterisere som numerativ fordi generaliseringen bygger på summen av de naturlige tallene. Det er ikke gitt en følge av figurer i oppgaven.

Oppgave 2, håndtrykkproblemet, kan nok kalles en klassiker. Jeg har støtt på den i mange sammenhenger, og det virker som om den er en gjenganger og benyttes på mange trinn. Oppgaven kan egne seg godt til gruppearbeid og meningsutvekslinger. Min erfaring er at elevene gjerne hilser på hverandre når de begynner sine undersøkelser, og det er rom for mange hypoteser. Elevene fikk denne formuleringen:

I et selskap med tre personer blir det utvekslet tre håndtrykk dersom alle skal hilse på alle.



a) Hvor mange håndtrykk blir utvekslet med fire personer tilstede?
   Prøv dere fram, og tegn gjerne hjelpefigurer!

b) Hvor mange håndtrykk blir utvekslet med fem personer tilstede?

c) Fyll ut tabellen, gjerne opp til 10 personer:

Ant. personer	1	2	3	4	5	6	7	…
Ant. håndtrykk	0	1	3	..	..	..	..	

GENERALISERING:

Hvordan er sammenhengen mellom antall personer og antall håndtrykk?

Hvor mange håndtrykk blir utvekslet i et selskap med 100 personer?

Hvor mange håndtrykk blir utvekslet i et selskap med *n* personer?

Oppgave 2

Figuren jeg ga i denne oppgaven der personene er representert ved små sirkler kan diskuteres. Likeså oppmuntringen om å lage hjelpefigurer fordi begge deler kan lede elevene bort fra mer effektive løsningsstrategier. Min intensjon med figuren var todelt: Å gi en illustrasjon på situasjonen med tre personer og gi et lite hint om hvordan eventuelle hjelpefigurer kunne utformes. Jeg forventet på forhånd at elevene ville plassere personene på en sirkelperiferi og at hvert enkelt håndtrykk ville bli markert med en linje mellom hver person. Ved å telle linjene fra hvert punkt antok jeg at tallrekken $(n\text{-}1)+(n\text{-}2)+ \ldots + 1$ etter en stund ville bli synlig siden ingen håndtrykk skal telles to ganger. En løsning på dette trinnet forventet jeg ville ha et rekursivt uttrykk og ikke det eksplisitte: Antall håndtrykk = $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ der n er antall personer.

3.7 Kritikk av metoden

I Oppgave 2 rakk ikke gruppe B å komme til symboliseringsnivået i løpet av en skoletime. De arbeidet mer langsomt enn de andre gruppene, men sikkert. Uten å tegne figurer fant de riktige verdier for n opp til og med 10 og det ble uttalt en struktur. De måtte ha støtte for n=100. Det hadde vært interessant å høre hvordan denne gruppen hadde møtt utfordringene på symboliseringsnivået, også fordi de kom med interessante ytringer i Oppgave 1. De burde derfor fått anledning til å fullføre oppgaven en annen dag snarest mulig. I forbindelse med tid er det også et spørsmål om hvor lenge en gruppe skal få "sitte fast" på spørsmålet om n=100 eller være på nivået naiv empirisme. Jeg ser ikke bort i fra at det i Oppgave 2 kunne vært en egen time med arbeid opp til n=100 og en annen til symboliseringen. Mer tid kunne nok også blitt nødvendig for gruppe A og C i Oppgave 1 dersom jeg hadde rettet oppmerksomheten mot strukturen i figurene og ikke tregangen.

Jeg mener dette er gode oppgaver det er verdt å bruke mye tid på. Grundig arbeid med færre gode oppgaver er bedre enn å arbeide med mange "dårlige", det vil i denne sammenhengen si oppgaver som ikke fremmer generalisering eller meningsutvekslinger. Gjennom et grundig arbeid med disse oppgavene kan det bli enklere å ta de opp senere for eventuelt å knytte en sammenheng til andre lignende oppgaver. Oppgavene kan godt bli av de mest sentrale oppgavene i et "repertoar" eller "example space" (Mason & Drury, 2007). Også av hensyn til dette kunne mer tid vært avsatt.

Valget av oppgaver endte på Oppgave 1 og 2. Det ville vært relevant å bare studere en av disse. At to så tilsynelatende forskjellige oppgaver har så mange fellestrekk med hensyn til utfordringer er interessant. Vanskeligere er det å vite om det kan ha gått på bekostning av oversikt over emnet. Det samme kan man si om antall grupper som studeres. Her ser jeg at det kunne vært mulig å gå i dybden på bare en gruppe gjennom begge oppgavene.

4. ANALYSE

I analysen vil jeg se på Oppgave 1 og 2 hver for seg. Siden jeg bruker inndelingen i oppfatnings- verbaliserings- og symboliseringsnivå fra Lee får jeg seks hovedområder. Hvert område blir gjenstand for analyse, og jeg ser på hele Oppgave 1 før Oppgave 2. Etter dette vil jeg se på to former for uriktige generaliseringer. Til slutt kommer et avsnitt om elevenes oppfatning av variabelen *n*.

4.1 Indikasjoner på oppmerksomhet mot en generell struktur

Jeg vil her se på eksempler fra det som tidligere er definert som oppfatningsnivået. Dette nivået kan ses på som det første steget i en oppgave eller problemløsing, og kan godt benevnes som persepsjonsnivået. Det kan være en glidende overgang fra persepsjonsnivået til verbaliseringsnivået der mønsteret eller tallfølgen blir beskrevet tydeligere verbalt. På persepsjonsnivået er det de første ytringene om hva elevene ser jeg vil analysere. Hva elevene skriver eller tegner i denne fasen kan også bidra til å si noe om forståelsen av oppgaven. Først på verbaliseringsnivået vil jeg se på meninger som kan være mer eller mindre matematisk nyttige i arbeidet med å ta steget til det tredje og siste nivået, symboliseringsnivået. Jeg vil se på hva som kjennetegner eventuelle hindringer i det å gå fra et nivå til et annet.

Elevene brukte minst tid på Oppgave 1 gjennomsnittlig, og det var fire grupper som arbeidet med denne. Denne første fasen opp til elevenes sjette figur (n=6) var preget av få ytringer og mye telling, og det var ikke behov for involvering fra min side. Her er to korte utdrag fra elevsamtalene rett etter at gruppene har fått oppgavearket:

Gruppe C (Trond, Line, Markus):

1.	Markus	Den vokser på hver sin side

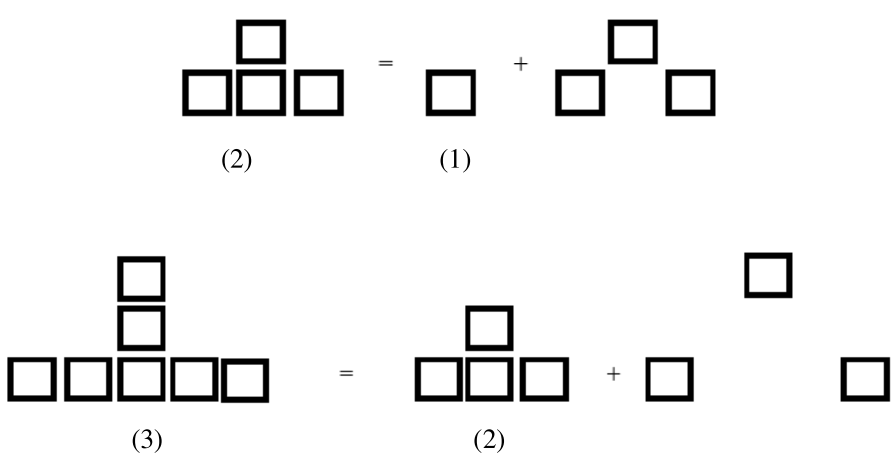
Gruppe A (Roar, Marthe, Ingrid):

1.	Marthe	Den øker med tre
2.	Ingrid	Ja, den gjør jo det

Meningene som fremkommer i gruppe A og C på dette nivået begrenser seg til beskrivelser av noe som øker med tre for hver gang. At ”den øker med tre” bygger på relasjonen mellom to størrelser og kommer dermed innenfor definisjonen av en matematisk mening. Det kan man ikke si om ”den vokser på hver sin side”. Utsagnet kan bygge på relasjonen mellom to størrelser, men sier ikke noe spesifikt om veksten. At ”den øker med tre” var det ingen som på dette nivået benyttet til noe annet enn å tegne figurene videre. Slik sett fulgte alle rekkefølgen i oppgaven slik den var gitt. Ingen grupper ga benevnelse på hva som øker, om det er ”armer”, ”ben” eller ”søyler”. Marthe og Markus omtaler figuren som ”den”, og ser at dette objektet øker. Slik elevene tegnet figurene for n>3 var det ikke spor av noen andre tolkninger om hvordan denne følgen av figurtall skulle fortsette. I forhold til gruppenes første beskrivelser av mønsteret er det to sekvenser som skiller seg ut.

1. Anne	Nei, det kan være sånn at... her er det en, så legger de på tre der, så tar de den figuren og legger på tre til

Anne i gruppe B gir allerede helt i begynnelsen en beskrivelse av sammenhengen mellom to figurer. ”Her er det en, så legger de på tre der” betyr nok at hun mener at figur nummer en pluss tre kvadrater blir figur nummer to. Hvorvidt hun ser en rekursiv sammenheng avhenger av meningen med ordet ”så”. I betydningen ”deretter” er det et uttrykk for rekursivitet, og i betydningen ”altså”, ”eller ”med andre ord” blir det en gjentakelse eller bekreftelse av første del av setningen. Om hun også skulle sett rekursiviteten $a_n = a_{n-1} + 3$ for det generelle leddet er det høyst usikkert hvor nyttig dette er på symboliseringsnivået. Becker og Rivera (2006) fant ingen elever som klarte å formulere en direkte formel ut fra å betrakte en figur på en slik rekursiv måte som i dette tilfellet kunne blitt $1+3(n-1)$. Anne så ikke n-1 ”treere” senere heller, men fant løsningen via en annen figurativ generalisering. En tolkning av Annes aller først ytring kan illustreres slik:

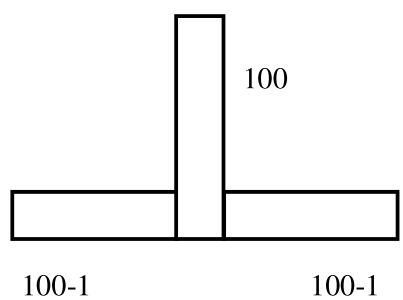


Figur 3

Det er ikke figurer eller tegn i seg selv som er viktige for utviklingen av høyere mentale funksjoner, men meningen som elevene legger i dem (Daniels, 2005). Her gir Anne kanskje uttrykk for en dypere mening av veksten enn at ”den øker med tre” som alle oppfattet rent visuelt i første omgang. Figur 3 viser en dekomponering som ikke nødvendigvis er den enkleste å symbolisere. Det interessante her er hvorvidt elevene klarer å bruke meningen de legger i figurene til å finne er matematisk nyttig mønster til hjelp på verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået. Denne første ytringen kan være en indikasjon på at Anne har en intensjon om å generalisere figurativt. Den andre sekvensen som skiller seg ut er med Pia, Kristian og Paul på gruppe D:

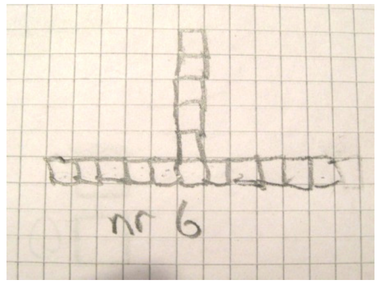
1. Kristian	På figur nummer 5 er det 5, og på figur nummer 6 er det 6 nedover
2. Pia	Ja
3. Kristian	Det har noe med nedover å gjøre

At det har noe med ”nedover” å gjøre kan tyde på at Kristian ser at høyden i den vertikale søylen er lik plassnummeret. Dette kan være en av flere matematisk nyttige dekomponeringer av figuren, og den er ulik Annes. Dersom han ser at dette gjelder uansett plassnummer kan veien være kort til å finne et uttrykk for de andre delene. Kristian sier ikke mer før vi etter mine avgrensninger er på verbaliseringsnivået, men på grunnlag av hans ytringer 22, 24, og 27 (s. 31/32) tolker jeg hans dekomponering slik:



Figur 4

I forhold til figur 3 kan det være at denne gir et enklere grunnlag til å finne en multiplikativ sammenheng og en formel. Ulikheten her kan ligge i om man ser en enhet legges til på tre armer når *n* øker med en eller om det alltid eksisterer tre armer, en med *n* kvadrater og to med *n*-1 kvadrater. Kristian holder fast ved noe som står nærmest det siste synet, og Anne kommer inn på det samme etter en stund. Gjennom figurene elevene tegnet ser det ut til at veksten i figurene oppfattes korrekt. Alle hadde denne formen, men med ulike størrelser:



Figur 5. Anne

En utfordring for elevene på dette nivået er å gi en entydig verbal beskrivelse av hvordan figurtallene vokser. Slik elevene beskriver veksten er man avhengig av å se figurene for å forstå hva som øker og hvordan. Også med hverdagsspråk og begreper som ”oppover”, ”bortover” og ”side” som elevene benytter her, er det mulig å gi en mer entydig beskrivelse av veksten. Jeg er ikke kjent med hvorvidt elevene har erfaring med for eksempel begrepene rad, kolonne, søyle, vertikal, horisontal, som også kunne bidratt til tydeligere beskrivelser. ”Høyre” og ”venstre” ble heller ikke brukt. Det ser ikke ut til at bruk av hverdagsspråk er noen direkte hindring i å ta steget til verbaliseringsnivået, og man kan fastslå at vitenskapelige begreper var helt fraværende på oppfatningsnivået. Vi skal se hvordan det er gunstig på neste nivå å ha sett og uttalt en struktur om veksten slik som Anne og Kristian gjorde her. Det blir også tydeligere at det er vanskelig å si noe om oppfatningsnivået uten å se på verbaliseringsnivået.

4.2 Betydningen av å se en struktur

Når vi nå går over til verbaliseringsnivået i Oppgave 1 er det tydelig at elevene har en mening om aritmetikken i figurene, at antall kvadrater øker med tre hele tiden. Uten at det er tydelig uttalt har de generalisert figurativt og tegnet figur nummer fire, fem og seks. Men dette er ikke nødvendigvis en matematisk nyttig generalisering fordi det bare viser at de kan tegne flere figurer ut fra et ytre mønster. Fra oppfatningsnivået har vi at Anne og kanskje Kristian så hver sin dekomponering av figurene og en struktur i veksten, mens de andre to gruppene konstaterte at ”den øker med tre”. Anne og Ingeborg kan ha benyttet sin dekomponering i løsningen vi nå skal se. Det er en måte å se figuren på som har fokus mot sentrumskvadratet. Ytring 14 som er en gjenganger hos Mason (1996) og Mason & Drury (2007) er den første fra min side i hele oppgaven. Spørsmålet ”Fortell meg hva du ser?” eller ”Hva ser du?” mener

Mason er et av flere spørsmål som kan bidra til å få tilgang til hverandres meninger og oppmerksomhet mot ulike tolkninger (Mason & Drury).

14. Øyvind	Hva ser du?
15. Anne	At den øker med 3 for hver figur... på en så er det 1. På to så er det 2 der, 2 der og 2 der, og på tre så er det 3 der, 3 der og 3 der. På fire så er det 4 der, 4 der og 4 der. På fem så er det 5 der, 5 der og 5 der
16. Ingeborg	Ok (Begge tegner videre en stund)
17. Anne	Hvor mange kvadrater blir det på figur nummer 100?
18. Ingeborg	Det blir jo 100+99+99 som er 298

Ingeborg gjør etterpå tydelig rede for at det må være 2x99 slik at kvadratet i sentrum ikke blir telt to ganger. Den skal være med en gang, og hun velger da denne fra den vertikale søylen. Dette skal vise seg å være et godt utgangspunkt på symboliseringsnivået. Dermed har hun tatt steget fra naiv empirisme til et avgjørende eksperiment med n=100. Det mangler et utsagn om at det gjelder for et generelt tall før det er et generisk eksempel som er det tredje nivået hos Balacheff (1988). Selv om oppgaven her ikke er å bevise en hypotese, så er Anne og Ingeborgs samlede begrunnelse et steg i denne retningen. Ved å bruke n=100 kan man kalle det et avgjørende eksperiment akkurat her, men vi skal se at begge klarer å fastholde på det generiske i steget over til symboliseringsnivået. Fra oppfatningsnivået så vi at Anne dekomponerte leddene slik at en figur ble satt sammen av foregående figur og en konstant bestående av tre kvadrater. Nå uttrykker hun at hver figur består av tre like deler, og sier seg senere enig med Ingeborg i at disse tre delene blir to kvadrater for mye. Gruppen ga i alt to ulike beskrivelser av en struktur i klassen av figurer som begge kan være nyttige på symboliseringsnivået.

I gruppe D er det mulig at Kristian så en struktur på oppfatningsnivået. Det går etter dette en del tid før han gjør et gjennombrudd. Etter en sekvens med gjetninger rundt n=100 kommer en begrunnelse som ligner mye på Anne og Ingeborgs i forrige eksempel:

22. Kristian	298!
23. Pia	Hæ?
24. Kristian	Fordi det... at liksom det tallet som står liksom der, det er 3, 3 nedover og 3 bortover med den i midten. Så på 100 blir det også 3 nedover, og så tenkte jeg 100 bortover, men så den i midten tar jeg bort. Da må jeg også ta bort 2 på

	sidene, og da blir det 298
25. Pia	Ja, det blir det!
26. Paul	Det må du si en gang til
27. Kristian	Ja, hvis vi tar 100 nedover her nå, og så blir det 100 bortover med den i midten... og til sammen det på alle da, så liksom... tar jeg bort de to siden de er der hele tiden

I ytring 24 snakket Kristian svært hurtig, men da han prøver å reformulere seg etter oppfordring fra Paul går det mye saktere. De ”to sidene” henspeiler nok på sentrumskvadratet som ikke må telles to ganger for mye. Både Pia og Paul anerkjenner denne løsningen og kontrollerer prosedyren mot verdier i tabellen. Selv om det ble uttrykt annerledes her enn av Anne og Ingeborg er det sannsynlig at den samme argumentasjonen gjelder. Ingeborgs sum 100+99+99 kan ikke dannes på mange måter fra figuren, to kvadrater må tas bort fra tre like lange armer. Også denne gangen skal vi se at det å se en struktur kommer til nytte på neste nivå. Disse to gruppene måtte ikke ha støtte for å finne verdien for *n*=100. De to andre gruppene skal vi se gjorde generaliseringer på ufullstendig grunnlag og fant ikke verdien 298 for *n*=100 uten støtte.

Også på verbaliseringsnivået ser det ut til å være en utfordring å gi entydige beskrivelser og forklaringer av det matematiske innholdet. Det kan sikkert oppstå misforståelser når begrepet ”bortover” anvendes i meningen ”en av de to horisontale søylene” og ”midten” skal være det samme som ”sentrum”, men her tror jeg misforståelser i stor grad uteble fordi begrepene ble tydeliggjort ved å peke på objektene. Likevel merker jeg meg flere anledninger der elever ber om å få ting forklart en gang til, slik som Paul i ytring 26. Slike oppfordringer førte ikke til bruk av andre begreper, men oftest en saktere gjentakelse av samme formulering og enda tydeligere peking på figurene.

Gruppe A og C fikk problemer da de skulle finne verdien for *n*=100. De så alle en økning på tre mellom hver figur, men initialbetingelsen med ett kvadrat for *n*=1 ble vanskelig å håndtere. Min tanke var da å finne støtte i erfaringene fra pilotprosjektet hvor lineær økning sto sentralt, og blant annet tregangen. Her fra gruppe C:

53. Øyvind	Hva om figuren hadde begynt med 3 kvadrater?
54. Trond	Nå skjønner jeg det! Du skal starte med 3, men du starter med 1, så det blir…

Minus 2!
55. Øyvind Figur nummer tusen da?
56. Markus 998
57. Trond Nei, 2998
58. Markus Ja!

Her virker det som det hadde en hensikt å bringe på banen den ”tradisjonelle” tregangen som begynner på tre. Det samme kan sies om utviklingen i gruppe A. Selve begrepet ”tregangen” ble ikke benyttet før etter denne sekvensen.

Med støtte fant gruppe A og C løsninger for n=100 og n=1000 på verbaliseringsnivået. Det ser også ut til at både Markus og Trond ble overbevist om at løsningen er riktig. De var på en måte nær en løsning da det bare var ideen om tregangen og et lite hint om denne som skulle til, men på den andre siden stoppet det opp uten. Avstanden mellom det de klarte på egen hånd og med støtte er derfor vanskelig å definere. Hadde de funnet løsningen med mer tid til rådighet? På verbaliseringsnivået her vil jeg mene at det ble en situasjon med matematisk meningsutveksling de lærte noe i. Begrepet ”tregangen” kom til anvendelse på en tilsynelatende ny måte for elevene. Den hverdagslige bruken og tolkningen av begrepet ”tregangen” er nok for elevene tallfølgen 3, 6, 9 og så videre. I denne sammenhengen kan begrepet for elevene ha tatt et viktig steg mot å bli et vitenskapelig begrep med bredere innhold da det knyttes til vekst der det første leddet er noe annet enn 3. Det kan være et viktig bidrag i forståelsen av tallet 1 sin rolle som parameter i det n'te leddet $a_n = 1 + 3n$. I en figurtallsfølge med lineær vekst og en konstant kan denne alltid vises ved å ordne elementene i figuren. For eksempel er det i oppgave B i pilotprosjektet skilt ut en sirkel i alle leddene. Kvadratene i Oppgave 1 kunne også vært arrangert slik at et kvadrat ble isolert og de øvrige ordnet i grupper på treere. Utformingen av Oppgave 1 med tre armer er ulik oppgavene i pilotprosjektet. Det kan være en av grunnene til at ingen benyttet samme løsningsstrategi som der. Å finne ledd nummer 100 i tallfølgen 1, 4, 7, 10… blir vanskelig uten å telle dersom ikke annen mening enn at det ”øker med 3 hver gang” kommer fram. Gruppene har nok benyttet kjennskapen til at ledd nummer 100 i tregangen er 3x100=300, og nå i en ny kontekst. Et matematisk innhold i begrepene ”vekst” og ”øker med tre” kan se ut til å bli mediert gjennom begrepet ”tregangen” sammen med en forståelse av hva det innebærer å ”begynne med 1”. Det matematiske innholdet er lineær vekst der ledd nummer n er 1+3n.

Gruppe B og D brukte hverdagsbegreper på mer kompliserte vitenskapelige begreper. For eksempel blir begrepet ”midten” fra gruppe D benevnelsen på et skjæringspunkt eller et kvadrat som tre søyler bestående av kvadrater har felles. Fokus blir ikke like sterkt på tregangen som tallfølge, men summen av tre like tall hvorav to må bort på grunn av skjæringspunktet for ikke å bli telt for mange ganger. Det vil jeg påstå er så mye matematisk innhold i et hverdagsbegrep at man må vurdere å bli enige om et vitenskapelig begrep. Dette for å frigjøre ”midten” som hverdagsbegrep igjen og for at gruppen virker moden nok til å operere med ”skjæringspunkt” eller ”fellespunkt”. På verbaliseringsnivået i denne gruppen foregikk meningsutvekslingene bare blant elevene og uten støtte fra meg. Kristian står fram som en som gir støtte og forklarer sin hypotese. Denne er matematisk nyttig, men Paul utrykker ikke at han har forstått den. Her ser det ut til at Pia lærer noe på bakgrunn av Kristians utsagn slik at det ble en meningsutveksling som inneholdt kunnskap hun kunne internalisere.

4.3 Ulike behov for støtte

Jeg er nå kommet til tredje og siste nivå, symboliseringsnivået i Oppgave 1. Her skal løsningene uttrykkes ved hjelp av n enten rekursivt eller eksplisitt avhengig av oppgave. Gruppe B og D som allerede på oppfatningsnivået uttalte noe som kunne tolkes som en struktur, fant også løsningen 298 for n=100. Det var med liten grad av støtte på gruppe B og ingen støtte på gruppe D. Gruppe A og C måtte ha støtte til dette. Først vil jeg se på hva som kjennetegner utfordringene som oppsto på gruppe A og C. På gruppe A hadde Marthe og Ingrid gjettet en del, og Marthe hadde et forslag til en eksplisitt løsning. På denne gruppen kom symboliseringen inn før de fant svaret på n=100. Etter en periode uten ytringer følger en periode med gjetninger. Da finner jeg det riktig å gripe inn for første gang:

29. Øyvind	Jeg hører dere gjetter
30. Marthe	Den øker med tre hver gang
31. Øyvind	Det øker med tre hver gang. Kan dette brukes til å finne antall kvadrater i figur nummer 100?
32. Ingrid	Ja, det blir 300!
33. Øyvind	Hva øker med tre hver gang?
34. Marthe	Jo, det er…det tallet… firkantene som øker. Tregangen!
35. Øyvind	Hvordan er den rekken i forhold til tregangen?
36 Marthe	Jeg vet ikke

37. Ingrid	Øøø… Tregangen, *n*+1!
38. Øyvind	Stemmer det med de første tallene du har?
39. Ingrid	Ja, hvis du tar 3x3 så blir det 9, ikke sant?
40. Marthe	Starter med 1 så kommer det til 3… det er alltid 1 mer enn tregangen
41. Ingrid	Ja, det blir alltid 3x*n* pluss…minus 2
42. Marthe	3x*n* minus 1 eller 2
43. Øyvind	Kontroller med de første tallene

Etter dette ble de hurtig enige om at 3*n*-2 var korrekt og fant 298 for *n*=100. Etter et hint i ytring 33 kommer Marthe på tregangen, hvorpå de sammen nærmer seg en løsning i ytring 39-42. Dette hintet er etter min definisjon mer enn en liten grad av støtte fordi det kan sidestilles med et hint eller indirekte råd om å se nærmere på tregangen. For at Marthe og Ingrid skal finne ut om det er 3*n*-1 eller 3*n*-2 ber jeg de kontrollere dette mot de laveste verdiene. Dette er en aktivitet på Balacheffs laveste nivå, naiv empirisme. For Ingrid og Marthe er det ikke åpenbart om det er 3*n*-1 eller 3*n*-2 som er riktig, så det å kontrollere hadde to hensikter: For det første er det å sette inn verdier for *n* viktig for å gi *n* mening, men også det å oppleve at tregangen kan "flyttes opp og ned". For det andre er det å teste ut verdier et nivå hos Balacheff jeg vanskelig kan se at man kan hoppe over. Å være i stand til å sette inn verdier for å overbevise seg selv og andre er en grunnleggende ferdighet Ingrid og Marthe så ut til å ha begrenset erfaring med. Etter at de fant 298 for *n*=100 hadde de ingen problemer med å finne 2998 for *n*=1000. Gruppe C hadde de samme problemene på verbaliseringsnivået som gruppe A. Forløpet videre for denne gruppen ble også påfallende likt gruppe A. At en jevn økning på tre er beslektet med tregangen var det som fikk det til å løsne. Å symbolisere ble uproblematisk etter å ha beregnet verdiene for *n*=100, 1000 og 10000. De to siste verdiene var en innskytelse fra min side, og de ble hurtig beregnet.

For gruppe C så det ut til å være til hjelp å benytte flere store verdier før de innså at det var mulig å benytte et generelt tall *n*. Tilsvarende for gruppe A ble det gjentatt hva som "skjer med 100" og "gjøres med 100" før *n* kom inn i bildet. At disse verdiene etter noen gjentakelser erstattes av *n* sier likevel ikke mye om hvorvidt de har forstått hvorfor dette er hensiktsmessig. Samtalene disse gruppene viser at de er i ferd med å kunne se hva som er en konstant i uttrykket og hva som er variabelen. Overflategeneraliseringen kan være bygd på en struktur som ser ut slik:

$$3 \cdot 100 - 2$$
$$3 \cdot 1000 - 2$$
$$3 \cdot 10000 - 2$$
....
$$3 \cdot n - 2$$

Figur 6

Her kan det generaliseres uten oppmerksomhet mot hvilken mening de legger i hvert ledd eller hele uttrykket samlet, men en betraktning av hva som endrer seg. Overflategeneralisering bygd på en struktur med flere variabler kan selvsagt være mer krevende enn dette eksemplet. På symboliseringsnivået i håndtrykkproblemet skal jeg komme litt nærmere inn på overflategeneralisering.

Verbaliseringsnivået hadde et annet forløp på gruppe B og D. Anne og senere Ingeborg så en struktur og fant 298 for n=100. Etter at jeg spurte om n=1000 og n=10000 og fått riktig svar, var tiden inne for n hos Anne og Ingeborg:

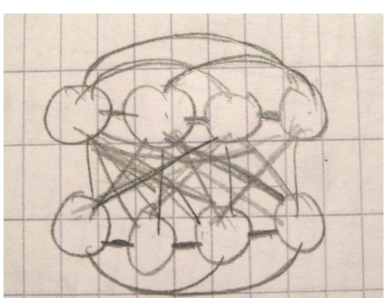
45. Øyvind	Hvis antallet er n?
46. Ingeborg	n+n+n-2
(10 sekunder)	
47. Anne	Eller nx3-2
48. Ingeborg	Ja!
49. Øyvind	Er n+n+n-2 det samme som nx3-2?
50. Ingeborg	Ja
51. Øyvind	Er du sikker på det?
52. Ingeborg/Anne	Ja (Samtidig)

At Anne og Ingeborg mener n+n+n-2 = 3xn-2 behøver ikke stamme fra en dekomponering av figuren. Det kan komme av at de forstår at summen av tre like tall er det samme som tallet multiplisert med tre, og behersker denne symboliseringen. Ytring 47-52 kom hurtig og begge virket meget sikre på sine utsagn. Uten trening i manipulasjon med symboler virker det klart at de tolker n som et tall og at en n i en og samme kontekst ikke innehar flere verdier. Mens de på verbaliseringsnivået så summen 100+99+99 for n=100 sier de ikke n+(n-1)+(n-1) for figur nummer n. Dette kan komme av måten å se figuren på med et sentrumskvadrat som består av tre overlappende kvadrater. I summen 100+99+99 fra tidligere er det kanskje en struktur som i figur 4 (s. 29) Ingeborg ser. Det er ikke godt å si fra hvor de trekker fra to. Denne meningen ble nyttig i avslutningsfasen. Også med Kristian var et spørsmål om *n* nok til at symboliseringen ble utført. Det kan derfor ikke sies at de fikk direkte støtte for å gjennomføre symboliseringen.

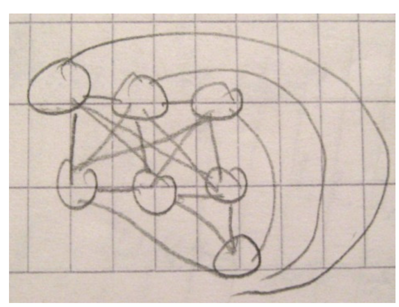
4.4 Matematisk nyttige hjelpefigurer

En ting som skiller Oppgave 2 fra Oppgave 1 på oppfatningsnivået er at det ikke er like klart hvordan følgen øker eller hvordan leddene eventuelt kan representeres ved figurer. Veksten i Oppgave 2 er ikke lineær, og tre av fire grupper benyttet hjelpefigurer for å komme i gang. Elevene laget mange ulike figurer hvor prikker og lignende representerte personer og forbindelseslinjene håndtrykk. Fra fem personer og oppover begynte det tydeligvis å bli komplisert å telle linjer på hjelpefigurene. Ulike varianter av hjelpefigurer ble benyttet, men uansett størrelse på figurene virket det som om antall forbindelseslinjer (håndtrykk) ble vanskelig å telle. Likevel så det ut til at enkelte figurer var enklere å arbeide med. På dette nivået er det ikke helt klart hvilken menig den enkelte legger i en forbindelseslinje, om en linje representerer ett eller to håndtrykk. Her er noen eksempler på fordeler og ulemper ved ulike hjelpefigurer.

Figurene fra gruppe F (Trond, Pia, Bente) illustrerer godt problemene som oppstår når $n>5$. Her har Pia gjort flere forsøk på å lage en hensiktsmessig figur. Etter en del forsøk på å telle finner hun de riktige tallene for $n<9$.

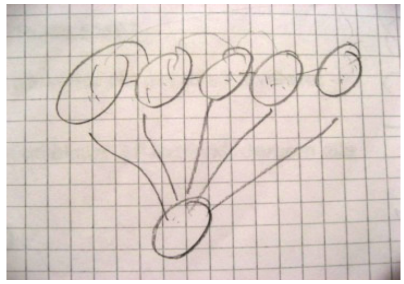


Figur 7. Pia



Figur 8. Pia

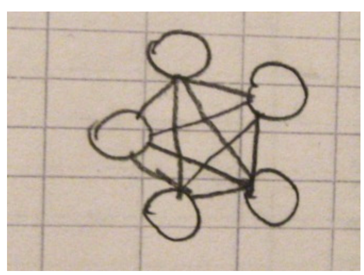
Tor som var på gruppe E med Paul hadde en annen variant av en hjelpefigur. Han viser på en måte hvordan situasjonen er for en enkelt person som står et stykke unna de andre som er plassert på en rekke. Problemer oppsto når Tor skulle tegne inn håndtrykkene for den andre personen, og da forkastet han denne utformingen av hjelpefiguren:



Figur 9. Tor

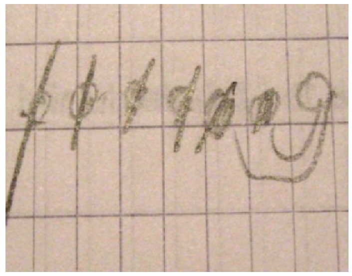
Tors figur er likevel interessant da den kan understøtte en annen argumentasjon. De første fem linjene illustrerer en enkelt persons håndtrykk for n=6. En slik dekomponering til "individnivå" kan vise at situasjonen er lik for alle seks, og at vi da får 6x5 håndtrykk totalt der hvert håndtrykk er telt to ganger. Bare Trond på gruppe F er senere i nærheten av den ideen, men uten å fullføre resonnementet. Summen av de naturlige tallene til og med 5 blir da halvparten av 5·6, $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ og generelt til og med n: $\frac{(n-1) \cdot n}{2}$.

En sirkelform som jeg på forhånd forventet var det bare Bente på gruppe F som benyttet:



Figur 10. Bente

Også for n=6 og n=7 laget Bente en tilsvarende figur og telte riktig antall linjer. Bentes sirkel så ut til å være noe enklere å bruke enn Pias figur i den forstand at linjene var enklere å telle. Tors figur kan betraktes som en delkomponent av Bentes figur. Sammen med en symmetribetraktning eller tanke om at alle personene har like mange håndtrykk, ville Tors figur vært den mest effektive av disse to. Den mest effektive og matematisk nyttige figuren viste seg å være helt annerledes. Den er matematisk nyttig i den forstand at den generelle lovmessigheten kommer tydelig fram og gjør tellingen overflødig relativt hurtig. Både Marthe (gruppe A) og Paul (gruppe E) benyttet en slik figur. Her er Marthes figur:



Figur 11. Marthe

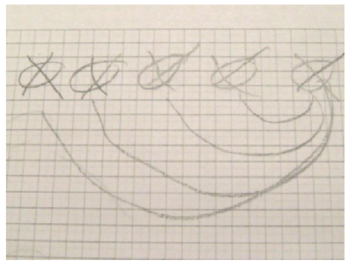
På grunnlag av sekvensen nedenfor og at det ikke ble uttalt noe om n=7 tolker jeg figuren slik: Først har Marthe de seks sorte punktene. Ytterst er person nummer en som skal hilse på fem personer. Når det er utført markeres det med en strek over punktet, en ”utkryssing”. Samme prosedyre gjentas for person nummer to som skal hilse på fire personer til høyre for seg. Punktet ytterst til høyre markerer en syvende person, og de to forbindelseslinjene en markering av at den samme prosedyren gjelder. Marthe uttrykte ønske om å slutte å tegne allerede ved n=5, men fortsatte litt til. På bakgrunn av resultatene fra n=4 og n=5 samt figuren ovenfor forsøker hun å ta et steg videre og generaliserer sammenhengen mellom antall personer og antall håndtrykk. I dialog med Ingrid blir det en løsning:

1. Marthe	Da må vi regne. 4 folk.. og så tar alle med hverandre... det blir 4... 1, 2, 3, 4 og så... må finne en regel da. Den ene hilser med 3, og så den andre hilser med 3
2. Ingrid	Nei, den hilser bare på 2, siden de har hilst
3. Marthe	Ja, den hilser på 2... og så?
4. Ingrid	Og så må de hilse på hverandre
5. Marthe	Da blir det 3+2+1

Tilsvarende resonnerte de seg fram til tallrekkene 4+3+2+1 for n=5 og 5+4+3+2+1 for n=6. Etter å ha tegnet inn den syvende personen laget de ikke flere figurer og tok steget til neste nivå. Allerede i ytring 10 er også Ingrid overbevist om at telling ikke er veien videre:

10. Ingrid	Vi må finne en regel, ellers klarer vi ikke 100 personer

Ytring 1-5 er et eksempel på en meningsutveksling som blir matematisk nyttig uten annen støtte enn fra hverandre, og at det kan skje læring gjennom meningsutveksling i en gruppe. Marthe prøver å systematisere situasjonen for hver enkelt person, mens Ingrid kommer med ideen om at antall håndtrykk minker slik Marthe tenker. Pauls argumentasjon er svært lik Marthe og Ingrids. Han har følgende figur, men uttaler seg om n=10:



Figur 12. Paul

1. Paul	Jeg vet hvordan man gjør det! Hvis det er 10 stykker, så hilser en på alle... da blir det 9, og den som hilser på alle går bort, så tar nummer 9 og hilser på alle... da blir det 8... Og nummer 7... ja, og så videre

Jeg tolker Pauls figur på linje med Marthes, med unntak av at første person som hilser og går står ytterst til høyre. I motsetning til Marthe og Ingrid ser det ut til at Paul kom fram til denne løsningen alene da jeg ikke kan finne ytringer han kan ha ideen fra. Gruppene til Marthe og Paul (A og E) var de eneste som ikke måtte ha støtte for komme videre til neste nivå, verbaliseringsnivået. Allerede i de første ytringene etter noe telling gir de en beskrivelse av en generell struktur av antall håndtrykk når n øker. På den måten kan de første ytringene i gruppe A og E plasseres direkte på verbaliseringsnivået. En oppstilling av personene på en rekke ble en fin illustrasjon på tallrekken 1+2+3+4+5…+(n-1). Person nummer n lengst til høyre skal hilse på n-1 personer, nummer to fra høyre skal hilse på n-2 og så videre. For at det skal bli et generisk eksempel på Balacheffs nivå tre mangler de bare å uttrykke det generelt ved n, eller en annen benevnelse for et vilkårlig heltall større enn 1. Løsningene Marthe/Ingrid og Paul kom med her finner jeg instruktive og elegante. Jeg hadde ikke forutsett disse, og er i så måte en fin utvidelse av mitt tilfang av eksempler eller ”example space” (Mason & Drury, 2007) Ved å se på figurene til Paul og Marthe er det tydelig at de på linje med de aller fleste elevene ikke er påvirket av figuren i oppgaveteksten. Man kan stille spørsmål ved om ikke figuren jeg ga er en hindring i det å finne en effektiv løsning som Marthe/Ingrid og Paul gjorde. Da det bare var Bente som fant nytte i å stille personene på en sirkel er det klart at min intensjon med figuren ikke ble oppfylt. I den grad min figur ble tolket og ilagt mening kan trekanten personene utgjør henspeile på andre former enn en sirkel. Tilsvarende er det nok tvilsomt om det er en sirkel som ville blitt mediert gjennom for eksempel en oppstilling av fire personer i en kvadratform.

Dekomponeringen Paul, Ingrid og Marthe foretok ble presentert for alle gruppene på slutten av arbeidsøktene. Effektiviteten i den tilsynelatende enkle ideen ”En hilser på alle og går ut” ble mottatt med reaksjoner som kan tolkes som ”A-ha”- opplevelser. Denne løsningsstrategien ga åpenbart mening etter at alle hadde arbeidet med oppgaven og gjort seg godt kjent med problemstillingen. For meg ble det også et godt eksempel på hvor nyttig det er å holde hint om generalitet tilbake. Slike innspill kan ta bort øyeblikket da ”alt faller på plass” (Mason & Drury, 2007). På linje med trekanten jeg satte inn i oppgaven kan råd om generalitet hindre elevene i å finne andre løsninger. Håndtrykkproblemet viste seg å gi muligheter for mange løsningsstrategier og dekomponeringer. For meg ser det ut til å være en parallell mellom forsøk på å direkte overføre mening i et begrep fra lærer til elev, og det å gi direkte råd om generalitet. I det første tilfellet lærer de bare ordet, og i det andre bare en sammenheng på et nivå som kanskje ikke gir mening.

4.5 Motstand mot en ubestemt sum

Fra oppfatningsnivået i Oppgave 2 har vi at Marthe og Ingrid så en struktur i veksten som ble uttalt for n=4. Samme argumentasjon brukte Paul for n=10. Marthe og Paul brukte også samme type hjelpefigur med personene stilt opp på en rekke. De to andre gruppene som ikke uttalte en struktur fant likevel korrekte verdier for n opp til og med 10. Det som nå skjer på verbaliseringsnivået er at gruppe B med Anne og Ingeborg kommer fram til samme struktur, mens Marthe klarer å benytte denne for n=100. Paul gjør det samme som Marthe, men godtar ikke en rekursiv løsning i første omgang. Her går vi inn i gruppe A etter en sekvens fra gruppen etter en periode hvor de var ivrige og snakket i munnen på hverandre:

24. Marthe	Jo, se! Her... 3... 4, 5, 6. Det er 3 mellom 6, 7, 8, 9, 10... det er 4 mellom... og så blir det 5 mellom. Det blir 1 mer for hver gang!
25. Roar	Da blir det 101... nei... 201
26. Marthe	Nei, se her... hvis 100, person nummer 100 hilser på 99 folk, 99 folk, nummer person 99, han hilser på 98

27. Roar	Eh... hvis du gidder å høre på helt til null så (Ingrid og Marthe ler)... det var 5 mellom fra 5 til 6... 6 mellom fra...
28. Marthe	Det er bare å plusse på en mer for hver gang
29. Roar	Da blir det 201... nei... vi plusser på 100 og 100, og så 1 mer... da blir det 201
30. Marthe	Eh...
31. Roar	Her er det 4 fra 6 til 10 og 5 fra 10 til 15
32. Marthe	Liksom 1 mer mellom hver liksom. Person nummer 100 hilser på 99 personer, person nummer 99 hilser på 98. 99+98+97+96+95+94+93...
33. Roar	Herregud! Skal du sitte slik til null? Glad vi ikke skriver sånn 101 med bokstaver! ... eller 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 til 100 med bokstaver

Her ser det ut til at Marthe og Roar snakker litt forbi hverandre. Marthe kommer i ytring 32 med en løsning som både Roar og Ingrid ganske snart sier seg enige i. Hun benytter først tabellen for opp til seks personer og ser at differansen mellom n og $n+1$ personer er n. Det er likevel ideen om å begynne med den n'te personen som ser ut til å gi den korrekte "oppskriften" eller prosedyren som er en generell løsning. Roar er opptatt av differansen mellom hvert ledd, mens Marthe i ytring 26 og 32 argumenterer slik Paul gjorde allerede i sin første ytring på oppfatningsnivået. Jeg kommer tilbake til Roars generaliseringsforsøk i neste kapittel. Den siste ytringen tar jeg med fordi jeg hørte lignende utsagn. Det kan være en undring over at en løsning kan være en lang tallrekke og sannsynligvis en helt ny erfaring. Roar setter nok pris på symbolbruk dersom det er tidsbesparende. Hele sekvensen er en god illustrasjon på iveren etter å løse problemene som preget gruppene. Her er utsagn fra ulike steder som kan tolkes som en viss motstand mot en løsning i form av en tallrekke:

Ingrid:	Vi må finne en regel, ellers klarer vi ikke 100 personer
Paul:	Må jo skrive slik dritlenge da!
Paul:	Men det er dårlig å bare sitte sånn lenge!
Ingeborg:	Dette vil jo ta evigheter!
Roar:	Herregud! Skal du sitte slik til null?
Roar:	Eh… hvis du gidder å høre på helt til null så

Som vi så fant Paul på gruppe E en fin løsning for ti personer, men også han blir i tvil når n=100:

8. Paul	Den første hilser på 99 stykker, og da går jo den bort, og da hilser nestemann

	på alle...Da har du 98... og nestemann, da har du 97... og så går det bare videre nedover
9. Øyvind	Hvilke tall skal legges sammen?
10. Paul	Det blir 1, 2, 3, 4, 5 og oppover
11. Øyvind	Til?
12. Paul	Men det er dårlig å bare sitte sånn lenge!
13. Øyvind	Du må ikke tenke på det. Du kan bruke kalkulator til det. Du skal finne en oppskrift
14. Paul	Men det er slik oppskriften er!

Etter dette kontrollerer Paul denne ”oppskriften” med tabellen og ser at det stemmer. Grunnen til at jeg grep inn i denne sekvensen var at Paul og Tor hadde arbeidet lenge med n=100 uten å komme videre. Paul mente nok at det måtte være en enklere løsning enn å beregne summen av en så lang tallrekke. Hele tiden har han en riktig løsningsstrategi, men den syntes han kanskje var for omfattende til å akseptere. Dette kan også være tilfelle med Roar. Marthe og Paul ser kanskje en generell struktur som gjelder uavhengig av n. De ser at det største tallet i løsningen må være n-1 fordi person nummer n ikke skal hilse på seg selv. At denne personen går er til stor hjelp med tanke på at samme prosedyre skal gjentas for de 99 gjenværende personene. Noe senere enn Marthe/Ingrid og Paul finner Anne og Ingeborg i gruppe B en lignende sammenheng. De har først tegnet og telt linjer opp til n=6:

11. Ingeborg	Det blir liksom 5, 4, 3, 2, 1... eller 4, 3, 2, 1. Det blir 15
12. Anne	Neste blir 6+5+4... 21
13. Ingeborg	Aha!
14. Anne	Hva er det?
15. Ingeborg	Her øker det med 1, her øker det med 2, her øker det med 3, her øker det med 4, her øker det med 5, her øker det med 6
16. Anne	Ja!

Etter dette går det fort å fylle ut resten av tabellen. Selv om de ser denne sammenhengen benytter de ikke den automatisk for n=100. Kan hende de også ønsket en enklere prosedyre enn å addere 99 siffer. Ingeborg mente det ville ta evigheter å regne ut 1+2+3+...+99 uten at det dermed er hovedårsaken til at hun ikke benyttet samme strategi som for mindre verdier av n.

I motsetning til Oppgave 1 kom tidsfaktoren til å spille en rolle i arbeidet med håndtrykkproblemet. I første rekke var det gruppe B som uten støtte fant en struktur og en løsningsstrategi da de kom til n=6. De måtte ha en god del støtte for å anvende denne på n=100, og rakk ikke å arbeide på symboliseringsnivået. Paul måtte også ha støtte for n=100, men på et langt tidligere tidspunkt både i forhold til tid og antall ytringer. Anne og Ingeborg var de eneste som ikke laget hjelpefigurer, men benyttet resonnementet i ytring 12 og 15 til å finne verdier for n=6, 7, 8, 9 og 10. Den ulike tidsbruken kan tyde på at strukturer i håndtrykkproblemet ikke er like åpenbare som i Oppgave 1, og at det kanskje er rom for å prøve flere ulike tilnærminger i begynnelsen.

De matematiske meningene på dette nivået ble preget av tallfølger som ”øker” eller går ”nedover/oppover”. Sammen med peking på figurene så det ut til at hverdagsbegrepene ikke sto i veien for de matematiske meningene. Ingeborg og Anne gjorde framgang uten støtte og så ut til å dra nytte av hverandres meninger. For n=100 måtte det støtte til fra min side for at både Anne/Ingeborg, Paul og gruppe F klarte å formulere en løsningsstrategi og en begrunnelse for denne. En hovedutfordring uten støtte ble å ta steget fra n-verdier omkring 10 til n=100. Bare gruppe A og i første rekke Marthe gjorde det alene. Dette kan sammenlignes med å ta steget fra naiv empirisme til et avgjørende eksperiment. Vi skal se at dette steget ikke nødvendigvis er grunnlag nok til å klare symboliseringsnivået uten støtte. Før det vil jeg se litt på uriktige generaliseringer som ble et av kjennetegnene på verbaliseringsnivået.

4.6 100, 1000 og 10000 blir til *n*

På verbaliseringsnivået i Oppgave 2 så det ut til å være en generell skepsis til at løsningen kunne være en tallrekke eller ubestemt sum med n-1 addender. Med ulik grad av støtte er nå gruppene klare over at det totale antall håndtrykk ved 100 personer er tallrekken 1+2+ .. +98+99. Denne utfordringen er av en annen art enn Oppgave 1 og oppgavene i pilotprosjektet. Her er det nødvendig å benytte n-1, n-2 og så videre i uttrykket. På bakgrunn av dette antok jeg at dette ville bli mer utfordrende enn Oppgave 1. Marthe/Ingrid på gruppe A og Paul på gruppe E var de som først uttrykte noe generisk om hvordan denne tallrekken vokser fulgt av Anne og Ingeborg på gruppe B. I Oppgave 1 så det ut til å ha stor betydning på symboliseringsnivået. På gruppe A vet de nå at det blir 999+998+ … +1 håndtrykk for 1000 personer:

1. Øyvind	*n* personer?
2. Paul	Det er *n*-1
3. Øyvind	Er svaret *n*-1?
4. Paul	Ja, jeg tror det
5. Øyvind	Er det alt? Hvis *n*=10 sier du at svaret er 9
6. Paul	Det blir jo det når vi regner ut, det blir tallet og så minus, og så tallet, og så minus 1
7. Øyvind	Ja, hva blir neste tall?
8. Tor	Neste tall?
9. Paul	Ja, da blir det pluss det… pluss det forrige *n* liksom

Paul og Tor er fortrolig med å addere tallrekken fra *n*-1 når *n* er gitt. Problemet i symboliseringen blir her å finne *n*-2 og *n*-3 og så videre. Tidligere ga Paul uttrykk for en viss motstand mot en lang tallrekke, og prøver her med svaret *n*-1. For Paul kan det kan være at *n*-1 blir ”ny *n*” samtidig som *n* blir ”forrige *n*”. Vi går tilbake til *n*=10:

14. Øyvind	9 er *n*-1. Hva er 8 i forhold til *n*?
15. Paul	Det er jo *n*-1 det også
16. Øyvind	Da er du på 9 igjen. Vi skulle ha 8
17. Paul	Ja, men det blir jo det, siden *n* er neste tallet for 9 liksom. Det forrige tallet
18. Øyvind	Ok…du tenker… å ja!... Her er 10… her er 9. Sammenlign da. Nå skal jeg ha 8 her
19. Paul	Minus 2!

Det tok litt tid før jeg oppfattet hvordan Paul tenkte her. For Paul blir nok *n*-1 ny *n* når *n*-1 er lagt til summen, det vil si at *n* synker mot null. Vi måtte holde fast på at *n* er 10 hele tiden, og etter en stund kom de med støtte fram til at summen generelt måtte bli (*n*-1)+(*n*-2)+…+1 for *n* personer. Begge virket i begynnelsen usikre på hva *n* representerte fra *n*-1 og nedover mot 1, og om hvorvidt *n* var ”bevegelig” eller ikke. Da vi tok *n*=1000 syntes begge at dette ble en tungvint skrivemåte. For at svaret skulle være korrekt mente de at alle ledd måtte skrives opp. Den slags ”snarveier” som å skrive ”+…+” var åpenbart helt nytt for begge. Også Roar, Marthe og Ingrid på gruppe A måtte ha hjelp til å komme fram til at det største tallet i summen er *n*-1. At neste ledd er *n*-2 fant de heller ikke uten støtte. Dette var en gruppe der alle var aktive i alle faser, men det er bare Marthe som setter ord på løsningen underveis:

56. Marthe n minus 1, pluss n minus to… og så videre

Av tidshensyn kom ikke gruppe B til symboliseringsnivået. Gruppe F som brukte mest tid på å telle av alle, måtte på linje med gruppe A og E ha mye støtte på symboliseringsnivået. De hadde også problemer med å uttrykke n-1, n-2 og så videre. En eksplisitt løsning på håndtrykkproblemet vil si å finne et uttrykk for summen av de naturlige tallene, og dette er mer krevende enn å finne 3n-2 i Oppgave 1.

Marthe og Paul som gjennom alle nivåene tydeligst uttalte en struktur var også de som måtte ha minst støtte på symboliseringsnivået målt i tid og etter betraktning av innholdet i ytringene. Paul hadde "oppskriften" som han kalte det, men slet litt med betydningen av n og n-1. I gruppe F forsøkte vi å snu på tallrekken og bruke 1+2+…+(n-1) før n ga mening. Det så ut til at den rekken var enklere å håndtere enn (n-1)+(n-2)+…+1. Dersom det ikke på noen nivåer hadde blitt uttalt en struktur eller noe som gjelder hele klassen av figurer er det større grunn til å tro at symboliseringen i håndtrykkproblemet hadde bygget på en overflategeneralisering fra denne strukturen:

Antall personer		Antall håndtrykk
2	→	1
3	→	1+2
4	→	1+2+3
…		
n	→	1+2+3+4+….+(n-1)

Figur 13

Paul ser ut til å ha gått "på tvers av årringene" tidlig på verbaliseringsnivået, men på symboliseringsnivået måtte han ha støtte for å uttrykke tallrekken ved hjelp av n.

4.7 En blanding av sum og differanse

Vi har sett noen ytringer som kan tyde på en viss motstand mot en ubestemt sum som løsning i Oppgave 2. De samme elevene som ga uttrykk i den retning forsøkte å finne en formel på et annet grunnlag enn å summere. Først gruppe A der Marthe og Roar tilsynelatende snakker forbi hverandre:

26. Marthe	Nei, se her... hvis 100, person nummer 100 hilser på 99 folk, 99 folk, nummer person 99, han hilser på 98
27. Roar	Eh... hvis du gidder å høre på helt til null så (Ingrid og Marthe ler)... det var 5 mellom fra 5 til 6... 6 mellom fra...
28. Marthe	Det er bare å plusse på en mer for hver gang
29. Roar	Da blir det 201... nei... vi plusser på 100 og 100, og så 1 mer... da blir det 201

Roar generaliserer på grunnlag av økningen på 5 håndtrykk fra fem til seks personer og slutter med dette at det totale antall håndtrykk med 100 personer er 100+100 pluss ”så en mer”. For det første er det oppstått en blanding av antall håndtrykk og antall personer. En økning på 5 håndtrykk fra 5 til 6 personer skulle nok etter Roars argument medføre en økning på 99 håndtrykk for 99 til 100 personer, og ikke 101. Uansett tar ikke hans generalisering med at et bestemt antall håndtrykk opp til og med n-1 personer også skal være med i den totale summen. På den måten kan Roars generalisering komme nærme et forsøk på å generalisere selve økningen i antall håndtrykk når n øker med 1 og ikke det totale antall håndtrykk.

4.8 Feilslutninger omkring proporsjonalitet

Et forsøk på å finne en formel i Oppgave 1 oppsto i gruppe F som brukte mest tid på å telle av alle gruppene. De har nettopp kontrollert tabellen for n<11 og enige om at differansen mellom hvert ledd øker med en. Nå har de kommet til spørsmålet omkring n=100, og Trond ser på differansene:

1. Trond	7 der... 8 der... 900! Jeg tok 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 og 8... og så blir det 9 på 10
2. Pia	Hva?
3. Trond	420! 1, 2, 3, 4... 9 og når jeg øker med 9... og kan på tieren... var det 42... og ganget 10 med 10 for å få 100, så blir det 10x42 som er 420

Det er riktignok 45 og ikke 42 håndtrykk med 10 personer. Trond tenker at det er en proporsjonal sammenheng, 42 for ti personer medfører 420 for 100 personer. Noe tilsvarende på hans første forsøk, at økningen på 9 håndtrykk fra ni til ti personer medfører 9x100=900 for 100 personer. Hans hypotese i ytring 3 blir forkastet etter en kontroll mot en verdi i tabellen.

Akkurat som Trond mener Ingrid at svaret må være 450. Hun tok da 45 håndtrykk for ti personer og multipliserte dette med 10 for å få antall håndtrykk for 100 personer. Akkurat som Roar "fryser" Trond en situasjon med en relasjon mellom to lave verdier. Han har at n=10 og sum=42, og antar at begge verdiene kan multipliseres med 10. Trond tar ikke med noe om differansen, og Roar tar ikke hensyn til noen sum. Ingrid (gruppe A) og Anne/Ingeborg (gruppe B) gjorde nøyaktig det samme forsøket som Trond. En tilsvarende generalisering var det et tilfelle av i arbeidet med Oppgave 1:

Ingrid og Marthe ser at antall kvadrater øker med tre for hver figur, men prøver likevel å finne en eksplisitt formel på bakgrunn av figur nummer 10 som har 28 kvadrater:

18.	Marthe	Se her, hvis det er 10 kvadrater i nummer 4... 13x100
19.	Ingrid	Det er 28 kvadrater i figur 10, så det er 2800 i figur nummer 100
20.	Marthe	Vent nå
21.	Ingrid	Eller 280
22.	Marthe	1300 kanskje
23.	Ingrid	Jeg tror det er 280

Ingrid forsøker en generalisering som ser ut til å bygge på en proporsjonal økning, at 28 kvadrater for n=10 medfører 280 for n=100, det vil si at også her blir begge verdiene multiplisert med 10. Dette er en god illustrasjon på at kun to opplysninger (n=10, sum=28) ikke er tilstrekkelig for å si noe om tallfølgen videre. Marthe kan ha tenkt det samme for n=5 med 13 kvadrater, og begge er usikre på om det skal multipliseres med 10 eller 100. I Oppgave 1 & 2 var løsningsforslagene relativt enkle å kontrollere mot mindre verdier i tabellen. Gjennom uriktige generaliseringer fikk flere av gruppene øvelse i å se sammenhengen mellom en formel og tabell. Elevene så ut til å stole langt mer på tabellen enn forslagene til formel. Generaliseringsforsøkene her bygger på en antatt struktur om proporsjonal økning i en av faktorene som er involvert, og med en initialbetingelse for lite. Fra et funksjonsperspektiv trekker Ingrid og Trond slutningen av $f(n)=a \Rightarrow f(10n)=10a$ uten å ta hensyn til for eksempel $f(0)$ eller $f(1)$. Med tanke på elevenes bakgrunn i generaliseringsaktiviteter var det ikke overraskende at mange brukte tid på å lete etter en "overflatestruktur". Det kan være et tegn på utvikling av forståelse av hensikten med å generalisere. Sekvensene rundt disse forsøkene ser ut som "alge-babble" ("algebra-babling") som også kan være en indikasjon på en gryende oppmerksomhet mot generalitet (Mason &

Drury, 2007). Generaliseringsforsøkene skjedde i en atmosfære preget av nysgjerrighet og åpenhet for ulike meninger, ikke ulik Kaput og Blantons (2003) definisjon av en algebrakultur i klasserommet.

4.9 En ufordring til Anne, og hva er *n*?

Siden ideen om et generelt tall *n* var nytt for elevene før pilotprosjektet bestemte jeg meg for å spørre gruppene hva *n* er. Dette ble bare gjort i Oppgave 1 som tok mindre tid enn Oppgave 2. Gruppe C hadde fått støtte både på verbaliserings- og symboliseringsnivået i Oppgave 1:

70.	Øyvind	Hva er *n*?
71.	Line	1, 2, 3
72.	Øyvind	Hva er 1 for noe her… og 2?
73.	Line	Nummer
74.	Trond	Figur!

Line hadde totalt færrest ytringer på denne gruppen, og de fleste var spørsmål til Trond rundt figur nummer fem. Det er umulig å si hvilken rolle ideen om tregangen hadde for henne for *n*=100. Likevel er hun en av de som uttrykker best at det har med posisjonen til figuren å gjøre gjennom ”1, 2, 3” og ”nummer”. Fra gruppe D:

47.	Kristian	Det er et alt-mulig-tall
48.	Øyvind	Kan det være 1,5?
49.	Kristian	Ja…nei, det kan det ikke
50.	Paul	Det er et helt tall
51.	Kristian	Jeg antar at det er noe på *n*, sikkert at… det er noe på *n*.
52.	Pia	Nummer!
53.	Paul	Det er det siste tallet, eller hva man kaller det

Kristian er inne på ideen fra ”fruktsalat-algebraen” om at bokstaven skal symbolisere et kjent objekt. I denne sammenhengen kan Pias forslag ”nummer” virke hensiktsmessig, men bare som ”huskeregel”. Det er ikke godt å si om Pia og Kristian tenker at *n* representerer de naturlige tallene her, men Kristian utelukker desimaltall. Med ”det siste tallet” er det trolig at Paul mener det største. Dette fordi han under symboliseringen benyttet *n* i den betydningen. På gruppe A kom Marthe med den mest eksakte forklaringen:

65.	Øyvind	Hva er *n*?

66. Ingrid Masse rart
67. Marthe Det er tallene der
68. Øyvind Hvilke tall er det der?
69. Marthe Figur, figurnumrene

Anne og Ingeborg på gruppe B uttalte tidlig en generell struktur i Oppgave 1 og trengte liten grad av støtte i symboliseringen. Jeg lurte på om de kunne finne en figur som passet til formelen $3 \cdot n$, det vil si om de kunne gå motsatt vei.

56. Øyvind Hvordan kunne $3 \cdot n$ sett ut? Hvis det bare var $3 \cdot n$?
57. Anne Vi vet jo ikke hva n er!
58. Øyvind Ja, hva er n?
59. Ingeborg Det er et hvilket som helst tall
60. Øyvind Kan det være 1,5?
61. Ingeborg Kan det sikkert (begge ler)
62. Øyvind Men i sammenhengen her da?
63. Anne Det er figur nummer 100

I lys av hvordan forløpet med arbeidet hadde vært opp til da, ble jeg først overrasket over at Anne ikke visste hva n var. Men spørsmålet er om bruk av n i en annen type oppgave, det vil i denne sammenhengen si at hun klarer å finne veien fra formel til en mulig figur, og ikke fra figur til formel. Det er en svært åpen oppgave i den forstand at løsningen kan ha uendelig mange figurative uttrykk. Om hun hadde klart å bruke sine generaliseringer i Oppgave 1 på en ny måte er det mulig å si at hun har abstrahert. Forholdet mellom generalisering og abstrahering er et definisjonsspørsmål og mye debattert (Mason, 1996). En formel i Oppgave 1 er en dekontekstualisering av en figur, en overgang fra et visuelt representasjonssystem til et symbolsk. En abstrahering i Oppgave 1 vil jeg definere som et nivå der man gjennomskuer denne toveisrelasjonen. En ting er å gi mening til variabelen n og en formel via generalisering av figuren og tilhørende tallforhold, noe annet er det å gå andre veien. Hos Mason og Drury (2007) er det et argument for at Anne da eventuelt hadde generalisert og ikke abstrahert: Anne har funnet en formel etter handlinger på objekter, og denne formelen er et uttrykk for *egenskapene* til objektene. En abstrahering er det når handlingen fjernes fra objektene og kan utføres på andre objekter i en annen kontekst (Mason & Drury, 2007). Etter ytring 63 så vi på figurene i Oppgave 1 og formelen $3n$-2 en gang til, før et siste forsøk på $3n$. Det lyktes ikke, og det var ikke tid til å gå videre med det problemet.

5. DISKUSJON OG KONKLUSJON

For å komme inn i problemstillingen *hva kjennetegner utfordringene elevene møter gjennom generaliseringsaktiviteter* har jeg benyttet enkelte inndelinger og kategorier hvor grensene ikke er så klare. Jeg tenker da på grad av støtte og inndeling i oppfatnings- verbaliserings- og symboliseringsnivå. Den mest utydelige overgangen ser ut til å være mellom oppfatningsnivået og verbaliseringsnivået. Gruppene brukte ulik tid før de kom i gang med en tydeligere verbal beskrivelse av oppgavene. Noen telte mer enn andre, mens andre kom nærmest direkte i gang med verbaliseringen. De aller første ytringene på oppfatningsnivået ble likevel interessante å se videre på. I Oppgave 1 bekreftet Anne og Ingeborg (gruppe B) samt Kristian (gruppe D) at det første de så kan ha vært en dekomponering. Anne og Ingeborg fant også Kristians matematisk nyttige dekomponering. Grunnlaget for hypotesen i gruppe B og D bygget på en beskrivelse av figuren, og kan kalles figurativ generalisering. Gruppe C og F i Oppgave 1 fant ikke en generell struktur, og måtte ha støtte for å finne verdien for n=100. Noe mer komplisert er dette forholdet i Oppgave 2. Gruppe A, B og E uttalte en struktur eller "oppskrift", hvorav bare en gruppe måtte ha støtte for n=100. Noe av årsaken til dette kan ligge i motstand mot løsning i form av en ubestemt sum. Gruppe F som ikke uttalte en struktur måtte ha støtte for n=100. Det er verdt å merke seg at Marthe på gruppe A som ikke måtte ha støtte også uttalte strukturen for n=100 i Oppgave 2. De som ikke så en struktur tidlig uttalte heller ikke noe senere om det uten støtte. Dette gjelder begge oppgavene. På bakgrunn av dette bygger jeg en konklusjon omkring oppfatningsnivået:

Det er en utfordring å se en matematisk nyttig dekomponering på oppfatningsnivået. I hvilken grad en struktur elevene oppfatter er matematisk nyttig vises først på verbaliseringsnivået. Ytringer som er matematiske meninger på oppfatningsnivået kan være tegn på evne til figurativ generalisering.

Dette er i tråd med Lee (1996) som fant at problemet til elevene var ikke å "se" et mønster, men oppfatte et som er algebraisk nyttig. En mulig rekursiv sammenheng som Anne så i Oppgave 1 ble kanskje endret fordi den er vaskeligere å bruke som grunnlag til å finne en formel. I følge Becker og Rivera (2006) hadde deres elever problemer med å finne en direkte formel på grunnlag av en slik rekursiv relasjon. Dette er det eneste tilfellet i mitt datamateriale hvor en elev kan ha endret sin oppfatning uten støtte. Lee mener også at elevene har problemer med å endre sin første persepsjon av et mønster (Lee). Hennes undersøkelser ble utført med voksne studenter som ikke hadde tatt kurs i matematikk på flere år. Felles med elevene i min undersøkelse er at de aldri hadde arbeidet med et lignende emne innen algebra.

Når det kommer til grad av støtte så har jeg operert med to kategorier, liten grad av støtte og støtte. På verbaliseringsnivået ble det ulike behov for støtte mellom gruppene, og tydeligst ved spørsmålet å finne verdiene for n=100. I alt var det tre tilfeller av elever som utførte et avgjørende eksperiment (Balacheff, 1988) uten støtte, Marthe i begge oppgavene og Kristian i Oppgave 1. Marthe fikk bare i det ene tilfellet spørsmålet "hva ser du?" før hun fant en løsning. For to grupper i Oppgave 1 var det råd om tregangen som førte til en løsning. I Oppgave 1 var det en tydelig sammenheng mellom de som antydet en struktur på oppfatningsnivået og de som utførte et avgjørende eksperiment uten støtte. I Oppgave 2 så det ut til at flere var klar over løsningsstrategien, men jakten på noe annet enn en ubestemt sum kan ha kommet i veien for enkelte. Om utfordringer på verbaliseringsnivået for Oppgave 1 og 2 samlet har jeg at:

En hovedutfordring på verbaliseringsnivået er å ta steget fra naiv empirisme til et avgjørende eksperiment uten støtte. Å ha sett en matematisk nyttig dekomponering på dette nivået eller oppfatningsnivået ser ut til å være av stor betydning for å ta dette steget.

Datamaterialet viste dekomponeringer som var matematisk nyttig og unyttige. Av de nyttige har vi Kristians tre armer og sentrumskvadrat i Oppgave 1 som ga opphav til summen 100+99+99 for n=100. I Oppgave 2 stilte Marthe og Paul personene opp på en rekke og resonnerte i retning av at en person "hilser seg ferdig" før nestemann hilser. Begge disse effektive ideene ble vist figurativt. Andre figurative strategier i Oppgave 2 som å tegne forbindelseslinjer mellom personene viste seg å ikke gi suksess for større verdier. Der ble det hurtig tungvint å operere på nivået naiv empirisme og mye tid gikk med til å tegne, telle og sammenligne svar.

Av de tre nivåene går det skarpeste skillet mellom verbaliserings- og symboliseringssnivået. Symboliseringen er en aktivitet som er enklere å skille ut fra de verbale beskrivelsene enn de første ytringene på oppfatningsnivået. På en gruppe så vi at symboliseringen kom rett før de fant verdien for n=100. Bare Kristian utførte symboliseringen uten noe hint eller støtte, så et klart særtrekk ved dette nivået er at det er mer krevende enn det foregående. Kristian så ikke behov for å lage en tabell for å finne en formel og har etter Becker og Riveras (2006) definisjon utført en figurativ generalisering. Det samme kan sies om Pauls "oppskrift" i håndtrykkproblemet, men uten at denne ble symbolisert. I Oppgave 1 var det å utføre beregninger for variabelverdien 100 ikke tilstrekkelig til å klare symboliseringen. Verdiene 1000 og 10000 ble benyttet før flere fikk satt inn *n*. Som nevnt tidligere kan denne substitusjonen av tallene 100, 1000 og 10000 være en overflategeneralisering. Verbalt kan det minne om en imitasjon. Gjennom gjentakelse av hvilke operasjoner man utfører med gitte verdier legger man nærmest *n* i munnen på elevene. Uten hensikt er det likevel ikke fordi det kan styrke ideen om *n* som variabel og vise hvordan den kan brukes. Elevene får sett en symbolisering som er en teknikk i algebra. Og i følge Radford (1996) kan det være nyttig i forbindelse med å gi mening til de algebraiske objektene. Teknikk i denne sammenhengen er det også å bruke større verdier i en formel eller forslag til formel. Det var flere elever som klarte å bruke *n* som variabel og forklare hva de mente med symbolet. Med tanke på samtalene i gruppene under ett og hvor ny ideen om en variabel var for elevene, kan man hevde at det for flere lå kunnskap her som ble internalisert. Gjennom symboliseringen er det ingenting som tyder på at noen får en annen oppfatning av strukturen de eventuelt hadde fra de to første nivåene. Til det ble nok symboliseringen for mye en type "erstatningsaktivitet". Mine spørsmål på dette nivået ledet også elevene til å finne en erstatning for posisjonene 100, 1000 og 10000, og ikke mot å finne rollen *n* spiller i en eventuell dekomponering. Utgangspunket før symboliseringsnivået var at alle med ulik grad av støtte hadde funnet verdiene for *n*=100, hvilket jeg antok var et nødvendig grunnlag for å gå videre.

Å finne en formel uttrykt ved variabelen n er en utfordring på symboliseringsnivået både om n hos elevene er gitt mening fra en generell struktur de har sett eller fra en overflategeneralisering.

I forhold til å utføre symbolisering med liten grad av støtte, er det å ha sett en matematisk nyttig dekomponering en nødvendig betingelse, men det er ikke en tistrekkelig betingelse.

Alle gruppene benyttet et utpreget hverdagsspråk på alle nivåene. Nytt for elevene var å si og bruke "*n*" i en ny type oppgave. Vi har sett et bredt utvalg av forslag til hva elevene legger i *n*, hvilket meningsinnhold de legger i symbolet. Variabelen *n* er igjen mediert gjennom hverdagsbegereper fra "masse rart" til "figurnummer". Jeg så ikke nevneverdige spor til at dette var noen hindring i det å arbeide med symboliseringen. Ser man begge oppgavene og de tre nivåene under ett kan jeg også slutte meg til Lee:

The key success seemed to be at the first stage of pattern perception, where a certain flexibility was necessary to hit on a mathematically recordable pattern (Lee, 1996 s. 94).

6. PERSPEKTIVERING

I denne oppgaven har jeg sett på generaliseringsaktiviteter knyttet til et avgrenset område i algebra, generalisering av figurtall og tallmønster. Jeg vil avslutningsvis komme med synspunkter omkring generaliseringens rolle, pedagogiske implikasjoner og hva jeg har lært.

6.1 Generaliseringens rolle

Elevene på 7. trinn som deltok i undersøkelsen hadde ferdigheter innen aritmetikk, og i følge læreplanen er tiden inne for å ta et steg videre og inn i bruk av symboler. I overgangen til å benytte et symbol som representant for en tallstørrelse står man som lærer overfor flere interessante muligheter, og mitt valg ble her å bruke ideen om et generelt tall *n*, en variabel. Den knyttes her til andre sentrale ideer og begreper innen matematikk som *posisjon*, *nummer* og *formel*. Å bygge formler gjennom diskusjon og hypotesetesting er et forsøk på å skape orden og finne en lovmessighet i observasjoner. Figurtallene og tallmønstrene kan være et første møte med å finne slike sammenhenger. Ved senere møter med ulike formler kan man ikke undervurdere betydningen av selv å ha bygget formler. Oppgave 1 og 2 gir muligheter til å styrke forståelsen av at en bokstav har sin mening og mulige begrensninger. Generalisering som her er å finne en struktur som skal uttrykkes både verbalt og skriftlig, er en ferdighet elevene utvilsomt får nytte av videre i matematikk. Mason (1996, s. 84) er klar i sin mening om hva som er en matematikktime:

Lessons that are not imbued with generalization and conjecturing are not mathematics lessons, whatever the title claims to be.

Spørsmålene som "hva med 100 personer?... *n* personer" så jeg vekke ulike reaksjoner hos elevene. I første omgang kunne enkelte virke overrasket over at det i det hele tatt er mulig uten å telle. Å oppleve at det faktisk er mulig er i seg selv en opplevelse, og for mange en "lettelse". Generaliseringen ble en demonstrasjon av hvor kraftig redskap det kan være. Som lærer er det selvsagt oppløftende å se elever forske sammen og oppleve gjennombrud, "a-ha"-opplevelser på området. Også det å gå fra naiv empirisme til et avgjørende eksperiment med n=100 mener jeg ga en slik effekt i noen tilfeller. Grunnlaget for å si dette ligger i like stor grad på tolkning av min opplevelse av ansiktsuttrykk og kroppsspråk enn ytringer.

Jeg spurte Kristian ”kan det være 1,5?”, og valgte å ikke følge opp dette. Spørsmålet leder til tanker om hvordan oppgaver lik de som ble gitt her kan være et grunnlag for å gå videre til funksjoner og kontinuerlige intervaller. I Oppgave 1 og 2 ble *n* gitt mening som et naturlig tall knyttet til posisjon, og jeg mener forståelsen for relasjoner mellom størrelser gjennomgående ble bedre i gruppene. Generaliseringens rolle her kan komme til nytte i arbeidet med begrepene *uavhengig variabel* og *definisjonsmengde* (Karush, 1978). Formelen *3n-2* i Oppgave 1 hadde en bestemt opprinnelse i en følge av figurer. Det kunne også vært for eksempel søyler med en bestemt høyde. Et steg videre kan være å endre dette representasjonssystemet og nærme seg grafer og de reelle tallene. Jeg ser generaliseringsaktivitetene som en mulig brobygger mellom ulike representasjonssystemer som tabeller, grafer og mengder. Mens en formel kan betraktes som en relasjon mellom størrelser kan en funksjon ses på som en entydig korrespondanse mellom to mengder (Edwards & Penny, 1986). Siden formler og funksjoner står så sentralt i matematikk blir aktiviteter som Oppgave 1 og 2 medfører et viktig bidrag.

6.2 Didaktiske implikasjoner

For at elevene skal kunne skille mellom begrepene formel, funksjon og likning kreves at det tilrettelegges for aktiviteter som ikke tar lett på utvikling av vitenskapelige begreper. Jeg har erfart og sett at begrepene *bokstavuttrykk*, *verdi* og *variabel* (Hjardar & Pedersen, 2006) brukes i en innledningsfase på flere områder. Et problem etter mitt syn er at det i en del lærebøker, og kanskje også i undervisningspraksis, innføres symbolisering på flere områder med korte tidsintervaller, for eksempel innenfor likninger, formler og funksjoner. Også elever på videregående skole kan ha problemer med å skille en likning fra en formel, og likninger er ofte meget sterkt knyttet til symbolet ”x”. Det kan være et tegn på at det har blitt vektlagt teknikk framfor forståelse av begreper og meningsinnholdet i symboler.
Generaliseringsaktivitetene i Oppgave 1 og 2 tror jeg kan komme på et langt tidligere klassetrinn. Aktiviteter på nivået naiv empirisme og avgjørende eksperiment kan fremme algebraisk tenkning lenge før 7. trinn. Å benytte både figurative og numeriske oppgaver til dette tror jeg kan være en måte å oppfylle gjeldende læreplans intensjoner. Det er et bidrag til å gi overskriften ”Tall og algebra” under kompetansemål for 2.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2006) et innhold. Utfordringene med å gi *n* mening i Oppgave 1 og 2 er eksempler på at det må arbeides med begrepsforståelse. Jeg tenker da ikke begrepsforståelse i betydningen *begrepskunnskap* (Hiebert & Lefevre, 1986) innenfor læringsteori med konstruktivistisk tradisjon, men forståelse av *begreper* som definert i teorikapitlet. Å begynne med ideen om et

generelt tall *n* og innføre begrepet *variabel* mener jeg er en hensiktsmessig start med det å symbolisere tallstørrelser. Et steg videre mot funksjoner vil kunne være å se på oppgaver hvor generaliseringsaktiviteter kan gi mening til nyansen mellom *avhengig* og *uavhengig variabel*. For meg ser det ut som begrepet *verdier* benyttes i for mange sammenhenger og blir et samlebegrep med mye ulikt matematisk innhold. Dette viser for meg en side av hvorfor språkets rolle er så sentralt i matematikk.

Utfordringene elevene møtte gjennom Oppgave 1 og 2 spenner fra det å se en matematisk nyttig struktur, ta steget til et avgjørende eksperiment og symbolisere. Det var ingen nevneverdig utfordring å arbeide på nivået naiv empirisme som her innebar ulik grad av telling og tegning. Det er et nivå hvor en struktur kan avdekkes. Målet med oppgavene er å komme over dette nivået og nærme seg symboliseringen. Det må være en årsak til at Oppgave 1 ble vanskeligere enn tilsvarende oppgaver i pilotprosjektet. Etter mitt syn har det med hvordan prikkene eller kvadratene er arrangert. Fra kompakt arrangerte prikker hvor blant annet to- og tregangen kom til syne, fikk de i Oppgave 1 tre ”armer” som økte. Det virket som en annen oppgavekontekst uten annen overføringsverdi enn ideen om et generelt tall *n*. Dette kan vise betydningen av å erfare et bredere spekter av figurer, utvide sitt ”example space” (Mason & Drury, 2007). Jeg tror erfaringene elevene fikk gjennom denne oppgaven ville medført en enklere overgang til en ny oppgave nå enn fra pilotprosjektet til Oppgave 1.

I smågruppene fikk elevene høre enkelte medelevers meninger og hypoteser, og ikke alle er like nyttige. Med tanke på hvordan Paul, Ingrid og Marthes løsningsstrategi i Oppgave 2 ble mottatt skulle jeg gjerne sett at også Kristians oppfatning av struktur i Oppgave 1 bli presentert for de andre smågruppene. En oppsummering og *rasjonell vurdering av deres formuleringer* (Winsløv, 2006) kunne gitt de andre tilgang til en annen måte å oppfatte et mønster på. Dette er ikke å gi hint om generalitet for tidlig siden alle var gitt tid til å arbeide med oppgaven. Tilsvarende interessant hadde det vært å se på utfordringen med å symbolisere rekursiviteten til Anne (figur 1). Utfordringene på oppfatningsnivået mener jeg best møtes med varierte oppgaver og i etterkant tid til drøfting av ulike syn i plenum. Et spørsmål Anne fikk kan være en annen nyttig aktivitet. Å gå fra en formel til mulige figurer kan styrke forståelsen av relasjonen mellom ulike størrelser og representasjonssystemer. Det ville ikke overraske meg om også elevene kunne laget interessante oppgaver til hverandre etter en stund.

Den største utfordringen var symboliseringen. Hvordan og hvorfor *n* gis mening varierer. Oppfatningsnivået er av betydning, så også her mener jeg varierte oppgaver er nødvendig. I følge datamaterialet ser det ut som det å ha gjort et avgjørende eksperiment er av betydning. Å utføre beregninger for store verdier var nyttig for flere med hensyn til symboliseringen. Overflategeneralisering ble i stor grad en nødvendighet før *n* fikk mening, det vil si å utføre operasjoner med flere store verdier. På et tidspunkt vil det da kunne virke hensiktsmessig å benytte *n*. Det kan oppstå et behov for å forenkle uttrykket med et generelt tall.

De språklige utfordringene var åpenbare, men så ikke ut til være et hinder i å løse oppgavene. Jeg vil vektlegge drøfting av nye begreper og definisjoner i felleskap. Et godt eksempel i denne sammenhengen var Kristians ”midten” som burde vært drøftet i etterkant. David Pimm (1991) påpeker at situasjonen i større grupper egner seg til å reflektere over egen og andres språkbruk. Hans sentrale poeng er å skape en situasjon som gir grunnlag for overgang fra et uformelt til formelt matematisk språk både skriftlig og muntlig. *”Say what they have seen”, under the constrains of ” no pointing and no touching”* (Pimm, 1991 s. 22) er for meg et godt råd ikke bare i disse oppgavene.

6.3 Hva har jeg lært?

Etter 18 år som lærer i alt fra 2. trinn til 3. videregående så jeg behov for å oppdatere kunnskapene og ikke minst få bruke tid på faget jeg har undervist mest, matematikk. Jeg har alltid undret meg over hva som kjennetegner oppgaver som vekker interesse, meningsutvekslinger og forskertrang hos elevene og samtidig har et bestemt matematisk innhold. Gjennom årene har jeg samlet mange ”gullkorn” og forsøkt å lage en del selv. Etter dette studiet ser jeg bedre hvordan og hvorfor oppgavene virker ulikt. Dette vil jeg sammenfatte rundt tre stikkord det som står igjen som det mest sentrale for meg, *oppmerksomhet*, *mening* og *gode spørsmål.*

Min tidligere praksis og utdanning peker på et virke innen en sosialkonstruktivistisk tradisjon. ”Sosial” i den forstand at jeg har vektlagt språkets og samhandlingens rolle i læring, og konstruktivistisk på den måten at jeg tenkte på bygging av *skjema* (Skemp, 1989). Å sette seg inn i sosiokulturell teori har vært en lang og lærerik prosess. Tidligere ville jeg blitt mer overrasket over for eksempel den lille overføringsverdien pilotprosjektet fikk i forhold til Oppgave 1 og 2. Jeg ser nå nytten av å ha større oppmerksomhet mot den enkeltes meninger i ulike oppgavekontekster, mens jeg tidligere hadde større tro på verdien av å gi et generisk eksempel som introduksjon til et emne. Å skape en samarbeidssituasjon med matematisk kunnskap elevene kan internalisere minner om det å bygge et hensiktsmessig skjema ved utprøving og testing, og med ulik grad av støtte. For meg ligger det viktigste skillet i to begreper, at læringen er *mediert* og *situert*. Jeg ser verdi i å ha oppmerksomhet mot hvilke hverdagsbegreper elevene benytter for å forklare et vitenskapelig begrep eller symbol, og at situasjonen elevene befinner seg i er medvirkende faktorer i læringsprosessen. Jeg avskriver på ingen måte et sosialkonstruktivisk perspektiv, men et nytt bidrag i synet på læring har vært inspirerende.

Størst betydning for min praksis får utvilsomt et bredere perspektiv på algebra og generalisering. I denne oppgaven er det gitt mange eksempler på spørsmål som kan fremme algebraisk tenkning. Grunnen til ikke å ”pådytte” elevene generalitet, eller ikke være for eksplisitt, ser jeg i et nytt lys. Til og med figuren jeg satt inn i Oppgave 2 kan være opphav til at elevene ikke finner en effektiv løsningsstrategi. Et kjernespørsmål blir å styre min oppmerksomhet mot hvordan elevene generaliserer og tenker, og styre elevenes oppmerksomhet mot å se generelle strukturer. Teknikk og symbolmanipulasjon ser jeg kan komme som en mer naturlig og meningsfull aktivitet i forbindelse med slike oppgaver. Jeg har vært innom mange varianter av innføring i algebra, ”fruktsalat”, likninger, renteregning, men også geometri. Uten fokus på spørsmål som fremmer generaliseringsaktiviteter ble det lett å komme inn i en verden av manipulasjon med symboler. Oppfatninger blant elevene om at visse fag er meningsløse er nok en tendens som er mer utbredt på ungdomstrinnet enn andre trinn, og da hjelper det ikke med lange rekker av symboler eller faktorisering av rasjonale uttrykk med polynomer og parenteser. Da blir matematikk noe i den retning Mason (1996) mener med et ”dødt emne”. Et annet moment av betydning er oppmerksomhet mot elevenes første ytringer omkring en oppgave, å prøve og forstå hva elevene ser. Her kan det komme opplysninger man kan ha nytte av både i den grad eleven trenger støtte og i en oppsummering i større gruppe. At generalisering er av den største betydning i matematikk er jeg nå overbevist om. Jeg er heller ikke i tvil om at jeg på en grundigere måte skal gi kommende elever muligheten til å verdsette matematikk gjennom generaliseringsaktiviteter. Det kan passe at Mason får et siste ord:

Generalization is the life-blood, the heart of mathematics

(Mason, 1996 s. 74)

REFERANSER

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder & Stroughton in association with Open University.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. I J. M. Novotná, H. Krátká, M, Stehliková, N. (Red.), *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, s. 465-472). Prague: PME.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). London: Routledge.

Cole, M. (2005). Putting culture in the middle. I H. Daniels (Red.), *An introduction to Vygotsky* (2. utg.). London: Routledge.

Daniels, H. (2005). *An introduction to Vygotsky* (2. utg.). London: Routledge.

Daniels, H. (2008). *Vygotsky and research*. London: Routledge.

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring*. Oslo: Abstrakt forlag AS.

Edwards, C. H., & Penny, D. E. (1986). *Calculus and analytic geometry*. London: Prentice-Hall International Editions.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I I. J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1-27). Hillesdale, NJ: Erlbaum.

Hjardar, E., & Pedersen, J.-E. (2006). *Faktor 2. Grunnbok* (Vol. 1). Oslo: J.W. Cappelens Forlag AS.

Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears". *Teaching children mathematics, 10*(2), 70-77.

Karush, W. (1978). *Matematisk opslagsbog*. København: Politikens Forlag.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (Vol. 8, s. 21-33). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C., & Yerushalmy, M. (2004). Research on the Role of Technological Enviroments in Algebra Learning and Teaching. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (Vol. 8, s. 99-145). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Lave, J., & Wenger, E. (2005). Practice, person, social world. I H. Daniels (Red.), *An introduction to Vygotsky* (2. utg.). London: Routledge.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activites. I L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (Vol. 8, s. 47-64). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J., & Drury, H. (2007). Studies in the Zone of Proximal Awareness. I J. Watson & K. Beswick (Red.), *Mathematics: Essential research,essential practice - Volume 1 & 2. Proceedings of the 30th annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (Vol. 1 & 2). Warooga: Merga Inc.

Pimm, D. (1991). Communicating mathematically. I I. K. Durkin & B. Shire (Red.), *Language in mathematical education. Research and practice* (s. 17-23). Buckhingham: Open University Press.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 107-111). Dordrecht: Kluwer.

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge-Falmer.

Sutherland, R. (2004). A toolkit for Analysing Approaches to Algebra. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (Vol. 8, s. 73-93). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Utdanningsdirektoratet. (2006). Læreplan i matematikk. Hentet 13. januar 2009, fra http//:www.udir.no/templates/udir/TM_LærePlan.aspx?id=2100&laerplanid=212147&visning=5&sortering=1

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society*. London: Harvard University Press.

Wertsch, J. V., & Tulviste, P. (2005). Social origins of individual mental functioning. I H. Daniels (Red.), *An introduction to Vygotsky* (2. utg.). London: Routledge.

Winsløv, C. (2006). Didaktiske miljøer for likedannethed. *Matematikk- og naturfagsdidaktikk, 2*, 47-63.